

国外工业控制与智能制造丛书



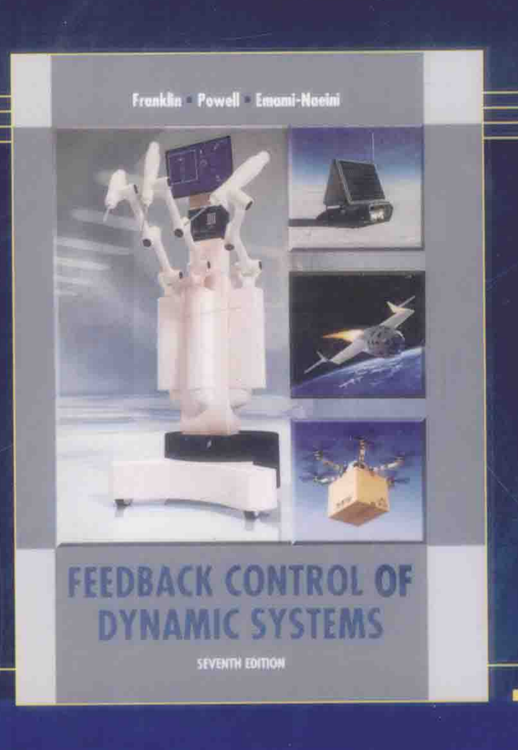
动态系统的反馈控制

（原书第7版）

吉恩 F. 富兰克林（Gene F. Franklin）
[美] J. 大卫 · 鲍威尔（J. David Powell） 著
阿巴斯 · 埃马米-纳尼（Abbas Emami-Naeini）

刘建昌 于霞 马丹 译 赵军 审校

Feedback Control of Dynamic Systems
Seventh Edition





动态系统的反馈控制

（原书第7版）

[美] 吉恩 F. 富兰克林（Gene F. Franklin）
J. 大卫 · 鲍威尔（J. David Powell）
阿巴斯 · 埃马米-纳尼（Abbas Emami-Naeini） 著
刘建昌 于霞 马丹 译 赵军 审校

Feedback Control of Dynamic Systems
Seventh Edition

Franklin Powell Emami-Naeini
FEEDBACK CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS
SEVENTH EDITION

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

动态系统的反馈控制（原书第7版）/（美）吉恩 F. 富兰克林（Gene F. Franklin）等著；刘建昌，于霞，马丹译．—北京：机械工业出版社，2016.6
（国外工业控制与智能制造丛书）
书名原文：Feedback Control of Dynamic Systems, Seventh Edition

ISBN 978-7-111-53875-2

I. ①动… II. ①吉… ②刘… ③于… ④马… III. 动态系统－反馈控制 IV. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第115371号

本书版权登记号：图字：01-2014-3685

本书共分为10章，利用根轨迹、频率响应和状态变量方程等三种方法，将控制系统的分析和设计结合起来。第1章通过实例综述了反馈的基本思想和一些关键的设计问题。第2～4章是本书的基础，主要介绍了动态系统的建模、控制领域中常碰到的动态响应，以及反馈控制的基本特征及优越性。第5～7章为本书的核心，分别介绍了基于根轨迹、频率响应和状态变量反馈的设计方法。在此基础上，第8章通过描述数字控制系统基本结构，介绍了应用数字计算机实现反馈控制系统设计所需的工具。第9章介绍非线性系统，描述函数的频率响应、相平面、李雅普诺夫稳定性理论以及圆稳定性判据。第10章将三种基本设计方法相结合，给出了通用的控制系统设计方法，并将该方法应用到几种复杂的实际系统中。

出版发行：机械工业出版社（

责任编辑：谢晓芳　　责任校对：殷　虹

印　　刷：北京市荣盛彩色印刷有限公司　　版　　次：2016年7月第1版第1次印刷

开　　本：185mm×260mm　1/16　　印　　张：32.25

书　　号：ISBN 978-7-111-53875-2　　定　　价：119.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604

购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的传统，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，信息学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的信息产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对我国教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其信息科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀教材将对我国教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自 1998 年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与 Pearson、McGraw-Hill、Elsevier、John Wiley & Sons、CRC、Springer 等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出 Alan V. Oppenheim、Thomas L. Floyd、Charles K. Alexander、Behzad Razavi、John G. Proakis、Stephen Brown、Allan R. Hambley、Albert Malvino、Peter Wilson、H. Vincent Poor、Hassan K. Khalil、Gene F. Franklin、Rex Miller 等大师名家的经典教材，以“国外电子与电气技术丛书”和“国外工业控制与智能制造丛书”为系列出版，供读者学习、研究及珍藏。这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也越来越多被实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着电气与电子信息学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化，教育界对国外电气与电子信息教材的需求和应用都将步入一个新的阶段，我们的目标是尽善尽美，而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正，我们的联系方法如下：

华章网站：www.hzbook.com

电子邮件：hzjsj@hzbook.com

联系电话：(010)88379604

联系地址：北京市西城区百万庄南街 1 号

邮政编码：100037



华章科技图书出版中心

译者序

《Feedback Control of Dynamic Systems》的最新版（第7版）于2014年出版，本书是斯坦福大学自动控制专业本科生、研究生以及非控制专业研究生的教材，也可以作为所有工程专业高年级学生的参考用书。与之前版本相比，第7版增加了一些控制理论基本原理方面的内容，对一些关键部分的理论描述进行了修改，补充了一些控制系统在实际应用方面的最新研究结果。本书在提供基本的理论和设计方法的同时，更加重视计算机技术在控制系统设计中的应用，非常适合用于培养学生的工程实践能力和提升工程技术人员的设计能力。

本书由浅入深，内容翔实，论证严谨，具有很强的系统性。重点阐述了反馈控制的基本理论、设计方法及在工程技术领域中的一些实际问题。本书的基本结构与前版相同，主要利用根轨迹、频率响应和状态变量方程这三种方法将控制系统的分析与设计结合起来，并列举了大量的应用实例来验证和说明相关内容。本版更加注重反馈控制在整个控制理论体系中的地位，因而对部分章节进行调整，增加了基本原理的内容，重新编写了关于稳定性和补偿的内容，增加了关于模型跟踪过程和零阶保持器近似方法的内容，整合出单独的一章介绍数字控制，对书中的实际例子进行了更新，而且对各章的习题进行修正和补充，所以本版更加适合读者学习。此外，为了与MATLAB软件符号一致，本版将状态空间描述符号统一进行了修改，并更新了全书的MATLAB指令，以提升读者使用该软件的能力。本版的另外一个特点是每章开篇通过综述和展望，从科学的角度入手论述该章各节的内容，在每章末尾进行历史回顾，以此为读者提供该章的研究背景及其在控制系统理论应用发展中的地位和意义。另外，本书的附录给出学习本书必需的大量基础理论及数学工具，对每章精心设计的复习题给出了参考答案，读者也可以通过网址 www. fpe7e. com 查阅到有关本书的各种原文资料。

本书的三位作者 Gene F. Franklin、J. David Powell、Abbas Emami-Naeini 均为世界知名的控制理论学者，该领域的著名专家，他们不仅研究成果卓著，而且出版了一些很有影响力的著作与教材，本书便是其中最具影响力的一本。本书作者之一 Gene F. Franklin 是斯坦福大学电气工程系教授，国际著名控制学家，IEEE终身会士。他曾任斯坦福大学电气工程系主任、IEEE控制系统学会理事、副主席，其研究领域覆盖了控制的各个方面。2005年，因其对多个控制领域的基础性贡献而荣获美国自动控制学会的最高奖——Bellman奖。

总之，本书从第1版问世以来，已受到很多读者和有关专家的好评。鉴于本版与过去几版相比更具先进性和实用性，现将本书第7版译成中文，供高等院校有关专业的师生、工程技术人员和更多对反馈控制感兴趣的读者使用和参考，希望读者从这部著作里得到启迪和帮助。

在翻译本书的过程中，译者在自知责任重大的同时也深深感到，读懂一部原著是一回事，而翻译好一部原著又是一回事，区别在于精准性。我们本着尽可能遵循作者原意的原则，力求做到客观准确。并在忠实原文的基础上尽量符合相关专业领域的中文表达习惯，使得读者能够品读本书的原味。为保证全书的一致性，我们在翻译过程中多次对相关术语的表述进行校准与统一，并对可能产生歧义的文字与段落进行了反复讨论。

本书由刘建昌教授主持翻译，其中第1章、第2章、第5章、第9章及索引由马丹

翻译，第 3 章、第 4 章、第 6 章及附录由于霞翻译，前言、第 7 章、第 8 章、第 10 章由刘建昌翻译。最后由赵军教授对全书进行了统稿与审校。除此之外，为本书翻译做出贡献的还有：伍彩云博士后、王霞、杨东、朱孔伟、刘茜、石岩、张文乐、于淼、杨敏敏、于渢、李旭等博士研究生。本书由机械工业出版引进出版，并一直鼓励我们翻译本书，在此我们表示由衷的感谢。最后感谢大连理工大学的连捷副教授对本书译稿所提的意见与建议。

由于译者的水平有限，译文中定有许多不妥之处，欢迎读者批评指正。

前　言

本书的第 7 版保留了早期版本的精华，是控制方面的一本基础教材。根据之前对读者的调查，我们增加了一些内容(如第 2 章的齿轮部分)，并将其他较少使用的内容(如前几章的数字控制部分)从书中删除。我们也更新了部分教材内容，以便能够应用 Matlab 中改进的新功能。但是，对读者来说，最大的改变是将以前使用的状态空间描述的符号($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}$)变为($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$)！在以前的版本中，我们忠实于状态空间方法的先驱者们，没有采用现实研究中的表达方式，而是一直使用经典的符号。然而对于本版，我们接受这一现实，即和 **Matlab** 中的记号一样，采用($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$)这一该领域普遍使用的符号。我们还在第 4 章增加了关于前馈控制的内容，在第 7 章增加了关于模型跟踪的内容。此外，还改进了关于 PID(比例积分微分)控制的描述并增加了拉普拉斯(Laplace)变换的内容。我们致力于给控制系统的设计者提供基本的理论与设计方法以及计算机辅助设计方法的入门知识。同时，我们也努力使设计者具备能对计算结果进行指导和验证的能力。第 10 章的案例根据需要做了一定的保留和更新。最后，为了引导读者在本书中能找到特定的主题，我们扩充了目录。

本书的基本结构并没有改变，仍然利用根轨迹、频率响应和状态变量方程这三种方法将控制系统的分析与设计结合起来。本书依旧包含大量精心设计的例子来验证和说明内容。与以往版本一样，为帮助学生检验所学内容，在每章结尾都提供了大量的复习题，并在书末附上了答案。

在介绍设计方法的三个核心章节中，我们仍希望学生学习如何动手进行基本的计算，并能画出根轨迹或者伯德(Bode)图的草图，然后利用计算机作为辅助设计的工具对结果进行检验。其实我们很早就介绍了如何使用 Matlab 这一被广泛使用的软件工具进行控制系统的分析与设计的方法。除此之外，鉴于很少有教师会用到第 6 版中第 4、5、6 章关于数字控制的部分，我们将这部分内容移到了网站上，同时也对第 8 章进行了改进，用独立的一章介绍数字控制。如果那些想在教学中使用控制器的数字实现这类在早期版本中内容的老师，可以从网站下载使用，其中内容的顺序与第 6 版的相同，或者学生也可以直接学习第 8 章的内容。与先前一样，本书收集了全部用于产生本书图形的 Matlab 文件(扩展名为“. m”和“. mdl”)。读者可以到网站 www. fpe7e. com 上查阅这些文件。

第 7 版新增内容

我们认为第 7 版能够为教学提供很好的支撑材料，为学习控制提供强大的动力，并为面对教育的挑战奠定坚实的基础。我们介绍的反馈控制研究，既是一个独立的专业，也可为许多其他领域提供支持。

与以往版本比较，第 7 版更详细的变化列表如下：

- 第 1 章增加了基本原理的新内容。
- 第 2 章增加了关于齿轮的新内容。
- 更新了全书 Matlab 指令来提升读者使用该软件的能力。
- 重新编写了第 3 章中拉普拉斯变换和频率响应的内容。
- 重新编写了第 4 章中 PID 控制的内容。
- 增加了第 4 章中前馈控制的内容。
- 将第 4 章中数字控制的内容移到了本书网站上(www. fpe7e. com)。

- 修改了第 4 章中零点对系统影响的部分。
- 将第 5 章中数字控制和时间延迟的内容移到了网站上。
- 将第 6 章中数字控制的内容移到了网站上。
- 为了保证当前行业标准的清晰性和一致性，重新编写第 6 章关于稳定性和补偿的内容。
- 扩展了第 6 章关于尼科尔斯(Nichols)图的讨论。
- 将第 7 章中数字控制的内容移到了网站上。
- 修改了第 7 章、第 9 章和第 10 章中描述状态空间的符号，即由($\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}$)变为($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$)。
- 为避免产生歧义，根据状态空间符号的变换，整本教材关于补偿的符号由 $D(s)$ 变为 $D_c(s)$。
- 增加了第 7 章中模型跟踪的过程。
- 为了清晰，重新编写了第 8 章的几节。
- 增加了第 8 章中零阶保持器的近似方法。
- 更新了第 10 章中发动机控制的例子并全面修改了系统生物学案例研究。
- 本书各章大约 20%的习题是经过修正或是新增加的。

应对教育面临的挑战

反馈控制专业的学生面临的一些教育挑战是长期存在的，与此同时其他挑战也已在最近几年中初现端倪。其中一些挑战会始终贯穿整个工科教育中，而其他挑战则是这一相对复杂课程所特有的。无论这些挑战是已存在的还是新出现的，是一般的还是特殊的，我们所面对的挑战对本书内容体系的形成都至关重要。在此，我们将叙述几个教育上面临的挑战，并针对每一种挑战提出相应的应对办法。

- **挑战 1：学生必须掌握设计与分析方法。**

设计对所有工程(尤其对控制系统)而言是核心。学生会发现设计问题以及相应的处理实际应用的机会对他们而言特别具有吸引力。但学生还会发现设计问题很难，因为常常连设计问题的描述都没有很好地形成且缺乏独特的解决方案。但由于它固有的重要性及对学生的启发性影响，本书自始至终都在强调设计，让大家一开始就对求解设计问题充满信心。

在介绍完系统建模与动态响应之后，从第 4 章开始重点介绍系统设计。首先介绍反馈的基本思想，包括反馈对抑制扰动、跟踪精度以及对参数变化鲁棒性的影响。设计的方式依旧是根轨迹、频率响应及状态变量反馈技术等方法。本书旨在为实现更好的反馈控制设计提供必备的知识，并未给出大量复杂的数学推导，这样使得内容更加清晰易懂。

本书列举了很多例子，将不同设计方法得到的设计效果进行比较。在第 10 章的案例分析中，用统一的方式使用全部方法来解决复杂的实际设计问题。

- **挑战 2：将新思想引入控制中。**

控制是一个非常活跃的研究领域，不断有新概念、新思想和新方法相互交汇融合。随着时间的推移，每个控制工程师都必须掌握这些新方法和新技术。本书致力于为那些既需要掌握传统控制方法又需要更多地掌握现代控制手段的学生提供支持。

在每一个版本中，根轨迹、频率响应及状态变量法都是同等重要的。在第 7 版中，依旧强调扎实掌握一些基本的技术方法，配合使用计算机辅助方法进行精细计算。鉴于数字控制器在控制领域中所扮演的重要角色，第 7 版还介绍了数据采样和离散控制器。虽然为节省时间，即使跳过这一部分内容并不影响本书的连贯性，但我们认为有必要让学生了解计算机控制方法是广泛应用的，并且绝大多数基本的计算机控制技术都很容易掌握。

- **挑战 3：学生需要处理大量信息。**

现在大部分的系统都会使用反馈控制，而且可用来解决控制系统问题的方法也越来越多，这意味着学习反馈控制理论的学生必须了解更多的新想法。学生们该如何在钻研冗长

且复杂的教科书内容时依旧保持清晰的思路？如何能够辨认重点并得出合适的结论？如何复习考试？帮助学生完成这些任务既是第 4、5、6 版的准则，同样也是第 7 版的立足点。

- **挑战 4：反馈控制专业的学生要博学多才。**

由于反馈控制可应用到任何可能的工程系统中，所以反馈控制是一个交叉学科领域。因此，一些学校在普通的学科中都单独开设了控制导论方面的课程，还有一些学校，比如斯坦福大学，开设了一系列可供许多学科的学生学习的课程。然而，把例子限制在某个领域内就无法全面认识反馈控制的应用范围及能力，但要想覆盖所有的应用领域也是十分困难的。本书将介绍该专业的跨学科性质，并提供几种最常用技术的复习材料，以使各个学科的学生可以顺利掌握本书内容。对于电气工程专业的学生来说，他们具有扎实的变换分析基础，所以在第 2 章介绍如何写出反映力学机理的运动方程的内容。考虑到机械工程师的需求，第 3 章回顾了控制所需的拉普拉斯变换和动态响应的内容。除此之外，我们还简要介绍了一些其他技术，有时，我们给出某个物理系统的运动方程而不给出其推导过程，但会用充分的物理描述从响应的角度帮助我们理解该方程。本书给出了一些物理系统的实例，包括计算机硬盘驱动器的读/写磁头系统、卫星跟踪系统、汽车发动机中空燃比系统及飞机自动驾驶系统。

本书概述

本书分为 10 章和 3 个附录。每章的最后都包含一些用三角图标(△)标注的可供选读的前沿内容或用于丰富内容的资料。基于这些资料的一些例子和习题也用三角图标(△)标注。在网站上，会有 4 个完整的附录和在大部分章节中用作补充材料的附录。纸质版本的附录包含拉普拉斯变换表、每章结尾复习题的答案和 Matlab 指令清单。网站上的附录包含复变函数回顾、矩阵论回顾、关于状态空间设计的重要结论和支撑或扩充某些章节的选读材料。

第 1 章介绍了反馈的基本思想和一些关键的设计问题。还简单介绍了控制理论的发展简史，包括从经典过程控制的出现到飞行控制和电子反馈放大器。希望发展简史能够给出该领域的来龙去脉，并且介绍一些在该领域发展过程中做出突出贡献的关键人物，借此来提供学生学习的动力。

第 2 章对动态模型进行了一个简短的介绍，包括机械、电气、机电一体化、流体力学及热力学等装置的动态模型。这部分内容可忽略，仅用做课后复习材料来为不同层次的学生扫除学习中的障碍，或根据学生的需要扩展其深度。

第 3 章介绍了控制领域中常碰到的动态响应。对于电气工程专业的学生来说，该章的大部分内容可能已经学过了。但对很多学生而言，极点位置与暂态响应之间的关系、附加零极点对动态响应的影响，均是新内容。该章也介绍了动态系统的稳定性。这些内容需要认真掌握。

第 4 章介绍了反馈的基本方程和反馈传递函数以及灵敏度函数的定义。运用这些工具，可以对比分析开环控制和闭环控制与抑制扰动、跟踪精度和模型误差灵敏度间的关系，同时根据系统跟踪多项式参考信号或者抑制多项式扰动的能力来对系统进行分类。最后，介绍了经典 PID 控制结构，并探讨了控制器参数对系统特征方程的影响以及 PID 的整定方法。

在第 4 章的反馈综述后，第 5 章、第 6 章和第 7 章是本书的核心，其中分别介绍了基于根轨迹、频率响应和状态变量反馈的设计方法。

第 8 章介绍了应用数字计算机实现反馈控制系统设计所需的工具。然而，要想全面掌握用数字计算机实现反馈控制的方法，读者可参阅相关的书籍——由富兰克林(Franklin)、鲍威尔(Powell)和沃尔克曼(Workman)编著，1998 年 Ellis-Kagle 出版的《Digital Control of Dynamic Systems》。

第 9 章的非线性内容，包括非线性运动方程的线性化技术，可变增益的零记忆非线性

变换分析，描述函数的频率响应、相平面、李雅普诺夫(Lyapunov)稳定性理论以及圆稳定性判据。

第10章将三种基本设计方法相结合用于几个案例研究。提出了一个设计框架，以处理现实世界中的实际控制设计问题。

课程设置

本书的内容可以灵活使用。大多数控制专业的学生会有一些动力学和拉普拉斯变换的基础。因此，对这些学生而言，第2章和第3章的大部分内容可作为复习材料。在一个10周的学季(quarter)内，可以复习第3章，掌握第1、4、5、6章的所有内容。大部分选修章节应当忽略。在第二个学季，可掌握包括选修部分在内的第7章和第9章的内容。也可以忽略一些选修的内容，选择第8章的部分内容。一个半学年的课程可以涵盖第1～7章的内容，需要的话，还可以包括第2章和第3章中回顾部分的内容。如果掌握这些核心内容后时间还有剩余，可以将第8章中介绍数字控制的内容，第9章中选择性的非线性问题，以及第10章中的若干实例研究包含进来。

整本书也可以按连续的三个学季来使用，包括系统建模和动态响应(第2章和第3章)、经典控制理论(第4～6章)和现代控制理论(第7～10章)。

斯坦福大学为没有上过控制理论课的高年级本科生和一年级研究生讲授两个10周的基础课程，大多数学生来自航空航天系、机械工程系和电气工程系。第一个课程回顾第2章和第3章，并学习第4～6章的内容。更高级的课程是为研究生开设的，回顾第4～6章的内容，掌握第7～10章的内容。这一系列课程补充了线性系统的研究生课程，也是学习数字控制、非线性控制、最优控制、飞行控制以及智能产品设计等课程的前提。一些后续的课程还包括大量的实验室实验。学习这一系列课程的必备知识包括动力学或电路分析和拉普拉斯变换。

学习反馈控制课程的必备知识

本书可作为所有工程专业高年级学生第一门课程的教材。重点章节为第4～7章，需要预先掌握建模及动态响应的知识。很多学习这门课程的学生都具有足够多的背景知识，这些知识是从以前学习的物理、电路及动态响应等课程中获得的。对于那些需要复习这部分内容的学生，可阅读第2章和第3章。

必须具有一定的矩阵代数的基本知识才能掌握有关状态空间的内容。虽然很多学生将在后续的数学课上学习这些知识，我们仍然在 www.fpe7e.com 附录WB中回顾了一些基本关系式，在第7章的开头部分简要地介绍了控制中需要的一些特定内容。重点内容为线性动态系统与线性代数之间的关系。

补充

前面提到的网站包含纸质版中生成所有 Matlab 图形所需的 .m 和 .mdl 文件，根据需要，学生可以复制、使用这些文件。网站中还包含一些更高级的学习材料和目录中所列的附录。

致谢

最后，我们向所有为反馈控制领域做出贡献的人表示衷心的感谢，是他们推动反馈控制领域发展到今天这样令人振奋的局面，特别是我们的学生和同事，我们从他们那里得到了重要的帮助和启示。尤其是与下面这些人的讨论也让我们受益匪浅，他们曾在斯坦福大学教授控制导论课：A. E. Bryson、R. H. Cannon、D. B. DeBra、S. Rock、S. Boyd、C. Tomlin、P. Enge、A. Okamura 以及 C. Gerdes 教授。其他帮助过我们的同事包括 D. Fraser、N. C. Emami、B. Silver、M. Dorfman、D. Brennan、K. Rudie、L. Pao、F. Khorrami、K. Lorell、M. Tischler、D. de Roover 和 P. D. Mathur 教授。

特别感谢为我们教材提供复习题参考答案的众多学生。

向 Gene Franklin 致敬

我们非常悲伤地告诉大家 Gene Franklin 教授在 2012 年 8 月 9 日逝世。他参与了第 7 版最初的规划工作并且重新编写了第 3 章的部分内容。Gene 是一位导师、教师、顾问，也是我们大家的好朋友。我们也非常荣幸能成为他的朋友。为了合作编写这部教材，在过去 28 年多的时间里，我们进行过许多次讨论，每一次的讨论都是相当友好和愉快的。多年来，我们每个人都就如何在书中阐述各种问题表达过不同的意见，但我们总能以友好合作的方式将所有观点涵盖到课本中。我们在 Gene 的研究生课程中学习了控制，从他的指导中获益：当时我们一人刚刚成为副教授，而另一个为博士生。总的来说，我们用了 40 年的时间进行合作研究，创建新课程和实验室，并写了两本书。Gene 总是面带微笑，愉快地工作。我们失去了一位亲爱的朋友和同事。Gene 是真正的绅士。

J. D. P
A. E. -N
加利福尼亚州斯坦福大学

目　录

第1章 反馈控制的概述与简史

反馈控制介绍

动态系统反馈控制是一个非常古老的概念，随着时间的推移其具备许多特性。其中心思想是通过测量动态系统的输出并反馈给某种形式的控制器，用于影响系统。反馈系统存在以下几种变化形式。

通过人来操纵机器运行的控制系统称为*手动控制系统*，例如，驾驶一辆汽车。只含有机器的控制系统称为*自动控制系统*，例如，利用恒温器来调节房间温度。抑制未知干扰来保持系统输出稳定的装置称为*调节器*，而设计系统用于跟踪一个参考信号称为*跟踪*或*伺服系统*。控制系统也可以根据计算控制作用的信息进行分类，如果控制器在计算控制作用时没有利用被控系统的输出的测量值，那么这个系统称为*开环控制系统*；如果对系统的输出信号进行测量，并反馈用于计算控制作用，则这个系统称为*闭环控制*或*反馈控制系统*。除了这些最基本的特性外，控制系统还存在着许多其他的重要特性。例如，我们主要考虑反馈当前时刻的测量信息，而不是未来的预测信息。然而，通过一个非常熟悉的例子可以说明这种假设所带来的局限性。当驾驶一辆汽车时，利用简单的反馈就相当于在浓雾中驾驶，只能看清车前面的一小段路，而看不清更远的位置。能利用前方路况信息的控制属于预测控制的范畴，这些信息显然有用，在可获得时要加以利用；然而，在本书所研究的大部分自动控制情况中，是无法观测到未来轨迹或干扰的。另外，控制设计者应该研究这个过程，看是否存在某些信息能够对跟踪的轨迹或所需抑制的干扰进行预测。若有这样的可能性，则设计者可以利用它来提供给控制系统一个超前的前馈作用。发电厂的锅炉的蒸汽压力控制就是一个实例。我们每天对电的需求已知，因此，电功率需求将要增加的信息可前馈到锅炉控制器来预测所需增加的蒸汽流量。

1

反馈控制的应用从没有像今天这样活跃。防碰撞自动着陆系统的利用以及未来卫星导航技术的应用，为我们具备在越来越拥挤的太空航行的能力带来一次大的变革。在计算机硬盘的磁性数据存储装置中，对读/写磁头的控制通常可达到微米数量级的跟踪误差，且运行速度可达到毫秒数量级。从手机到大型喷气式飞机，从洗衣机到如同小城一样大的炼油厂，控制对于系统的运行都是至关重要的。控制也应用于新兴的无人驾驶汽车和外科手术机器人系统等方面。这样的例子不胜枚举。实际上，许多工程师把此类控制称为隐式技术，因为许多控制装置和系统很重要而不能直观看到。毫无疑问，未来将看到工程师们创造出更富想象力的反馈控制。

章节概述

本章首先用恒温器控制家用壁炉这一个简单熟悉的例子开启反馈控制的探索之旅。通过这个例子，可以了解控制系统的基本组成。在1.2节中的另一个例子——汽车巡航控制中，我们忽略系统动态，推导出基本静态方程，并给系统模型的各参数赋值，进而对开环控制和反馈控制的性能进行比较分析。然后，1.3节将介绍控制系统设计的关键要素。1.4节将会介绍控制理论和设计的简史，以便了解本书的研究内容和发展状况。另外，后续各章都有介绍该章主题简史的小节。最后，1.5节简要概述全书的内容和组织结构。

2

1.1　一个简单的反馈系统

反馈系统中的被控变量如温度或速度，通过传感器测量并将测量的信息反馈给控制器去影响这些被控变量。下面用恒温器控制家用壁炉这样一个常见的系统来简单说明这一原理，图 1.1 显示了系统的组成单元、各部分的连接，以及信息从一个部分到另一个部分的流向。

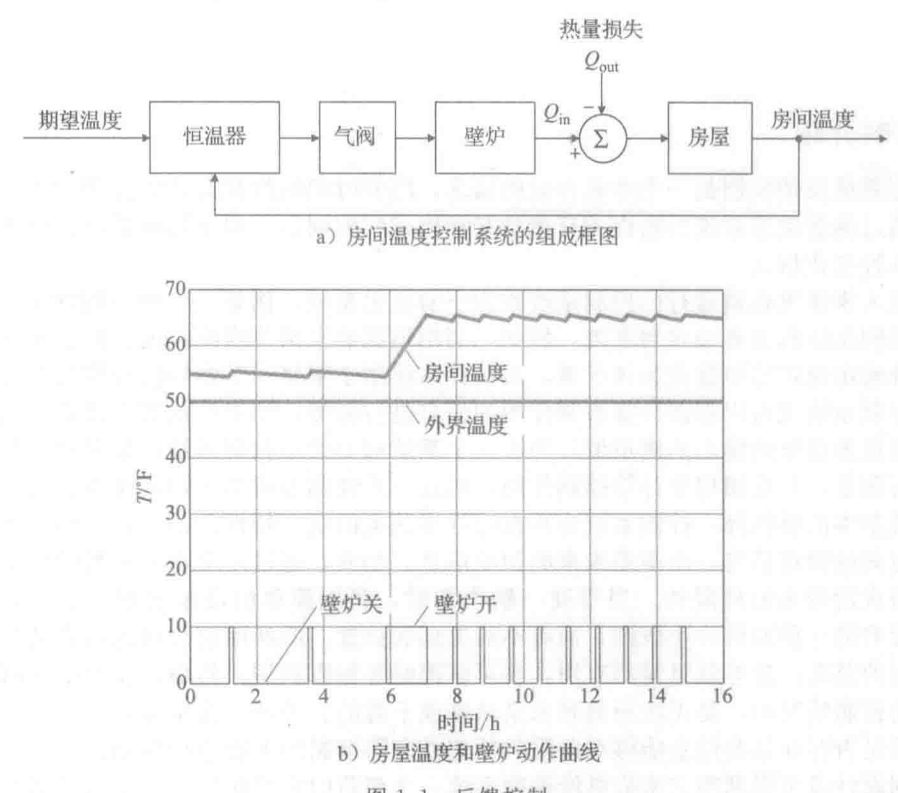


图 1.1　反馈控制

从图 1.1 中，我们很容易分析这个系统的工作过程。当系统工作时，假设恒温器所在房间的温度和外界的温度都明显低于参考温度(也叫设定值)，则恒温器就会开始工作，控制逻辑打开气阀，点燃壁炉，此时房屋吸收热量 Q_{in} 的速率明显高于损失热量 Q_{out} 的速率。因此，房间的温度上升，当上升到稍高于恒温器的设定值时，壁炉熄灭，房间的温度开始朝着外界温度值下降。当下降到略低于设定值时，恒温器又开始工作，并且不断重复这个循环。房间温度随着壁炉不断循环开关变化的曲线如图 1.1 所示。外界温度保持在 50℉[㊀]，恒温器的初始值设定为 55℉，在上午 6 点时跃变到 65℉，壁炉工作使温度上升到该值，此后温度如图 1.1 所示做周期变化[㊁]。由于房屋的隔热性良好，所以在图中我们注意到温度随壁炉熄灭下降的速度要比随点燃壁炉而上升的速度慢。从这个例子中，我们可知反馈的基本组成如图 1.2 所示。

这个反馈系统的核心部分是过程，它的输出就是被控量。在上面的例子中，过程就是房屋，它的输出就是房屋的温度，过程的干扰是通过墙壁、屋顶与较低的外界温度之间的热传导而导致的房屋热量损失 Q_{out}(向外流动的热量也取决于其他因素如风、开门等)。过程的设计对控制的效果有很大影响。比如，一个装有双层隔热玻璃窗的隔热性好的房屋比

㊀ $\frac{\theta}{℉}=\frac{9}{5}\frac{t}{℃}+32$，其中 t 表示摄氏温度(℃)，θ 表示华氏温度(℉)。

㊁ 注意壁炉根据规定的夜间时刻表在早上 6 点前已经工作了几分钟。

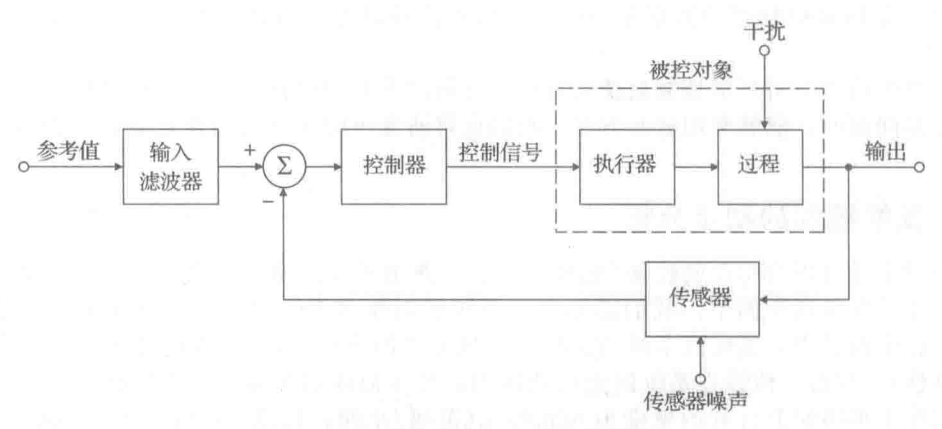


图 1.2 基本反馈控制的组成框图

其他房屋的温度容易控制。同样，想象中的具有控制能力的飞行器的设计与最终实现的性能有着天壤之别。通常，越早把控制问题引入到过程设计中得到的效果越好。执行器就是能够在过程中影响被控变量的装置，在上例中，燃气炉是执行器。实际上，壁炉通常设有喷射打火或点火机构、气阀、鼓风机，它们的开关动作取决于壁炉内的空气温度。这些细节说明了许多反馈系统由各个部分组成，而这些组成部分本身可能是另一个反馈系统[㊀]。执行器的核心问题是具有以满足要求的速度和范围快速改变过程输出的能力。壁炉必须能够提供比最坏的天气损失的热量更多的热量，而且能够快速散发，以使房屋的温度波动保持在一个小范围内。这时，功率、速度和可靠性比精度更重要。通常，过程与执行器紧密相连，控制设计的核心是要找到一个合适的输入或控制信号发送给执行器。过程和执行器组合在一起的部分称为被控对象，用来准确求解要求的控制信号的装置称为控制器。由于电信号处理的灵活性，虽然基于空气压缩的气压控制器在过程控制中起到重要作用，但控制器主要处理的是电信号。随着数字技术的发展，以及各领域控制器需求的日益增加，高性价比及高灵活性使得数字信号处理器占据主导地位。图 1.1 中标注的恒温器用来测量房间的温度，在图 1.2 中称为传感器，它的输出不可避免地含有传感器噪声。传感器的选择和布局在控制设计中非常重要，因为有时候被控量的真实值和测量值不可能完全相同。例如，虽然我们希望控制房屋的整体温度，但恒温器安放在一个特定的房间，这就有可能与其他房间的温度不同。例如，恒温器被设置为 68℉，但是被放在附近有壁炉的客厅里时，正在其他地方学习的人可能还会感觉到冷[㊁][㊂]。正如我们看到的，除了布局之外，传感器重要的特性还包括测量的精度、低噪声、可靠性以及线性性能等。传感器通常将物理变量转变成电信号后输入给控制器处理。一般的系统还包括一个输入滤波器，它的作用是将参考信号转变成电信号后再由控制器处理，在某些情况下，输入滤波器可以修改参考指令输入以改善系统响应。最后，系统中还有一个控制器，通过计算参考信号和传感器输出之间的差值，将系统误差输入给控制器。墙上的恒温器包括传感器、输入滤波器和控制器。几十年前，用户通过手动设置恒温器来保持房间温度。在过去的几十年间，加入微型计算机的恒温器能够存储超过一天、一周甚至更久的期望温度，恒温器获得了学

3 ~ 5

㊀ Jonathan Swift(1733)这样说过："如博物学家所观察，一个跳蚤的身上还有更小的跳蚤在打它的主意，而后者还有更小的等着它们，如此以至循环。

㊁ 装修房屋的厨房时，把烤箱靠墙放置，恒温器安放在墙的另一面，如果现在是很寒冷的天气，当有人在厨房里做晚餐时，除非重新安放恒温器，否则在其他地方学习的人仍然感觉到冷。

㊂ 故事发生在一个炸药厂，新来的员工要手动控制过程中一个重要部分的温度，他被告知要把读数控制在 300°C 以下，在一次例行巡视中，检察人员意识到这一批材料过热，很危险，并发现这名工人把温度计放在冷水中，使得温度保持在 300°C 以下，他们在爆炸前及时撤离。寓意：有时候自动控制要比手动控制好。

习能力，能够知道期望的温度是多少，并且在某种程度上根据是否有人快要到家来设定温度㊀！

本书将给出分析反馈控制系统的方法，并阐述重要的设计技术。工程师们在应用反馈解决控制问题时，能够利用这些方法。我们也将研究反馈在补偿额外复杂性方面所特有的优点。

1.2　反馈控制的初步分析

通过定量分析汽车巡航控制(见图 1.3)这一熟悉系统的简化模型，来论证反馈控制的优点。为了分析这个例子，我们需要建立系统的数学模型，即各变量之间的定量关系形式。在这个例子中，忽略汽车的动态响应，只考虑稳态行为(在后续的章节里将重点讨论动态特性)。并且，假设在系统的速度范围内，各参数间的关系可近似成线性关系。在测得汽车在水平路面上行驶的速度为 65mile/h(英里/小时，1mile/h＝1.609 344km/h)，且油门角度(控制变量 u)每改变 1°后，就会使速度(输出变量 y)改变 10mile/h，因此图 1.4 所示位于 u 和 y 之间为数值 10 即被控对象的框图。通常，框图是用图形来显示系统的数学关系。通过观察汽车的上下坡运动，发现当坡度变化 1%时，速度变化为 5mile/h，因此在图 1.4 上端框中的数值 0.5 反映了坡度变化 1%产生的效果是油门角度变化 1°所产生效果的一半。速度计可精确到 0.1mile/h，则认为它是精确的。在框图中，连接线代表传输信号，方框类似一个理想放大器，框中数值乘以输入信号就能得到其输出信号。对于两个或两个以上信号的求和，则把这些信号线同时指向一个求和器，求和器用中间带有求和符号∑的圆圈表示，箭头边标注的代数符号(加或减)表示总的输出是加上或者减去这个输入信号。根据这些分析，当参考速度设定为 65mile/h 时，比较 1%的坡度变化在有无反馈给控制器的两种情况下对输出速度的影响。

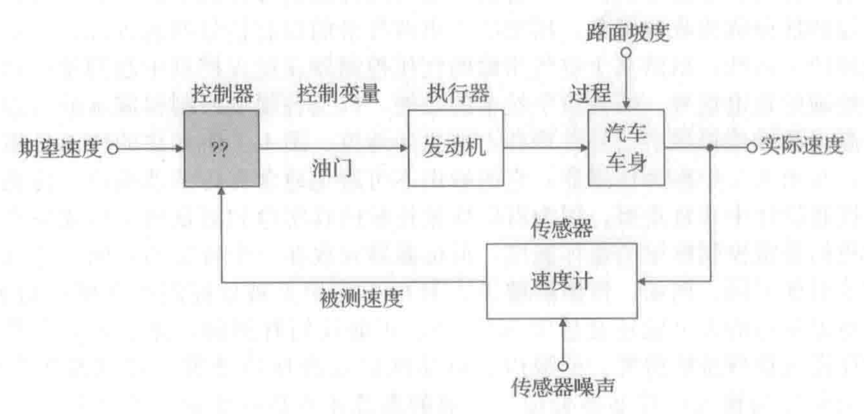


图 1.3　汽车巡航控制框图

首先讨论第一种情况，如图 1.5 所示，控制器没有使用速度计的读数而是设置为 $u=r/10$，其中，$r=65$mile/h 为参考速度，这是一个**开环控制**系统的例子。开环就是指在框图中没有信号环绕的封闭路径或回路，也就是说，控制变量 u 与输出变量 y 无关。在这个简单的例子中，开环输出速度 y_{ol} 为

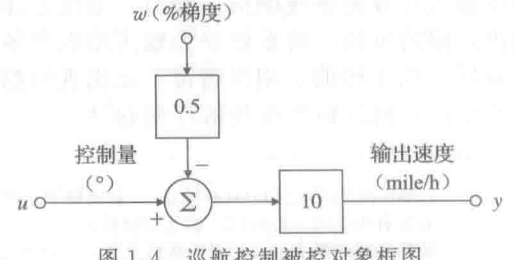


图 1.4　巡航控制被控对象框图

㊀ 传感器通过一个动作感应来确定是否有人在家，用户可以通过网络来控制相应的单元。最近刚被谷歌收购的 Nest 就是一个例子。详情见：www.nest.com。

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{ol}} &= 10(u-0.5w)\\
&= 10\left(\frac{r}{10}-0.5w\right)\\
&= r-5w
\end{aligned}
$$

速度输出误差为

$$e_{\mathrm{ol}} = r - y_{\mathrm{ol}} \tag{1.1}$$

$$= 5w \tag{1.2}$$

百分比误差为

$$误差百分比 = 500\,\frac{w}{r} \tag{1.3}$$

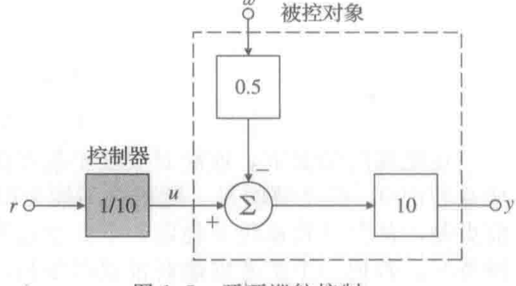


图 1.5 开环巡航控制

如果 $r=65\mathrm{mile/h}$ 且路面是水平的，那么 $w=0$，且速度就为 65mile/h，即没有误差。然而，如果 $w=1$，相当于存在1%的坡度，则速度为60mile/h，且存在5mile/h的误差，此时速度百分比误差为7.69%。当坡度为2%时，速度误差为10mile/h，百分比误差为15.38%，以此类推。这个例子表明当 $w=0$ 时没有误差，但是这样的结果取决于控制器增益是被控对象增益的1/10。实际上，被控对象的增益是变化的，并且如果它变化，误差便会随即产生。在开环控制中，如果被控对象增益存在误差，则速度百分比误差就会等于被控对象增益百分比误差。

反馈设计框图如图1.6所示，其中控制器的增益设为10。在这个简单的例子中，假设有一个理想的传感器提供的测量值为 y_{cl}，此时的方程如下：

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{cl}} &= 10u-5w\\
u &= 10(r-y_{\mathrm{cl}})
\end{aligned}
$$

图 1.6 闭环巡航控制

合并得：

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{cl}} &= 100r-100y_{\mathrm{cl}}-5w\\
101y_{\mathrm{cl}} &= 100r-5w\\
y_{\mathrm{cl}} &= \frac{100}{101}r-\frac{5}{101}w\\
e_{\mathrm{cl}} &= \frac{r}{101}+\frac{5w}{101}
\end{aligned}
$$

由此可见，与开环系统相比，反馈降低了速度误差对坡度的灵敏性，是开环系统的 $\frac{1}{101}$。然而，值得注意的是在水平地面上也会产生一个小的速度误差，因为，即使当 $w=0$ 时，

$$y_{\mathrm{cl}} = \frac{100}{101}r = 0.99r$$

只要回路增益(被控对象与控制器增益的乘积)足够大，这个误差就会很小[⊖]。如果速度参考值为65mile/h，与1%的坡度比较，则输出速度百分比误差为

$$误差百分比 = 100\frac{\frac{65\times 100}{101}-\left(\frac{65\times 100}{101}-\frac{5}{101}\right)}{\frac{65\times 100}{101}} \quad (1.4)$$

$$= 100\frac{5\times 101}{101\times 65\times 100} \quad (1.5)$$

$$= 0.0769\% \quad (1.6)$$

在反馈的情况下，速度对坡度干扰和被控对象增益的灵敏性之所以减少，是由于回路增益为100。但遗憾的是，此增益不能无限增大；当引入动态时，反馈系统的响应会比以前更差，甚至导致系统不稳定。下面通过另一个熟悉且容易改变反馈增益的例子来说明这种情况。若把一个扩音器增益设置得很高，就会发出令人厌烦的尖细的声音，这是由于从演讲者到传声器经放大器再反馈到演讲者这一反馈增益太大所引起的。在不使系统失稳的情况下，如何获得尽可能大的增益，以减小误差是反馈控制设计的关键问题。

6
~
9

1.3 反馈系统的基本问题

为了实现良好的控制需要满足以下典型控制目标。

- 稳定性：在任何时候系统都必须是稳定的，这是绝对必要的要求。
- 跟踪性：系统的输出必须尽可能地接近跟踪指令参考信号。
- 干扰抑制：系统输出必须对干扰输入尽可能地不敏感。
- 鲁棒性：即使在设计中所使用的模型不完全精确或物理系统的动态会随着时间的推移而变化，以上的控制目标也能满足。

稳定性的要求是基本的，导致系统不稳定的原因有两个。第一，被控系统可能是不稳定的，例如，只要控制关闭就会翻倒的Segway车。不稳定的第二个可能的原因是引入了反馈！这种不稳定被称为“恶性循环”，循环中的信号反馈回去会使情况更糟而不是更好。稳定性问题将会在第3章和第4章中详细讨论。

这里有许多要求系统输出跟踪指令信号的例子。例如，在开车时让车保持在行车线内就是指令跟踪。如今，这个工作是通过司机完成的，不过，目前也有“汽车自动驾驶”的方案正在开发，汽车自动驾驶将利用反馈控制来完成这项任务，而司机可以做其他事情，如上网。同样地，在驾驶飞机接近地面着陆时，要求飞行员或自动驾驶仪精确地跟踪滑行跑道。目前，通常由飞机自动驾驶仪来完成这项工作，包括火箭的实际着陆，自动驾驶仪接收来自仪表着陆系统(ILS)的输入，其显示了期望着陆轨迹的电信号，然后向飞机的控制界面发出指令，使之尽可能接近跟随期望的轨迹。

干扰抑制是反馈控制最早的应用之一。在此情况下，“指令”只是一个使得输出随着环境变化而保持常数的设定点。房间的恒温器就是一个非常常见的例子，恒温器的工作就是在外界的温度和风速变化以及开关门窗的时候，保持室内温度接近设定点。

最后，为了设计动态系统的控制器，除了最简单的情况外，建立被控系统的动态响应的数学模型是必要的。但是，几乎所有的物理系统都非常复杂，而且通常是非线性的。因此，控制器的设计通常是基于一个简化模型，并且必须是足够鲁棒的，以使系统能够满足在应用到实际设备时的性能要求。此外，随着时间、环境以及系统动态的变化，即使是最理想的模型也会有误差。再者，对于这些不可避免的变化，控制器的设计必须不能过于敏感，而且任何情况下必须运行良好。

10

⊖ 如果误差太大，通常的做法是重置参考值，如果达到$\frac{101}{100}r$，则输出达到期望值。

随着时间发展，那些可被控制工程师用于设计并建立反馈控制系统的工具逐步形成。由于数字计算机可用于辅助计算和嵌入式控制，其发展尤其重要。作为计算设备，计算机已经能够允许识别越来越复杂的模型和应用非常复杂的控制设计方法。另外，作为嵌入式设备，数字控制器允许执行非常复杂的控制规则。控制工程师不但要熟练地使用这些设计工具，而且需要理解这些工具背后的概念，以便能够充分地利用它们。同样重要的是，控制工程师要理解所用控制器设备的功能和局限性。

1.4 简史

利用反馈对系统进行控制具有多彩的历史，Mayr(1970)曾编写了有关反馈控制的早期趣史著作，书中描述了古代机械控制。最早的两个实例是调节水龙头控制水的流速和酒容器的液位控制，即无论从中倒出多少杯，容器液位都保持不变。流体的流量控制也可以通过控制液位来实现，因为当一个小孔上的液位高度恒定，也就是对孔的压力恒定时，通过小孔的流速就恒定。用于液位控制的浮阀调节装置虽然发明于古代，但今天仍在使用(例如，普通抽水马桶的水箱)。随着液位下降，浮子下降，此时水就可以流入水箱，水箱液位升高，随着液位上升，流量减小，当浮子上升到一定高度时就会切断水源。浮阀的工作原理如图 1.7所示。可以看到这里传感器和执行器不是独立的，而是浮子-供水管的组合。

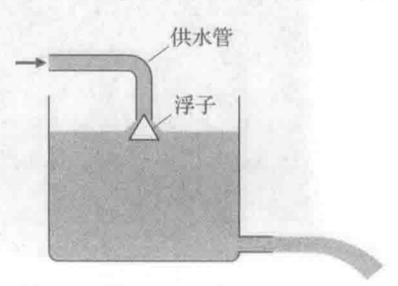


图 1.7 早期的液位和流量控制

11

Mayr(1970)描述的最近发明是由科内利斯·德雷贝尔(Cornelis Drebbel)大约在 1620 年设计的通过控制壁炉温度来给一个培养箱加热[⊖](见图 1.8)的系统。壁炉由一个供火箱和一个顶部装有气阀的烟道组成，火箱的内部是双层的培养箱，中间层盛有水，把热量均匀地传递给培养箱。温度传感器是一个内部装有酒精和水银的玻璃容器，放置在培养箱周围夹层的水溶液中。当用火给箱子和水加热时，酒精膨胀，上升杆浮起，烟道上的气阀下降，从而减少热气量的进入。当箱子温度太低时，则酒精冷缩，气阀打开，火燃烧得更旺，温度升高。期望的温度由上升杆的长度设定，通过酒精的热胀冷缩来控制气阀的开度。

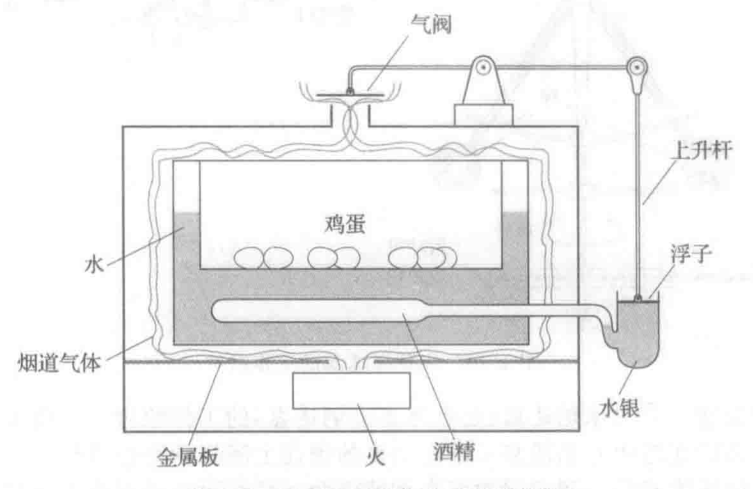


图 1.8 德雷贝尔孵化小鸡的培养箱

载入控制系统编年史的一个著名的问题是研究控制轴转速的方法。风力磨粉机中要求

⊖ 100 多年前，法国医生引进培养箱来培养早产儿。

的自动控制磨石的转速问题对这个领域的早期研究工作(Fuller，1976)起到了巨大的推动作用。曾经尝试过许多测量方法，其中最有效的一种方法是使用锥形摆或飞球调速器来测量磨粉机的转速，驱动风机的翼通过绳子和滑轮像窗帘一样被卷起或放下来保持固定的转速。然而，大约 1788 年，在瓦特(James Watt)实验室把这些原理应用到蒸汽机时，才使得飞球调速器闻名于世。图 1.9所示的为一个早期方案，图 1.10 和图 1.11 所示的分别是飞球调速器的特写镜头和它的组成框架。



图 1.9　早期瓦特蒸汽机的照片
(图片来源：Mary Evans Picture Library/Alamy)



图 1.10　飞球调速器的特写镜头
(图片来源：Washington Imaging/Alamy)

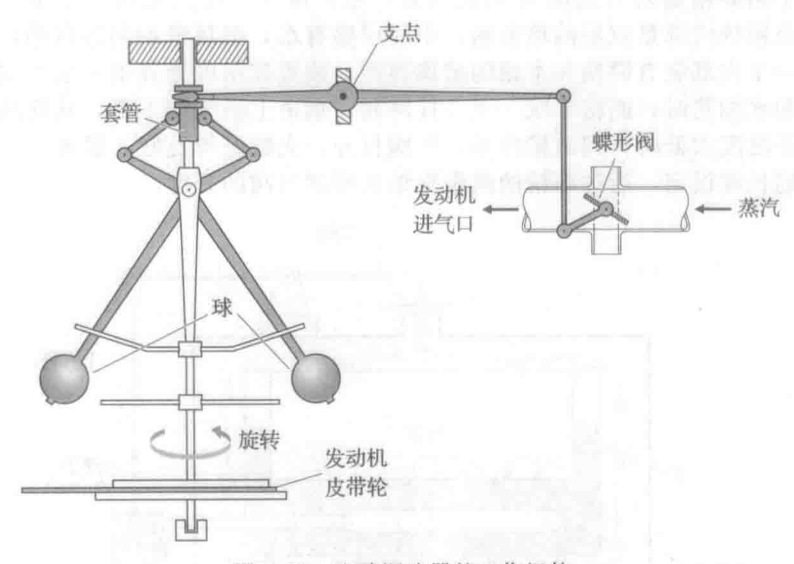


图 1.11　飞球调速器的工作组件

下面简要描述一下飞球调速器(也称为离心调速器)的工作原理。假设发动机运行在平衡状态，两个重球在与中心轴成某一给定角度的锥面上围绕中心轴旋转。突然给发动机加上载荷，则它的速度减慢，调速器的两个重球将会下跌到更小的锥面上旋转。因此，球与中心轴的角度可以通过输出速度来测量。这样，通过杠杆将蒸汽室(执行器)的主阀打开，进入的蒸汽流量增加，以恢复大部分减少的速度。为了使蒸汽阀门保持在一个新的位置，飞球就要以一个不同的速度旋转，这就意味着，带载荷时的转速与以前的完全不相等。正如在之前所述的巡航控制系统中我们所看到的，反馈控制存在一个非常小的误差。为了使

系统恢复到以前的速度，需要通过改变杠杆到阀门之间的杆长，来重新设置期望的速度值。后来，发明者引入了用整合速度误差来完成自动重置的机制。在第 4 章中，我们将分析这样的系统，来说明此整合可以使反馈系统在恒定扰动下达到零稳态误差。

因为瓦特是一个实践型的人，类似于以前的技术人员，他没有从事调速器的理论分析。富勒(Fuller，1976)曾追溯控制理论的早期发展，描述了从 1673 年的 C. 惠更斯(Christian Huygens)到 1868 年 J. C. 麦克斯韦(James Clerk Maxwell)这段时期的发展情况。富勒对剑桥大学数学及天文学家 G. B. Airy 教授在 1826 年到 1835 年期间和格林尼治天文台的天文学家 Royal 在 1835 年到 1881 年期间所做的贡献给予了特殊的评价。艾里(Airy)致力于速度控制，如果他的望远镜与地球的旋转方向相反旋转，则可以长时间观察某一恒星。在使用离心摆调速器时，他发现这可能是不稳定运动——“机器(如果我可以这样表达)变得发狂”(富勒，1840 年；富勒，1976 年引用)。据富勒所说，艾里是第一位讨论反馈系统不稳定性的人，也是最先用微分方程分析这种系统的人。这标志着反馈控制动态特性研究的开始。

12~14

关于反馈系统稳定性的首次系统性的研究来自麦克斯韦(1868 年)[1]发表的一篇题为“论调速器”的论文。文中，麦克斯韦推导了调速器的微分方程，并在平衡点附近对其线性化，同时指出系统的稳定性取决于特征方程的根是否具有负实部。麦克斯韦试图推导出一个使所有特征根都具有负实部的多项式的系数条件，但只适用于二阶和三阶情形。确立稳定性判据为 1877 年 Adams 奖的主题，此奖项最终由 E. J. 劳斯(E. J. Routh)获得[2]。他在论文中论述了他的判据，目前，控制工程师们仍运用这一简单判据来分析问题。1927 年 H. S. 布莱克(H. S. Black)于贝尔电话实验室发明了电子反馈放大器，在此之前分析特征方程一直是控制理论的基础。

劳斯的研究成果发表后不久，俄罗斯数学家李雅普诺夫(1892)开始研究运动稳定性问题。他的研究基于非线性运动微分方程，同时也包含符合劳斯判据的线性方程的结论。他的研究是当今控制理论中称为状态变量法的基础，但是直到 1958 年左右才被引入控制类文献中。

有一篇有趣的文章简要描述了反馈放大器的发展，此文是基于伯德(Bode，1960)所做报告，后来由贝尔曼(Bellman)和卡拉巴(Kalaba，1964)编写完成的。电子放大器的出现，使得在第一次世界大战后的几十年里，远程通话成为可能。然而，随着距离的增加，电能的损耗也在增加。为了减小能量损耗，尽管可以使用直径较大的电线或增加放大器的个数，但放大器的个数越多就会导致越大的失真，因为电子管的非线性程度虽小，但用于电子放大器中的非线性程度会成倍增加。为了减少失真，布莱克提出了反馈放大器的设计方法。正如前面提到的汽车巡航系统，我们希望减小的误差(或失真)越多，就需要越多的反馈装置，从执行器到被控对象到传感器再到执行器的回路增益一定会非常大，反馈回路增益的增大又会使系统发出“尖叫”，变得不稳定。这又涉及麦克斯韦-劳斯稳定性问题。此外，在动态特征很复杂时(通常是五十阶微分方程)，劳斯判据不再适用。因此，熟知频率响应和复变量数学的贝尔电话实验室的通信工程师们，开始转向复分析这一工具。1932 年，H. 奈奎斯特(H. Nyquist)发表了一篇论文，描述了如何利用回路频率响应的图形来判断稳定性。根据这一理论，伯德(1945)研究了反馈放大器设计的大量方法，目前仍广泛地应用于反馈控制的设计中。第 6 章将对奈奎斯特图和伯德图进行更详细的讨论。

15

同时，随着反馈放大器的发展，工业过程的反馈控制也逐步标准化。在具有高度复杂

---

[1] 富勒(1976)阐述了麦克斯韦的贡献。

[2] 1854 年，在剑桥大学的课堂上，劳斯首次从学术观点上提出了这个问题，麦克斯韦是第二个提出的。1877 年，麦克斯韦在 Adams 奖委员上选择稳定性问题作为那年的议题。

性，非线性且易受执行器和传感器之间的长时延影响的这些特征的过程中，提出了比例积分微分(PID)控制。PID控制器最初是由(Callender)等人(1936)提出，这是一项在大量试验工作和对系统动态的简单线性逼近基础上而建立的控制技术，这项技术引出了适合于该领域应用的标准试验，并最终得到满意的PID控制器参数“调整”(PID控制器将在第4章介绍)。当时航空器的导航和控制设备也处于研制过程中，特别是用于测量航空器高度和速度的传感器得到了进一步的发展。姆·鲁尔(McRuer，1973)对控制领域的这一分支进行了论述。

第二次世界大战期间，反馈控制领域得到了一次巨大的推动。美国MIT辐射实验室的工程师和数学家们将他们的知识与伯德反馈放大器理论、PID过程控制以及Wiener(1930)提出的随机过程理论相结合，使得伺服机构的一系列设计技术得以发展，后来被称为控制机制。詹姆斯(James)等人(1947)将此大量工作收集并记录在辐射实验室的记录中。

控制系统设计的另一个方法是由从事航空器导航和控制工作的W.R.埃文斯(W.R.Evans)于1948年提出的。他所涉及的许多问题都是关于不稳定或中立稳定的动态系统，使用频率法很难处理这类系统，因此，他建议重新基于70年前麦克斯韦和劳斯的工作去研究特征方程。后来，埃文斯提出了根据某一参数变化时，由特征方程的根轨迹来分析问题的方法和规则，这就是所谓的根轨迹法，它不仅适用于系统的设计也可用于稳定性分析，目前仍是一种重要的技术。Evans提出的根轨迹法将在第5章中进行介绍。

20世纪50年代期间，包括美国的贝尔曼、卡尔曼(R.E.Kalman)和前苏联的L.S.庞特里雅金(L.S.Pontryagin)等几位专家，又开始考虑用常微分方程(ODE)作为控制系统的模型。人造地球卫星这一新的控制领域大大促进了这项工作的研究，这里常微分方程是列写模型的自然形式，数字计算机为这项工作提供了很大的帮助，它能实现10年前不可想象的计算量(当然现在任何一名工程专业的学生用便携式电脑都能完成)。大约就在此时，李雅普诺夫的研究工作被翻译成控制术语，第二次世界大战期间维纳和飞利浦(Phillips)开始最优控制的研究，并扩展到基于变分法的非线性系统的优化轨迹问题。

16

1960年，在莫斯科举行的新成立的国际自动控制联合会第一次会议上发表了这项研究工作㊀。这项工作不是利用频率响应或特征方程，而是以“标准”或“状态”的形式直接应用常微分方程，并且大量使用计算机。虽然常微分方程(ODE)的研究始于19世纪后期，但是常被称为现代控制理论，它区别于利用伯德和其他人的拉普拉斯变换及复变量法的经典控制理论。从20世纪70年代至今，我们一直在探索每种方法的最佳特性。

因此，目前控制原理广泛应用各学科领域，包括工程学科的各个分支。一名熟练的控制工程师需要了解所涉及领域的基本的数学理论，而且能够选择适合某一问题的最佳设计方法。由于计算机的普遍使用，工程师能运用自身知识指导和验证计算机的运行结果显得尤为重要㊁。

1.5 本书概述

本书的主要目的是介绍单输入单输出控制系统设计的重要方法。第2章回顾建立被控动态系统的物理模型所必需的技术方法，包括机械、电子、机电和其他一些物理系统的建模方法，第2章也简要描述了非线性模型的线性化，相关内容在第9章中还会进行更深入的讨论。

第3章和附录A将讨论利用拉普拉斯变换以及时间响应和传递函数零极点之间的关系分析动态响应。本章还涉及系统稳定性的关键问题讨论，包括劳斯判据。

㊀ 当Bryson和Denham(1962)表明为了在最小的时间达到一个给定的高度，超音速飞行器的轨迹实际上应该朝某一点俯冲时，最优控制取得了很大的推动。后来，在飞行测试中怀有疑虑的飞行员证实了这一非直觉的结论。

㊁ 有关控制史的更多背景知识，请参阅1984年11月和1996年6月发表在IEEE控制系统杂志上的综述文章。

第4章介绍反馈的基本方程和特征。分析反馈对干扰抑制的作用、跟踪精度以及对参数变化的灵敏性和动态响应的影响。介绍基本的PID控制思想。

第5章、第6章和第7章介绍一些设计方法，针对更复杂的动态系统，实现第4章中首次给出的控制目标。这些方法包括根轨迹法、频率响应法和状态变量法。对同一个控制系统可选择不同的方法，每一种方法都有各自的优点和缺点，这些方法从根本上是互补的，要想设计出最有效的控制系统，必须掌握每一种方法。 17

第8章提出了应用数字计算机实现控制器的思想。本章指出如何数字化第4章到第7章提出的控制系统方程，采样如何导致时延从而使系统变得不稳定，以及如何把采样速率设置为系统频率的倍数以获得良好的系统性能。正如拉普拉斯变换处理非采样信号一样，采样系统分析需要另一种分析工具——z变换，本章将会对这一分析工具进行描述并对其使用方法进行说明。

实际中大多数系统在某种程度上都是非线性的。但是，第9章之前大部分分析和设计方法都是针对线性系统的。第9章将说明为什么线性系统的研究是恰当的，为什么即使大多数系统是非线性的，线性系统的设计方法还是有用的，以及如何改进线性系统的设计方法，使之能够处理系统中诸多常见的非线性问题。本章涉及饱和、描述函数、自适应控制以及抗饱和控制器，以及李雅普诺夫稳定性理论的简要介绍。

第10章讨论了各种方法在具有高度复杂性的问题中的应用。同时这些设计方法还用于实际问题中具有代表性的特定案例研究。

当今，控制设计者们大量运用可以通过商业方式获得的计算机辅助控制系统设计软件。而且，学生们可以获得这些计算机辅助由控制系统设计中的大多数指令程序编写的工具软件。为此，使用的最普遍的应用软件是MathWorks公司开发的Matlab和Simulink软件，本书包含了许多Matlab程序来帮助说明这种求解方法，而且许多问题都需要计算机辅助工具来求解。本书中的许多图也都是利用Matlab生成的，它们开发的软件是免费的，可以通过网址http://www.fpe7e.com来获得。请学生和老师们使用这些程序文件，相信有助于学习利用计算机方法来解决控制问题。

显然，还有许多问题本书没有处理。例如，第10章中快速热处理实例研究中部分，我们并没有把控制方法扩展到多变量控制情形，多变量系统是含有多于一个输入和(或)输出的系统。除了第7章的初步介绍之外，本书对于最优控制也没有更详细的论述。

实验测试和实际硬件建模的细节处理也超出了本书范畴，这些是检验设计方法是否真实有效的重要测试。本书之所以集中针对线性对象模型分析和设计线性控制器，不是由于这是设计的最终目的，而是因为这是掌握反馈控制基本思想的最好方法，通常这是达到满意设计的第一步。我们相信掌握本书的内容，将会对建立控制系统的实际物理行为的理解提供基础。扎实的基础能够使我们在前人的工作基础上，建立自己的设计方案。 18

小结

- 控制就是使系统变量达到某一特定值的过程，这一特定值称为参考值。设计系统跟随一个变化的参考信号，称为跟踪控制或伺服系统。设计系统使得干扰不存在时输出保持恒定，称为调节控制或调节器。
- 根据控制所用信息的不同，定义了两种控制类型并通过其导致的结构进行命名。在开环控制中，系统不测量输出信号，没有为使系统输出跟随参考信号而对驱动信号进行修正的过程。在闭环控制中，系统包含用于测量输出的传感器，并可利用测量值的反馈来影响控制变量。
- 一个简单的反馈系统由如下部分组成：过程(或被控对象)，其输出是被控量；执行器，其输出引起过程输出的变化；参考指令信号和用于测量这些信号的输出传感器，以及通过命令执行器计算控制信号来实现逻辑的控制器。
- 框图有助于显示系统结构和控制系统中信息的流动。通常，框图代表了控制系统中各信号之间的数学关系。
- 一个设计良好的反馈控制系统是稳定的、能够

跟踪期望的输入或设定点、抑制干扰，并且对设计所用的数学模型变化不敏感(或鲁棒)的系统。

- 控制理论和设计方法可分为两类：经典控制方法利用拉普拉斯变换(或 z 变换)，是现代控制出现前主要的控制设计方法，而现代控制方法始于 20 世纪 60 年代，它是基于状态形式的常微分方程(ODE)的控制方法。这两类控制方法有许多联系，有经验的工程师必须同时掌握这两种方法。

复习题

1.1 反馈控制系统有哪些主要部分组成？

1.2 传感器的作用是什么？

1.3 列举性能良好的传感器的三个重要特性。

1.4 执行器的作用是什么？

1.5 列举性能良好的执行器的三个重要特性。

1.6 控制器的作用是什么？给出控制器的输入和输出。

1.7 哪些物理量可以通过测速器测量？

1.8 给出测量温度的三种不同的方法。

1.9 为什么不管被测变量的物理属性如何，大多数传感器都有一个电信号输出？

习题

1.1 画出下列反馈控制系统的组成框图。

(a) 汽车手动操作系统；

(b) 德雷贝尔孵化器；

(c) 浮阀水位控制系统；

(d) 带飞球调速器的瓦特蒸汽机。

在每一个系统中，标明下列部件的位置，并指出与每个信号相关的装置。

- 被控过程；
- 过程期望的输出信号；
- 传感器；
- 执行器；
- 执行器输出信号；
- 控制器；
- 控制器输出信号；
- 参考信号；
- 误差信号。

注意，在大多数情况下，同样的物理设备可能实现不同的功能。

1.2 了解你家里或办公室的恒温器的物理原理，并描述它是如何工作的。

1.3 造纸机如图 1.12 所示。在这个反馈控制中有两个主要的参数：一个是由厚板坯浓度控制的纤维密度，厚板坯由板材前箱流到板材上；另一个是烘干机输出的最终成品的湿度，成浆池中的原料通过线材下面的纯净水来稀释，且由控制阀(CV)来控制。用测量仪表来读取浓度值，在机器烘干末端有一个湿度传感器。画出下列两种情况下系统的框图，并注明习题 1.1(d)所列的 9 个部件。

(a) 浓度控制；　(b) 湿度控制。

1.4 人体中的许多变量是根据反馈控制的。画出下列被控变量的框图，标出被控的过程、测量变量的传感器、调节变量增加或减小的执行器、完成反馈路径的信息流向，以及干扰变量的扰动。有关这个问题的知识，需要查阅百科全书和关于人体生理学的教材。

(a) 血压；

(b) 血糖浓度；

(c) 心率；

(d) 眼睛视角；

(e) 瞳孔直径。

1.5 画出冰箱或汽车空调系统中温度控制的组成框图。

1.6 画出电梯位置控制的组成框图。说明如何测量电梯厢的位置。考虑一个粗略和精度结合的测量系统，你建议每一个传感器的精度应为多少？你所设计的系统应能够校正高层建筑中，存在的驾驶室荷载作用导致电缆明显伸缩的情况。

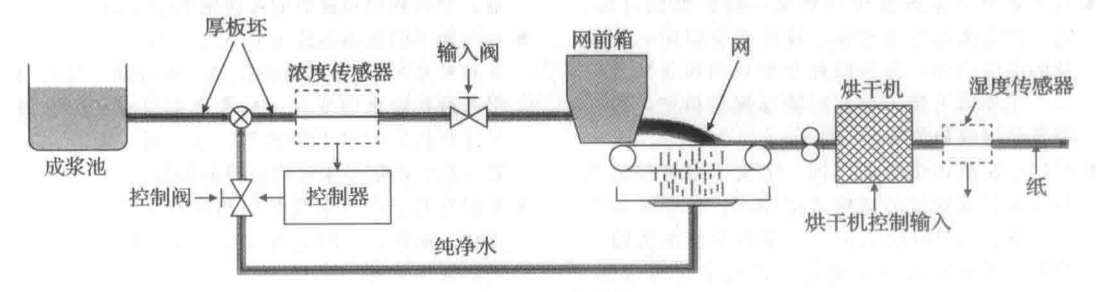


图 1.12　造纸机

1.7 反馈控制要求能测量被控变量，因为电信号可传输、放大且易处理，通常我们希望传感器输出一个与被控变量成比例的电压或电流信号。描述一个传感器，使其输出与下列物理量成比例的输出电信号。

(a) 温度；
(b) 压力；
(c) 液位；
(d) 管道中液体(或动脉中血液)的流量；
(e) 线位移；
(f) 角位移；
(g) 线速度；
(h) 转速；
(i) 平移加速度；
(j) 力矩。

1.8 习题1.7中所列举的每一个变量都可以利用反馈控制。描述一个执行器，要求能够接收一个电信号输入来控制所列的变量。指出执行器输出信号的单元。

1.9 生物学中的反馈，也有正反馈和负反馈

(a) 生物学中的负反馈：当一个人处于长期的压力中(如考试前几周)时，下丘脑(大脑中的)分泌一种激素——促肾上腺皮质激素释放因子(CRF)，它与脑垂体中的受体相结合后刺激脑垂体产生促肾上腺皮质激素(ACTH)，而促肾上腺皮质激素又会反过来刺激肾上腺皮质(肾上腺外层部分)释放压力激素——糖皮质激素(GC)。负反馈作用会通过血液反过来关闭CRF和ACTH的产生(关闭压力反应)直到GC恢复到正常水平。画出这个闭环系统的框图。

(b) 生物学中的正反馈：这会发生在一些特殊的情况下。考虑一个分娩过程，婴儿借助产道施加的压力通过分泌催产素引起子宫收缩，而分泌催产素会引起更大的压力，这反过来又加剧子宫收缩。孩子出生后，系统又会恢复正常(即负反馈情况)。画出这个闭环系统的框图。

20 ~ 22

第2章 动态模型

动态模型介绍

反馈控制的总体目标是不考虑参考变量、外界干扰的影响以及过程动态特性的变化，利用反馈使得动态过程的输出变量准确跟踪所期望的参考量。这个复杂的设计目标由许多简单、明确的步骤构成。建立被控过程的数学描述(称为*动态模型*或*数学模型*)是第一步。控制工程师所采用的模型这个术语就是指描述过程动态特性的一组微分方程。模型可以通过使用基本物理原理建模获得，也可以通过测试设备计算其对输入的响应，利用数据来构造解析模型。本章中我们只关注系统物理原理建模。一些专著使用实验法来确定系统模型，有时称为*系统辨识*，这些建模技术将会在第3章进行简要叙述。通常，严谨的控制系统设计人员至少会依靠一些实验手段来验证基于物理原理而导出的模型的准确性。

在许多情况下，复杂过程的建模既困难又昂贵，尤其还包含建立和测试原型等重要步骤。然而，在本书中，我们只关注最常见物理系统的基本建模原理。希望更细致地了解建模过程的读者，请参考更多综合性的资料和专业性的文章。

在后续章节中，我们将探讨各种处理动态方程的分析方法以及设计反馈控制系统的解决方案。

章节概述

建立动态模型的基本步骤是写出系统的动态方程。通过讨论及列举大量示例，2.1节说明了如何列写各种机械系统的动态方程。另外，这部分还说明了利用Matlab求解简单系统对阶跃输入信号的时间响应曲线。而且，这部分也引入了传递函数和框图的思想及通过Simulink解决问题的思路。

2.2节和2.3节分别介绍了电路和机电系统的建模。

对于想获得更多类型动态系统建模实例的读者，作为选学内容，2.4节扩展讨论了热学和流体系统的建模。

2.5节是本章的最后一节，讨论了从认知探索到现阶段理论体系的发展历程。

建模所提出的微分方程通常是非线性的，因为非线性系统比线性系统更难于求解，且通常线性模型用于控制设计就足够了，所以前面章节主要集中于线性系统模型上。然而，本章也展示了如何线性化简单的非线性，以及如何利用Simulink来数值求解非线性系统的运动。对于线性化的深入讨论和非线性系统的分析将在第9章中给出。

为了集中介绍建立数学模型这一关键的步骤，我们将在第3章介绍求解运动方程的计算方法。

2.1 机械系统动力学

2.1.1 平移运动

对于任意一个机械系统，获得其数学模型或*动态方程*[⊖]的基础是牛顿(Newton)定

⊖ 对于带运动部件的系统，这些方程通常被称为“*运动方程*”。

律，即

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{2.1}$$

24

其中：$\boldsymbol{F}$ 为施加在系统每一部分力的矢量和，单位是牛(N)；$\boldsymbol{a}$ 为物体相对于惯性参考系(也就是相对于地球既不加速也不旋转的参考系)的矢量加速度，通常称为惯性加速度，单位是 m/s^2；m 为物体的质量，单位是 kg。

注意，式(2.1)中，使用了黑体字，按惯例，全文中黑体字就是表示该变量为一个矩阵或矢量，也可能是一个矢量函数。

在国际单位制中，1N 的力相当于对质量为 1kg 的物体产生 $1m/s^2$ 的加速度。物体的“重量”单位是 mg，其中 g 是重力加速度($9.81m/s^2$)，是质量测量的标定尺度。在公制单位中，以 g 作为标定尺度，也就是直接测量质量。

应用这个定律主要涉及定义一个合适的坐标系来描述物体的运动(位置、速度和加速度)，利用受力图确定施加在物体上的所有力，然后由方程(2.1)写出运动方程。在选择好坐标系并表示出物体相对于惯性参考系的位置后，牛顿定律中用到的加速度就是位置坐标的二阶导数，所以整个过程非常简单。

例 2.1 一个简单系统：巡航控制模型

(1) 以速度为变量列写运动方程，如图 2.1 所示，汽车正向行驶，假定发动机的牵引力为 $\boldsymbol{u}$。对微分方程进行拉普拉斯变换，并找到输入 $\boldsymbol{u}$ 和输出 $\boldsymbol{v}$ 之间的传递函数。

(2) 用 Matlab 找出输入在 $t=0$ 时刻由 $u=0$ 跳变到常值 $u=500N$ 后，汽车的速度响应。假设汽车的质量 m 是 1000kg，黏性阻力系数 $b=50N\cdot s/m$。

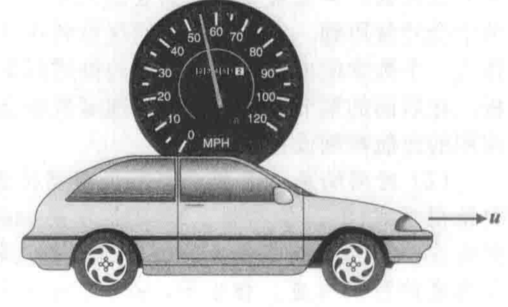


图 2.1 巡航控制模型

解答。

(1) 运动方程：为简单起见，我们假设车轮的旋转惯性可以忽略，阻碍汽车运动的摩擦与车速成正比例，比例关系数为 b[⊖]。为了便于建模，汽车受力图可近似为图 2.2 所示的，图中定义了坐标系，画出了所有作用在物体上的力(粗线)，并且标出了加速度(虚线)。汽车的位置坐标 x 是距选定的参考位置的距离，方向向右为正。由于汽车相对于惯性参考系的位置可以测量，所以容易求得惯性加速度为对于 x 的二阶导数(即 $\boldsymbol{a}=\ddot{x}$)，利用方程(2.1)建立运动方程，摩擦力与物体运动的方向相反；因此，图中画出它的方向与正运动方向相反，在方程(2.1)中有一个反向作用力，结果得

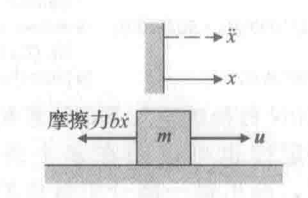


图 2.2 巡航控制受力图

$$u - b\dot{x} = m\ddot{x} \tag{2.2}$$

或

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{u}{m} \tag{2.3}$$

由于是汽车巡航控制，这里感兴趣的变量是速度 $v(=\dot{x})$，其运动方程可变为：

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{u}{m} \tag{2.4}$$

⊖ 如果速度是 v，则空气摩擦力与 v^2 成正比，在这个简单模型中已采取了线性近似。

25～26

我们将在第3章详细介绍如何求解这样的方程；而实际上，假定解的形式为 $v=V_o e^{st}$，输入形式为 $u=U_o e^{st}$，那么 $\dot{v}=sV_o e^{st}$，则微分方程可写为[⊖]

$$\left(s+\frac{b}{m}\right)V_o e^{st}=\frac{1}{m}U_o e^{st} \tag{2.5}$$

消去 e^{st}，整理得

$$\frac{V_o}{U_o}=\frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}} \tag{2.6}$$

通常使用大写字母来表示以强调这是解的变换，或者写成

$$\frac{V(s)}{U(s)}=\frac{\frac{1}{m}}{s+\frac{b}{m}} \tag{2.7}$$

其具体原因，详见第3章。此表达式是由微分方程(2.4)确定的，称为**传递函数**，在后续章节中会经常用到。实质上，我们注意到式(2.7)是把方程(2.4)中的 d/dt 用 s 取代。传递函数作为一个数学模型，将汽车速度与推进汽车的力联系起来，就是说，输入来自汽车的加速踏板。在后面的章节中，系统的传递函数将会被用来设计反馈控制器，例如，现代汽车中大量使用的巡航控制设备。

(2) **时间响应**：系统动态可以根据传递函数写成Matlab语句，如下所示的Matlab语句给出了式(2.7)的实现。Matlab中的step. 函数用于计算单位阶跃输入下的线性系统时间响应。因为系统是线性的，所以某阶跃输入的幅值乘以这种情况下的输出就可以得到任意幅度的阶跃响应。相当于，sys可以与阶跃输入的幅值相乘。

Matlab语句如下：

```
s=tf('s');                      % sets up the mode to define the
                                  transfer function
sys = (1/1000)/(s + 50/1000);   % defines the transfer function from
                                  Eq. (2.7) with the numbers filled in
step(500*sys);                  % plots the step response for u = 500
```

在500N的阶跃输入下，计算并绘制速度的时间响应曲线。阶跃响应如图2.3所示。◀

牛顿定律也可以用在多个质量体的系统中。这时，画出每一部分质量体的受力图相当重要，要求标明所受的外力以及一个物体作用在另一个物体上大小相等、方向相反的内部作用力。

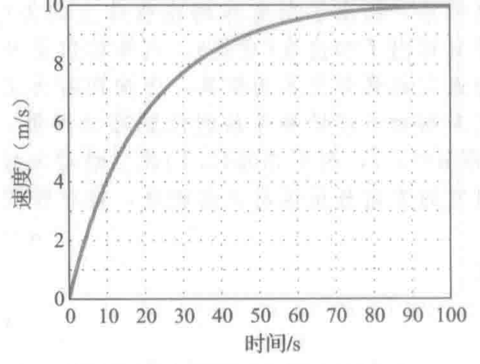


图2.3　阶跃输入 u 下，汽车的速度响应曲线

例2.2　两质量体系统：悬架模型

图2.4所示的为一个汽车悬架系统。假定一个车轮支撑汽车质量的四分之一，且是一维垂直运动，写出汽车和车轮的运动方程。通常取四个车轮之一作为系统，称为**四分之一汽车模型**。该系统可以近似简化为图2.5所示的系统，其中定义了两个弹簧系数和一个阻尼比。假设包含四个车轮的汽车质量为1580kg，每个车轮质量为20kg。直接在汽车上放置一个已知质量的物体并测量汽车的垂直偏移量，可得 $k_s=130\,000\text{N/m}$。同时测量车轮的偏移，

⊖ 1820年前后，Cauchy提出了使用微分算子，这是在18世纪80年代拉普拉斯变换的基础上提出来的。在第3章中，我们将给出如何应用拉普拉斯变换得到传递函数(请参阅Gardner和Barnes于1942年所著文献)。

可得 $k_w=1\ 000\ 000\text{N/m}$。利用图 3.19b 所示的阶跃响应数据，并定量观察汽车的阶跃响应变化，符合 $\zeta=0.7$ 的阻尼比曲线，得到 $b=9800\text{N}\cdot\text{s/m}$。

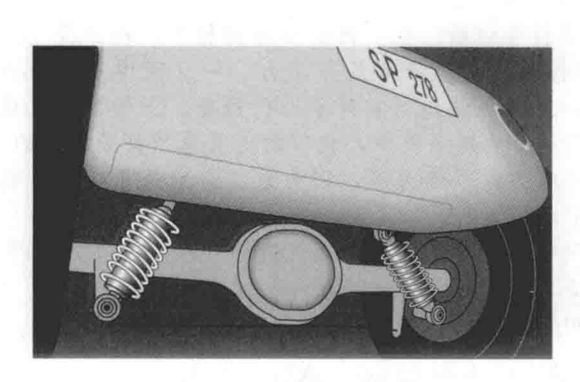


图 2.4 汽车悬架系统图

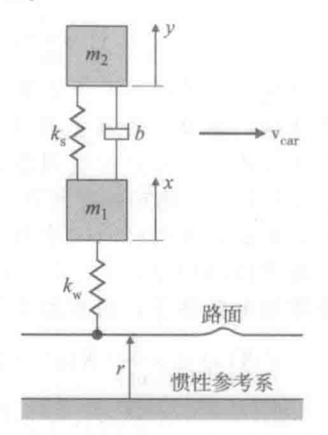


图 2.5 四分之一汽车模型图

27~28

解答。可近似为如图 2.5 所示的简化系统。两质量体坐标分别为 x 和 y，表示相对平衡位置的位移，参考方向如图 2.5 所示。平衡位置是指由于重力而使弹簧处于压缩状态的位置，在示意图中用一个符号⊔代表减振器，摩擦系数为 b。假定减振器产生的力的大小与两质量体相对位移的变化率成正比，也就是 $b(\dot{y}-\dot{x})$。在受力图中本应包括重力，但它的作用效果是产生 x 和 y 的恒定位移，因为所定义的 x 和 y 是距平衡位置的距离，所以不必考虑重力。

汽车悬架系统作用在两质量体的力与它们的相对位移成比例，比例系数是弹簧的劲度系数 k_s。图 2.6所示的为每一个质量体的受力图，可以看到弹簧作用在两物体的力大小相等、方向相反，减振器也是如此。如果质量体 m_2 有一个正的位移 y，则弹簧 k_s 作用在 m_2 上的力和作用在 m_1 上的力的方向如图所示。然而，当质量体 m_1 有一个正的位移 x 时，则弹簧 k_s 作用在 m_1 上的力的方向与图 2.6 所画出的方向是相反的，弹力中 x 项为负证实了这一点。

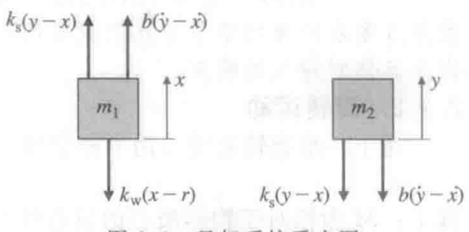


图 2.6 悬架系统受力图

位于下面的弹簧 k_w 表示轮胎的可压缩性，该轮胎不能提供模型中缓冲器所要求的阻尼(和速度有关的力)。该弹力与轮胎被压缩的距离成正比，额定平衡力是指支撑 m_1 和 m_2 所受的重力。定义 x 为相对平衡位置的距离，如果路面颠簸(r 随偏离平衡位置而变化)或车轮弹起(x 变化)，则此弹簧将产生力的作用。汽车在颠簸不平的路面行驶时，$r(t)$就不是常数。

正如上面所提到的，虽然恒定的重力作用在每一个质量体上，但由于弹簧产生一个与之大小相等、方向相反的力，因此重力被忽略不计。在下列情况下，竖直弹簧质量体系统中重力常被忽略：①定义的位置坐标是相对重力作用后的平衡位置而言的；②我们所分析的弹力实际是对处于平衡时弹力的扰动。

29

将方程(2.1)应用于每一部分质量体，且注意到作用在物体上的某些力的方向是负向的(向下)，得到系统的方程为

$$b(\dot{y}-\dot{x})+k_s(y-x)-k_w(x-r)=m_1\ddot{x} \tag{2.8}$$

$$-k_s(y-x)-b(\dot{y}-\dot{x})=m_2\ddot{y} \tag{2.9}$$

重新整理得

$$\ddot{x}+\frac{b}{m_1}(\dot{x}-\dot{y})+\frac{k_s}{m_1}(x-y)+\frac{k_w}{m_1}x=\frac{k_w}{m_1}r \tag{2.10}$$

$$\ddot{y}+\frac{b}{m_2}(\dot{y}-\dot{x})+\frac{k_s}{m_2}(y-x)=0 \tag{2.11}$$

列写这样的系统方程，最常见的错误是符号错误。在上面的推导过程中，确保符号正确的方法是，需要仔细画出物体的位移和位移方向上产生的作用力。一旦获得系统的方程，由实际推理可知，系统明显是稳定的，可以很快地对其符号进行检查。正如我们在第3章的3.6节研究稳定性时可以了解到的，一个稳定系统中，相似的变量总是符号相同的。对于上述系统，方程(2.10)表明$\ddot{x}$、$\dot{x}$和x项的符号都为正，因为系统肯定是稳定的。同样地，在式(2.11)中，$\ddot{y}$、$\dot{y}$和y项的符号也都为正。

在零初始条件下，用前面类似的方法可得传递函数。用s替代微分方程中的d/dt，得

$$s^2X(s)+s\frac{b}{m_1}(X(s)-Y(s))+\frac{k_s}{m_1}(X(s)-Y(s))+\frac{k_w}{m_1}X(s)=\frac{k_w}{m_1}R(s)$$

$$s^2Y(s)+s\frac{b}{m_2}(Y(s)-X(s))+\frac{k_s}{m_2}(Y(s)-X(s))=0$$

经代数运算及重新消元整理，上式满足传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_wb}{m_1m_2}\left(s+\frac{k_s}{b}\right)}{s^4+\left(\frac{b}{m_1}+\frac{b}{m_2}\right)s^3+\left(\frac{k_s}{m_1}+\frac{k_s}{m_2}+\frac{k_w}{m_1}\right)s^2+\left(\frac{k_wb}{m_1m_2}\right)s+\frac{k_wk_s}{m_1m_2}} \tag{2.12}$$

为确定数值，我们从总的汽车质量1580kg中减去四个车轮的质量，再除以4得到$m_2=375$kg，每个车轮的质量可直接测量，得$m_1=20$kg。因此，带有数值的传递函数可表示为

30

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1.31\mathrm{e}06(s+13.3)}{s^4+(516.1)s^3+(5.685\mathrm{e}04)s^2+(1.307\mathrm{e}06)s+1.733\mathrm{e}07} \tag{2.13}$$

在第3章和后面的章节中我们就会明白上述传递函数能够获得汽车行驶在颠簸路面上时，汽车车体对输入的响应。◀

2.1.2 旋转运动

对于一维旋转系统应用牛顿定律，式(2.1)变为

$$M=I\alpha \tag{2.14}$$

其中：M为相对于物体质心的所有外力矩之和，单位是N·m；I为物体折合到质心的转动惯量，单位是kg·m²；α为物体的角加速度，单位是rad/s²。

例2.3 旋转运动：卫星姿态控制模型

如图2.7所示的卫星，通常要求进行姿态控制，以使天线、传感器和太阳能面板能够准确定位。天线通常指向地球的某一特定位置，而太阳能面板需定位在可获得最大太阳能的方向。为了全部确定出三条轴的姿态控制系统，每次仅考虑其中一条轴是必要的。写出此系统中的一条轴的运动方程，并观察如何在框图中描述它们。另外，确定系统的传递函数并通过Matlab/Simulink构建该系统。

解答。本例如图2.8所示，这里仅考虑围绕垂直于纸面的轴的运动，角θ是卫星的定位位置角，是相对于惯性参考系(无角加速度的参考系)的测量值。喷射流产生控制力，相对质心的力矩大小为F_cd，同时存在很小的干扰力矩M_D，主要是由于太阳压强对太阳能面板的作用不对称而引起的。利用式(2.14)得运动方程为

$$F_cd+M_D=I\ddot{\theta} \tag{2.15}$$

系统的输出θ是输入力矩总和的两次积分；因此，这类系统通常称为**双积分器被控对象**。根据式(2.7)的形式，可得传递函数为

31

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{1}{I}\frac{1}{s^2} \tag{2.16}$$

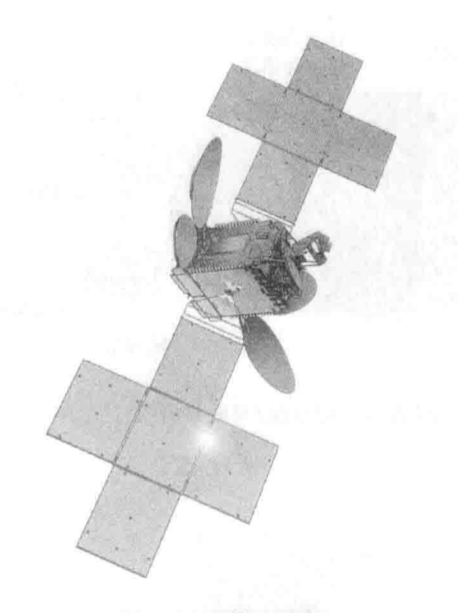


图 2.7　通信卫星图
（图片来源：Space Systems/Loral(SSL)）

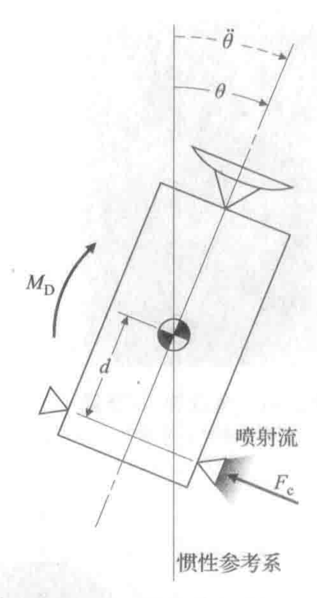


图 2.8　卫星控制简图

32

其中：$U=F_c d+M_D$。这种形式的系统通常是指 $1/s^2$ 被控对象。

图 2.9 所示的左、右两半部分框图用于表示式(2.15)和式(2.16)。这一简单的系统可以使用后面章节所描述的线性分析技术，或者如例 2.1 所示借助 Matlab 软件来分析，也可以利用 Matlab 的子软件包 Simulink 对任意的时间序列进行数值评价，它提供与 Matlab 的无缝连接，可以进行非线性仿真，并且提供图形用户界面的拖曳操作。图 2.10 所示的是用 Simulink 来描述的系统框图。◀

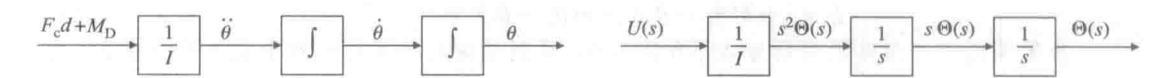


图 2.9　左半部分是式(2.15)的框图，右半部分是式(2.16)的框图

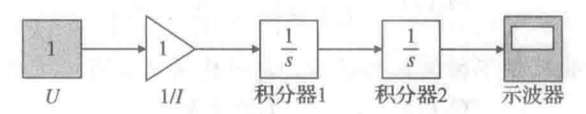


图 2.10　双积分器被控对象的 Simulink 框图

还有许多诸如图 2.11 所示的磁盘驱动读/写磁头系统，事实上都具有柔性，可能会在控制系统设计中引发问题。存在柔性，就会产生特殊的难题，如本例中传感器和执行机构位置之间存在柔性。因此，即便是看似相当刚性的系统，模型中考虑柔性通常也是重要的。

例 2.4　柔性：磁盘驱动的柔性读/写装置

在图 2.11 中，假设读磁头和驱动机之间存在一定柔性，推导施加在基座上的力矩与读磁头之间关系的运动方程。

解答。本例的动态模型原理图如图 2.12 所示。这个模型与图 2.5 所示的谐振系统动态类似，因此运动方程的形式也与式(2.10)和式(2.11)相似。图 2.13 所示的受力图给出了作用在每一部分上的力矩。这里讨论的力矩实质上与例 2.2 是相同的，只不过在例 2.2 中，弹簧和阻尼器产生力的作用，而不是作用在每个惯性体上的力矩。

33

图 2.11　磁盘读/写装置
（图片来源：作者）

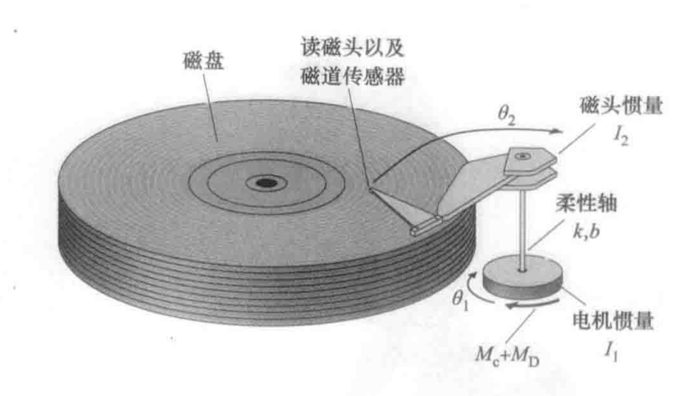


图 2.12　磁盘读/写磁头简图

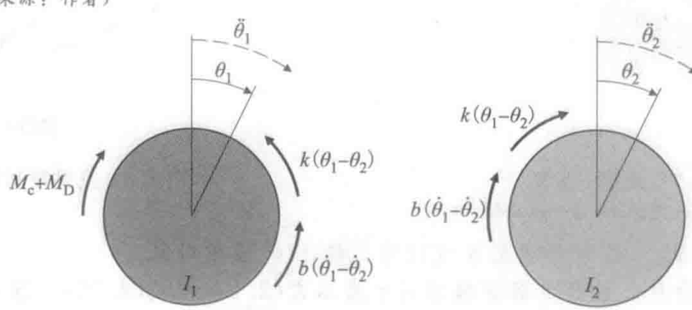


图 2.13　磁盘读/写磁头的受力图

根据式(2.14)力矩求和，联立加速度，整理结果为

$$I_1\ddot{\theta}_1+b(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)+k(\theta_1-\theta_2)=M_c+M_D \tag{2.17}$$

$$I_2\ddot{\theta}_2+b(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1)+k(\theta_2-\theta_1)=0 \tag{2.18}$$

为简单起见，忽略扰动转矩 M_D 和阻尼 b，得到读磁头的运动相对于施加的力矩 M_c 的传递函数为

$$\frac{\Theta_2(s)}{M_c(s)}=\frac{k}{I_1I_2s^2\left(s^2+\frac{k}{I_1}+\frac{k}{I_2}\right)} \tag{2.19}$$

也可能测量在转矩作用下惯性体的运动，此时传递函数同样简化为

$$\frac{\Theta_1(s)}{M_c(s)}=\frac{I_2s^2+k}{I_1I_2s^2\left(s^2+\frac{k}{I_1}+\frac{k}{I_2}\right)} \tag{2.20}$$

这两种情况比较典型，在柔性体中传感器和执行机构可能在同一位置，也可能不在同一位置。式(2.19)表示的传感器和执行机构间的情形是单体(noncollocated)的情况，而方程(2.20)描述的是合体(collocated)的情况。在第5章中，就会发现系统传感器和执行机构之间存在柔性(单体情况)比它们之间是刚性(合体情况)时要难控制得多。◀

另一种特殊情形，旋转体的某一点相对于惯性参考系是固定的，例如下面要列举的摆，同样也可以应用式(2.14)，M 为相对于固定点的所有力矩之和，I 为折合到固定点的转动惯量。

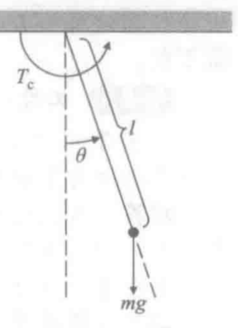


图 2.14　摆

例 2.5　旋转运动：摆

(1) 写出图 2.14 所示单摆的运动方程，其中所有质量都集中到终端，枢轴处有扭矩 T_c。

（2）给定 1N·m 的阶跃输入 T_c，利用 Matlab 工具确定 θ 与时间的关系曲线。假设 $l=1\text{m}$，$m=1\text{kg}$，$g=9.81\text{m/s}^2$。

解答。

（1）运动方程：折合到枢轴点的转动惯量 $I=ml^2$。相对于枢轴点的所有力矩之和包括由重力产生的力矩以及施加的力矩 T_c。由式(2.14)得到运动方程为

$$T_c - mgl\sin\theta = I\ddot{\theta} \tag{2.21}$$

通常可改写为

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{T_c}{ml^2} \tag{2.22}$$

由于在方程中存在 $\sin\theta$ 项，所以该方程是非线性的，非线性方程将在第 9 章讨论。然而，我们可以假定摆的运动是小范围的，即 $\sin\theta\approx\theta$，因而可对系统进行线性化处理，那么式(2.22)可变成线性方程，即

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{T_c}{ml^2} \tag{2.23}$$

如果没有外加力矩，这就是一个谐波振荡器的固有运动方程，其固有频率为[⊖]

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2.24}$$

由式(2.7)的形式，得传递函数为

$$\frac{\Theta(s)}{T_c(s)} = \frac{\frac{1}{ml^2}}{s^2 + \frac{g}{l}} \tag{2.25}$$

（2）时间关系曲线图：系统动态可以根据其传递函数描述成 Matlab 语句，且其阶跃响应用 step 函数实现，Matlab 语句如下：

```
t = 0:0.02:10;           % vector of times for output, 0 to 10 at 0.02
                           increments
m = 1;                   % value of mass (Kg)
L = 1;                   % value of length (m)
g = 9.81;                % value of gravity, g (m/sec^2)
s = tf('s');             % sets up transfer function input mode
sys = (1/(m*L^2))/
      (s^2 + g/L)
y = step(sys,t);         % computes step responses at times given
                           by t for step at t = 0
Rad2Deg = 57.3;          % converts radians to degrees
plot(t, Rad2Deg*y)       % converts output from radians to degrees
                           and plots step response
```

则可得到如图 2.15 所示的时间关系曲线图。◀

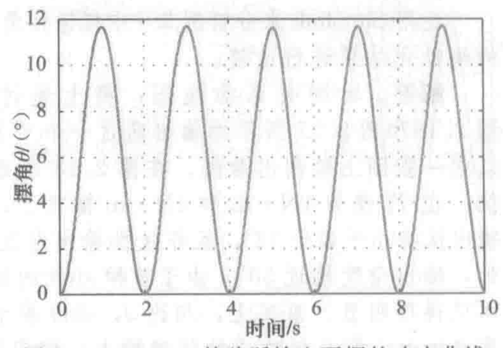


图 2.15　1N·m 的阶跃输入下摆的响应曲线

正如本例所见，导出的运动方程通常是非线性的。这类方程比线性方程更难求解，并且由非线性模型产生的可能的运动种类比那些由线性模型产生的更难划分。因此，为了利用线性分析方法，有必要对模型进行线性化。线性模型和线性分析可能仅用来设计控制系统（其作用是维持系统在线性区域内）。一旦在线性分析

⊖ 一个有摆的落地大座钟，其摆锤周期要求精确到 2s，那么摆锤应该大约为 1m 长。

基础上设计了一个控制系统，且具有期望的性能，那么为了验证其性能，需谨慎进行进一步的分析或对具有重要非线性的系统进行准确的数值仿真。Simulink 软件是实施仿真的便利工具，可处理大部分的非线性问题，这一仿真工具是通过搭建运动方程的框图[㊀]来实现的。例 2.5 中，由式(2.23)可得具有参数的摆的线性运动方程为

$$\ddot{\theta} = -9.81\theta + 1 \tag{2.26}$$

由 Simulink 得出的框图如图 2.16 所示。注意图形左侧部分圆圈中“+”号和“－”号是表征式(2.26)的相加和相减。

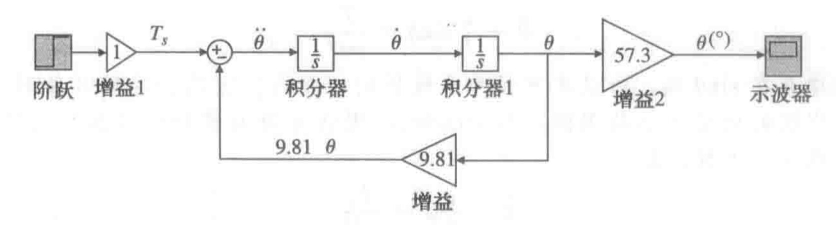


图 2.16 线性方程(2.26)的 Simulink 框图

运行数值仿真的结果与图 2.15 所示的线性结果是完全相同的，因为这里取相对较小的角度，即 $\sin\theta \approx \theta$。然而，在求解响应时 Simulink 能够模拟非线性方程，使得在大范围下均可使用它来分析系统的运动。此时，式(2.26)变成

$$\ddot{\theta} = -9.81\sin\theta + 1 \tag{2.27}$$

图 2.17 所示的 Simulink 框图实现了这一非线性方程。

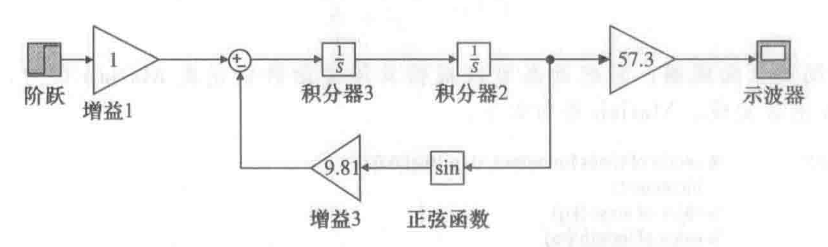


图 2.17 非线性方程(2.27)的 Simulink 框图

37 ~ 38

通常，Simulink 可以仿真所有遇到的非线性问题，包括死区特性、开关函数、粘滞作用、磁滞现象、空气动力阻力(v^2 的函数)和三角函数等。所有实际系统都会在不同程度上表现出一个或多个非线性特性。这些非线性问题将会在第 9 章做详细的介绍。

例 2.6 使用 Simulink 解决非线性运动：摆

运用 Simulink 来分析例 2.5 中摆锤摆角 θ 随时间的变化情况。将 T_c 值为 1N·m 和 4N·m 的线性化结果进行比较。

解答。时间关系曲线图：将上述讨论的这两种情况的 Simulink 框图结合起来，图 2.16和图 2.17 所示的输出通过一个“多路器模块(Mux)”接到“示波器”，因此它们可以在一张图上绘制出曲线。在图 2.18 所示系统中，结合后的框图中的增益 K 代表 T_c 的值。在 T_c 值为 1N·m 和 4N·m 情况下，系统输出如图 2.19 所示。注意 T_c=1N·m 时，输出保持小于等于 12°，且非线性输出与近似线性化的输出结果非常接近。当 T_c=4N·m 时，输出角度接近 50°。由于 θ 和 $\sin\theta$ 的近似处理，这时响应幅度及频率的巨大差异性就体现得很明显。事实上，相比 θ，$\sin\theta$ 表示了弱化的重力恢复力，因此，我们可以看到随着 θ 加大，非线性响应的幅值增大，频率降低，与近似线性化的输出差异性增大。◀

㊀ 第 3 章的 3.2.1 节将会更加详细地讨论框图。

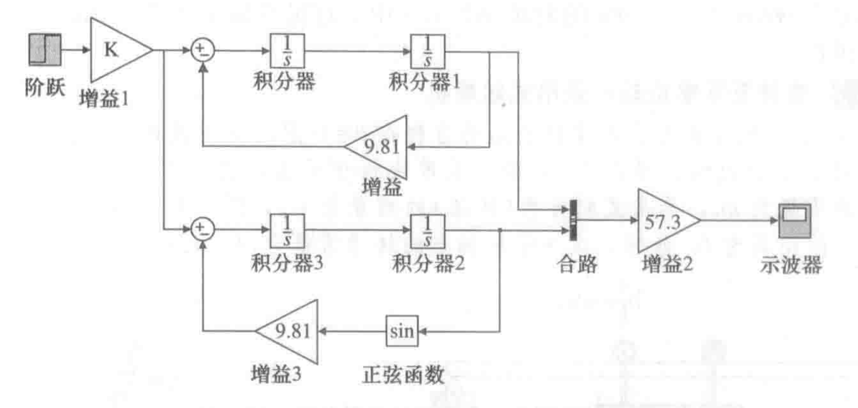


图 2.18　摆的线性模型和非线性模型的框图

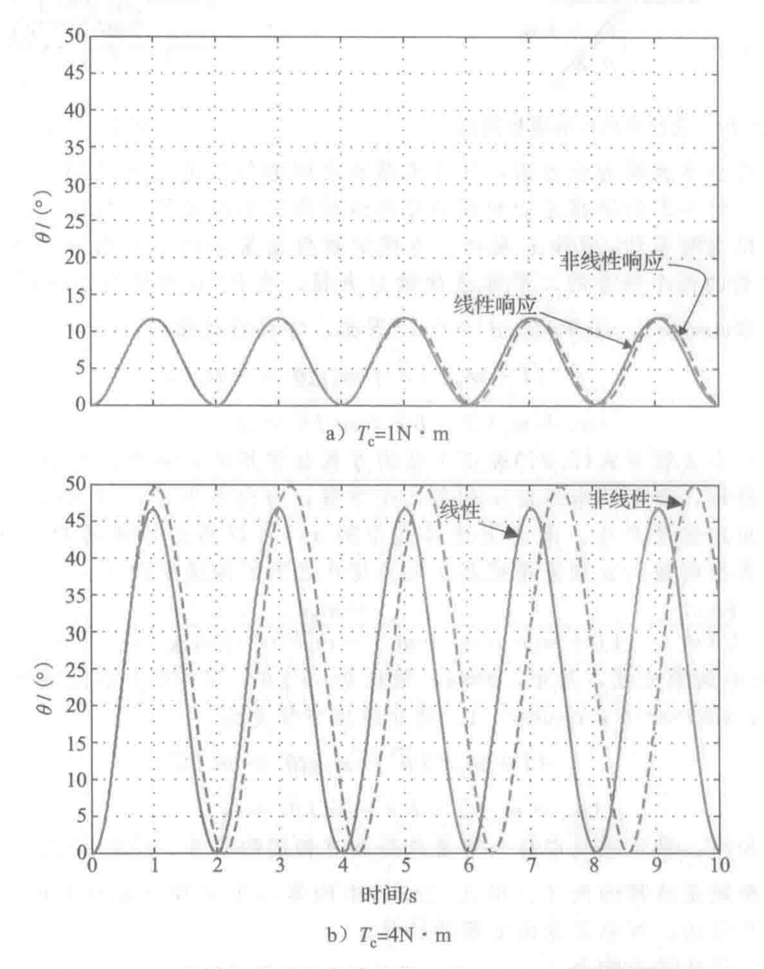


图 2.19　摆的线性模型和非线性模型的 Simulink 数值仿真响应

第 9 章主要是对非线性系统进行分析，并对这些思想做深入扩展。

2.1.3　旋转与平移运动的结合

在一些情况下，机械系统既包含平移部分，也包含旋转部分。这个过程与 2.1.1 节和 2.1.2 节所描述的相同，即画受力图、定义坐标和正方向、确定所有的作用力和力矩、应用式(2.1)和/或式(2.14)。这些系统方程的精确推导将变得相当复杂难懂，因此，下面例

子的分析放在 www.fpe7e.com 的附录 W2.1.4 中。这里只给出了线性化的运动方程和它们的传递函数。

例 2.7 旋转及平移运动：悬吊式起重机

写出图 2.20 所示悬吊式起重机的运动方程在 $\theta=0$ 附近对方程进行线性化，这对悬吊式起重机而言是有效的；并在 $\theta=\pi$ 附近采取线性化处理，表示图 2.21 所示的倒立摆情况。小车的质量为 m_t，悬吊式起重机(摆锤)的质量是 m_p，质心处转动惯量为 I。摆锤枢轴点到质心的距离为 l；此时，摆关于枢轴点的转动惯量为$(I+m_p l^2)$。

39 ~ 40

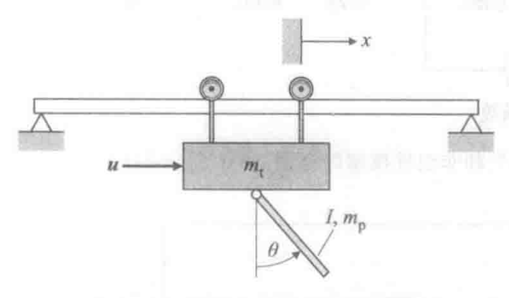


图 2.20 悬挂负载的起重机简图

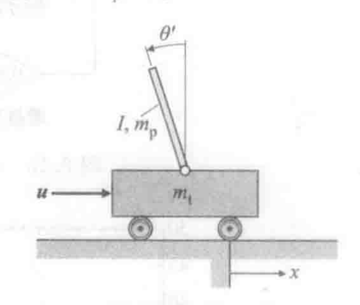


图 2.21 倒立摆

解答。建立小车及摆的受力图，并考虑两者之间的作用力。附录 W2.1.3 中我们给出了详细的过程。对小车的平移运动和摆的旋转运动应用牛顿定律，很容易发现两受力体之间的作用力可以忽略不计，θ 和 x 未知。系统的建模结果是以小车所受力 u 为输入，以 θ 和 x 为状态变量的两个耦合的二阶非线性微分方程。在 $\theta=0$ 附近的小范围内对运动方程进行线性化，即 $\cos\theta\approx 1$，$\sin\theta\approx\theta$，$\dot{\theta}^2\approx 0$；。因此，方程可近似为

$$(I+m_p l^2)\ddot{\theta}+m_p g l\theta=-m_p l\ddot{x}$$

$$(m_t+m_p)\ddot{x}+b\dot{x}+m_p l\ddot{\theta}=u \tag{2.28}$$

注意到第一个方程与式(2.21)表征单摆的方程非常相似，其中，外加力矩由小车的加速度产生。同样地，表征小车运动 x 的第二个方程，与汽车平移式(2.3)也很相似，其中，外加力由摆的角加速度产生。消去上述等式中的 x，可以得到传递函数。忽略摩擦项 b，简化代数式，得控制输入 u 到悬吊式起重机角度 θ 之间的传递函数为

41

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)}=\frac{-m_p l}{((I+m_p l^2)(m_t+m_p)-m_p^2 l^2)s^2+m_p g l(m_t+m_p)} \tag{2.29}$$

对于图 2.21 所示的倒立摆，其中，$\theta\approx\pi$，假设 $\theta=\pi+\theta'$，其中 θ' 表示偏离竖直向上方向的运动量。此时，$\sin\theta\approx-\theta'$，$\cos\theta\approx-1$，则非线性方程变为[⊖]

$$(I+m_p l^2)\ddot{\theta}'-m_p g l\theta'=m_p l\ddot{x}$$

$$(m_t+m_p)\ddot{x}+b\dot{x}-m_p l\ddot{\theta}'=u \tag{2.30}$$

如例 2.2 指出，稳定系统中每个变量总是具有相同的符号，通过式(2.28)建立的悬吊式起重机的模型就是这样的例子。而式(2.30)中的第一个方程的 θ 和 $\ddot{\theta}$ 的符号是相反的，表明系统是不稳定的，这也正是倒立摆的特性。

忽略摩擦，得传递函数为

$$\frac{\Theta'(s)}{U(s)}=\frac{m_p l}{((I+m_p l^2)(m_t+m_p)-m_p^2 l^2)s^2-m_p g l(m_t+m_p)} \tag{2.31}$$

对于这个传递函数，给无穷小的阶跃输入 u，会导致发散的 θ' 值。因此需要反馈作用保持

⊖ 倒立摆通常以顺时针运动方向为正方向的摆锤的角度来描述。如果按这样的方式定义，那么式(2.30)中有关 θ' 和 $\ddot{\theta}'$ 的所有项符号相反。

垂直，这部分将在第5章介绍。

在第5章中，你会学到如何用反馈来镇定系统，并且会明白即使像倒立摆这样的不稳定系统，也能通过传感器测量的输出量和一个控制输入实现系统的镇定。对于在小车上的倒立摆，需要测量摆锤的角度 θ'，并给一个能使小车加速，摆锤依然保持直立的控制输入 u。多年来，这个系统作为一个教学工具主要用于大学的控制系统实验室中。然而最近，有一个更加实用的装置投产并销售，本质上采用同样的动态：Segway。这种设备利用陀螺仪来测量设备的角度，电动机提供轮子上的转矩，保持设备的平衡并提供所需的前后移动，如图2.22所示。



图2.22 Segway(同倒立摆相似，通过反馈控制系统保持直立)

(图片来源：David Powell)

2.1.4 复杂机械系统

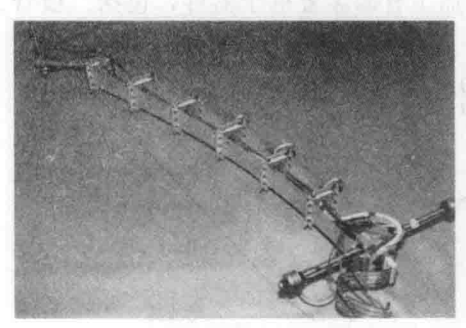
这部分包括了机械系统的微分运动方程的推导。特别地，包括例2.7的悬吊式起重机和小车上倒立摆运动方程的全部推导。参照 www.fpe7e.com 上的附录 W2.1.4。

2.1.5 分布参数系统

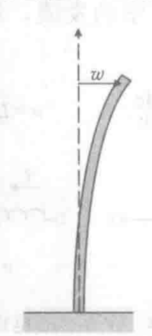
在前面所提出的例子中，尽管有些是通过弹簧彼此相连，但都含有一个或多个刚体。像卫星的太阳能面板、飞机的机翼或机器臂，这些实际的结构通常是弯曲的。如图2.23a所示的柔性梁就是这种情况。描述其运动的方程是一个四阶偏微分方程，这是因为质量是沿着这个梁连续分布的，每一部分之间都有微量变化，这类系统称为*分布参数系统*。本节提出的动态分析方法还不足以分析这种情况，而在更深入的文献(Thomson and Dahleh，1998)中证明了：

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.32}$$

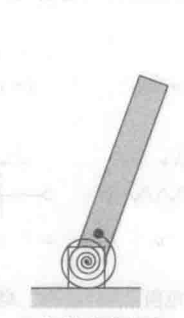
其中：E 为弹性模量；I 为转动惯量；ρ 为密度；w 为沿梁长度 x 处的挠度。



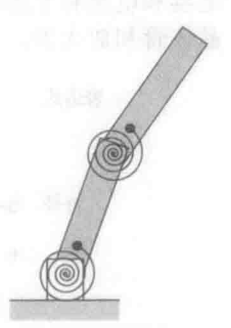
a）斯坦福大学研究使用的柔性机器臂



b）连续柔性梁模型



c）起始弯曲部分的简化模型



d）前两个弯曲部分模型

图 2.23

(图片来源：E. Schmitz)

在设计控制系统时，对式(2.32)精确求解是相当麻烦的，但在控制系统设计时描述总的弯曲效果通常很重要。

图2.23b所示的连续梁有无数振动模块，都具有不同的频率。通常，频率最低的模块振幅最大，且要求尽可能地精确近似。图2.23c的简化模型表示梁起始弯曲部分和频率，通常对控制器设计已足够了。如果在控制系统运行中，预期有比起始弯曲部分频率更高的

模块，则必须建立如图 2.23d 所示的模型，这个模型用来近似前两个弯曲模块和频率。同样，如果认为更高的精确性和复杂性是必要的，那么可以应用更高阶模型(Schmitz, 1985; Thomson and Dahleh, 1998)。当一个连续弯曲物体近似为两个或更多通过弹簧连接的刚体时，该模型有时称为集中参数模型。

42 ~ 44

2.1.6 小结：推导刚体的运动方程

列写刚体的运动方程所必需的物理学是牛顿运动定律。方法如下：

(1) 指定诸如 x 和 θ 这样的变量，这类变量对描述物体的任意位置都是充分必要的。

(2) 画出每一部分的受力图，标明作用在每一个物体上的所有作用力以及它们的参考方向，同时标明每一个物体质心相对于惯性参考系的加速度。

(3) 应用牛顿定律，平移运动采用式(2.1)的形式，旋转运动则采用式(2.14)的形式。

(4) 联立方程消去内部的作用力。

(5) 独立方程的个数等于未知数的个数。

2.2 电路模型

由于电信号较为容易操作和处理，电路广泛应用于控制系统中。尽管控制器逐渐由数字逻辑实现，但模拟电路仍可以实现许多功能。对于非常简单的控制器，模拟电路比数字电路响应速度要快，而且模拟电路实现比数字实现要廉价。另外，机电系统控制中的功率放大器和数字控制的抗混迭前置滤波器必须是模拟电路。

电路是由电压源、电流源以及诸如电阻、电容、晶体管等电子元件相互连接而成的。电路中一个重要的积木式元件是运算放大器[⊖]，它也是一个合成反馈系统的例子。1925 年到 1940 年间，在贝尔电话实验室，高增益、大带宽反馈放大器的设计者们论述了一些重要的反馈系统设计的方法。电气和电子元件在诸如电动机、发电机以及电子传感器这类机电能量转换装置中扮演着重要角色。简短的综述不可能涵盖完整的电物理学，也不可能全面评论所有重要的分析方法，我们将定义一些变量来描述典型元件以及电路中变量之间的关系，阐述求解所得方程的几种最有效方法。

45

一些线性电路元件符号以及它们的电压电流关系如图 2.24 所示，无源电路由电阻、电容和电感相互连接而成。随着电子学的发展，增加了有源装置电子器件，包括二极管、晶体管和放大器。

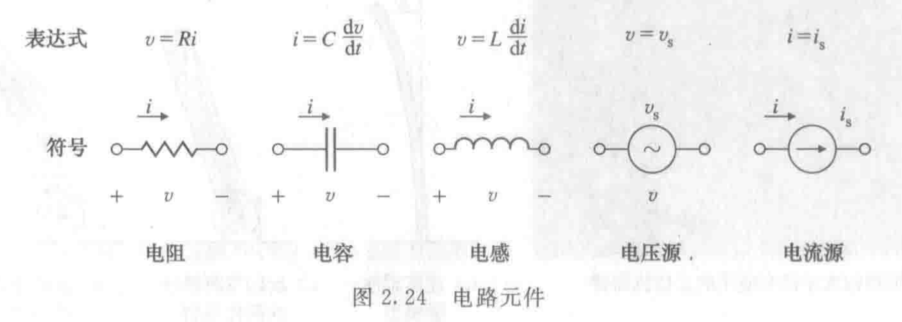


图 2.24 电路元件

基尔霍夫(Kirchhoff)电流定律(KCL)：流出一个节点的电流代数和等于流入此节点的电流代数和。

基尔霍夫电压定律(KVL)：在某一电路中，环绕一个封闭路径的所有电压代数和为零。

⊖ Oliver Heaviside 引入了数学运算符 p 来表示微分，即 $pv = dv/dt$。拉普拉斯综合这一思想，引用了复变量 s。Ragazzini 等人(1947 年)证明了一个理想的、高增益的电子放大器可以用拉普拉斯变换变量 s 实现任意"运算"，因此称它为运算放大器，通常简写为 op-amp。

在含有许多元件的复杂电路中，必须认真且有条理地列写方程。列写方程有许多种方法，我们只叙述一种普遍而有效的方法，即节点分析法。首先选择一个节点作为参考点，且假定所有其他节点的电压都是未知的。理论上节点可以任意选取，但在实际电路中，常见的标准选法是选取公共点、接地点或终端。下面的例子就是应用电流定律(KCL)，在每一个节点处，用选取的未知量列方程。利用图 2.24 所示的元件方程，由选取的未知量来表示电流。如果电路中含有电压源，必须以电压定律(KVL)替代该电压源。例 2.8 介绍了如何运用节点分析法。

46

例 2.8 桥式 T 形电路方程

确定图 2.25 所示电路的微分方程。

解答。选取节点 4 作为参考节点，且节点 1、2、3 处的电压 v_1、v_2、v_3 为未知量。首先简化 KVL 方程为

$$v_1 = v_i \tag{2.33}$$

节点 2 的 KCL 方程为

$$-\frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.34}$$

节点 3 的 KCL 方程为

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2 \frac{\mathrm{d}(v_3 - v_1)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.35}$$

这三个方程描述了该电路。如果需要，可将上述方程中的 v_2 消掉。这样，就可以得到描述输入 $v_i(=v_1)$和输出 $v_3(=v_o)$之间动态关系的二阶微分方程。◀

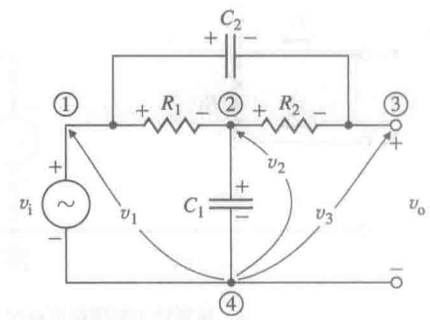


图 2.25 桥式 T 形电路

例 2.9 含电流源的电路方程

确定图 2.26 所示电路的微分方程。选择电容电压和电感电流作为未知量。

解答。选取节点 4 作为参考节点，且节点 1、2 处的电压 v_1、v_2 以及流过电感的电流 i_L 作为未知量。我们来确定 KCL 关系。

节点 1 的 KCL 方程为

$$i(t) = i_3 + i_1 + i_L \tag{2.36}$$

节点 2 的 KCL 方程为

图 2.26 例 2.9 的电路

$$i_L = i_2 + i_4 \tag{2.37}$$

另外，由图 2.24，我们可以看出：

$$i_3 = \frac{v_1}{R_1} \tag{2.38}$$

$$i_1 = C_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} \tag{2.39}$$

$$i_2 = C_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \tag{2.40}$$

$$i_4 = \frac{v_2}{R_2} \tag{2.41}$$

$$v_1 - v_2 = L \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \tag{2.42}$$

化简为含有三个未知量的三个微分方程分别为

$$i(t) = \frac{v_1}{R_1} + C_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} + i_L \tag{2.43}$$

$$i_L = C_2\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_2} \tag{2.44}$$

$$v_1 = L\frac{di_L}{dt} + v_2 \tag{2.45}$$

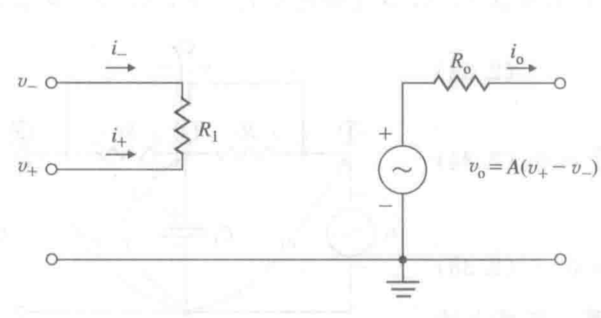
◀

基尔霍夫定律也可以应用在含有运算放大器的电路中。运算放大器的简化电路如图 2.27a所示，元件符号如图 2.27b 所示。如果图中正端未画出，则假定它是连到接地端，即 $v_+=0$，简化符号如图 2.27c 所示。在控制电路中，通常认为运算放大器是理想的，也就是 $R_1=\infty$，$R_o=0$ 且 $A=\infty$。理想运算放大器的方程相当简单，为

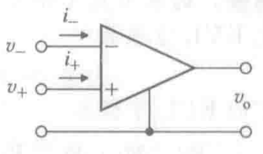
47～48

$$i_+ = i_- = 0 \tag{2.46}$$

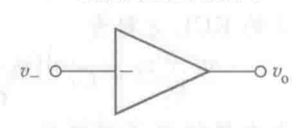
$$v_+ - v_- = 0 \tag{2.47}$$



a）运算放大器简化电路图



b）运算放大器示意符号



c）$v_+=0$时的简化符号

图　2.27

假定放大器的增益足够大，使得输出电压 v_o取任意值都满足这两个方程。当然，实际放大器只近似地满足这两个方程，除非特殊声明，一般我们都假定所有运算放大器是理想的。本章后面列出的几个习题为实际的模型。

例 2.10　求和运算放大器

列出如图 2.28 所示电路的方程和传递函数。

解答。由式(2.47)可得 $v_-=0$，因此，电流 $i_1=v_1/R_1$，$i_2=v_2/R_2$ 且 $i_{out}=v_{out}/R_f$。为满足式(2.46)，可得 $i_1+i_2+i_{out}=0$，由此满足 $v_1/R_1+v_2/R_2+v_{out}/R_f=0$，且有：

$$v_{out} = -\left[\frac{R_f}{R_1}v_1 + \frac{R_f}{R_2}v_2\right] \tag{2.48}$$

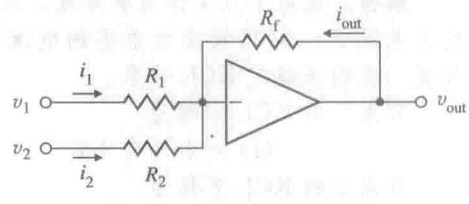


图 2.28　求和运算放大器

从这个方程我们可以看出，电路输出是输入电压变号后的加权和。因此，这个电路称为求和器。 ◀

控制中另一个重要的例子是积分运算放大器。

例 2.11　积分器

列出图 2.29 所示的电路的传递函数。

解答。本例中的方程是微分方程，式(2.46)和式(2.47)要求

$$i_{in} + i_{out} = 0 \tag{2.49}$$

因此，

$$\frac{v_{in}}{R_{in}} + C\frac{dv_{out}}{dt} = 0 \tag{2.50}$$

将式(2.50)表示成积分形式为

$$v_{out} = -\frac{1}{R_{in}C}\int_0^t v_{in}(\tau)d\tau + v_{out}(0) \tag{2.51}$$

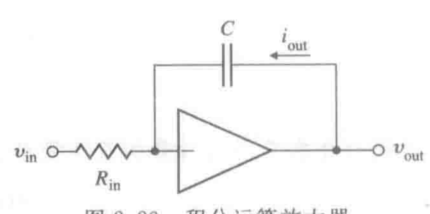


图 2.29　积分运算放大器

式(2.50)中，利用运算符 d/dt=s，则传递函数(假定初始条件为零)为

$$V_{out}(s)=-\frac{1}{s}\frac{V_{in}(s)}{R_{in}C} \tag{2.52}$$ ◀

因为在该电路中，理想运算放大器实现了积分运算，所以此电路称为积分器。

2.3 机电系统模型

电流和磁场的相互作用对理解机电执行机构和传感器的工作原理尤为重要。如果长度为 l 的导体中的电流为 i，若把它放在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，且垂直于磁场方向，则在导体上产生一个方向垂直于 i 和 $\boldsymbol{B}$ 组成平面的力，大小为：

$$F=Bli\,\mathrm{N} \tag{2.53}$$

这个方程是电能转变成机械运动的基本原理，称其为电动机定律。

2.3.1 扬声器

49～50

例 2.12 扬声器建模

扬声器发声装置的结构如图 2.30 所示，永磁铁在磁极间的缝隙中产生辐射式磁场，在线轴上绕有导体。作用在该导体上的力使发声线圈移动而发声[⊖]，空气的运动效果可等效为质量为 M、黏性摩擦因数为 b 的锥面运动。假设磁铁产生一个均匀的磁场 $\boldsymbol{B}$，大小为 0.5T，绕线直径为 2cm，共有 20 圈，写出此装置的运动方程。

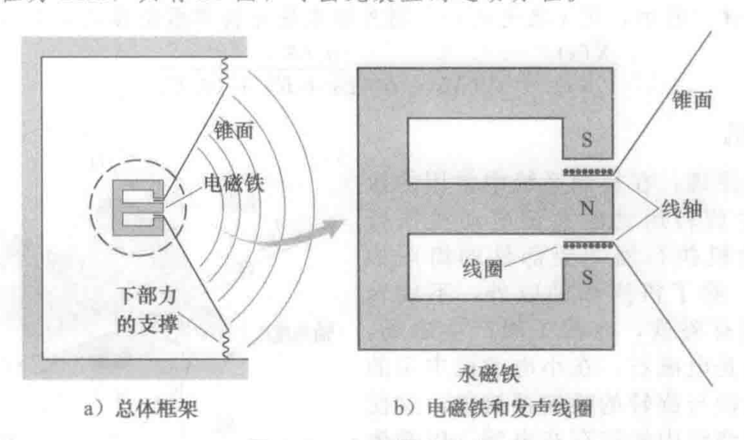


图 2.30 扬声器的结构

解答。电流垂直于磁场，我们要讨论的力垂直于 i 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的平面，那么可以应用式(2.53)，本例中的磁场强度 B=0.5T，导体长度为

$$l=20\times\frac{2\pi}{100}m=1.26\mathrm{m}$$

因此，所受的力为

$$F=0.5\times1.26\times i=0.63i$$

根据牛顿定律，质量为 M、摩擦因数为 b 的机械方程为

$$M\ddot{x}+b\dot{x}=0.63i \tag{2.54}$$

此二阶微分方程描述了扬声器锥面的运动，它是输入电流 i 驱动系统的函数。正如式(2.54)所述，用 s 取代 d/dt，很容易得到传递函数为

$$\frac{X(s)}{I(s)}=\frac{0.63/M}{s(s+b/M)} \tag{2.55}$$ ◀

另一类重要的机电关系是机械运动对电压的影响。若长为 l 的导体在磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，以速

51

⊖ 类似的声音线圈通常做计算机硬盘数据存取装置的读/写磁头部件的执行机构。

度 v 垂直磁场运动，则导体上就会产生电压，其大小为

$$e = Blv \tag{2.56}$$

此表达式称为发电机原理。

例 2.13 扬声器电路

图 2.30 为扬声器结构，图 2.31 所示的为其线路图，列出输入电压 v_a 与输出锥面位移 x 之间的微分方程。假定电路的有效电阻为 R，电感为 L。

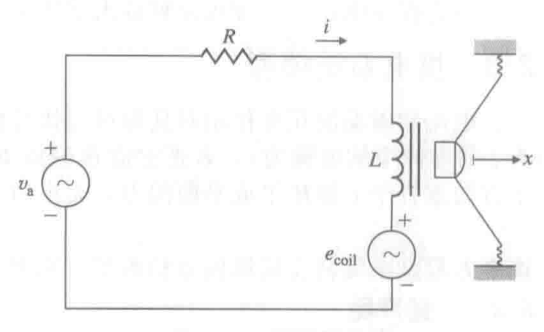


图 2.31 扬声器电路

解答。扬声器运动满足式(2.54)，该运动又将使线圈中产生电压，大小由式(2.56)给出，其中速度为$\dot{x}$，所以电压大小为

$$e_{coil} = Bl\,\dot{x} = 0.63\,\dot{x} \tag{2.57}$$

这就引入了电压的影响，所以需要分析其电路。电路运动方程为

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = v_a - 0.63\,\dot{x} \tag{2.58}$$

式(2.54)和式(2.58)这两个耦合方程为扬声器的动态模型。

同样在上述方程中，用 s 取代 d/dt，则外加电压与扬声器位移之间的传递函数为

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0.63}{s[(Ms+b)(Ls+R)+(0.63)^2]} \tag{2.59}$$

2.3.2 电动机

基于这些原理，在控制系统中常用的执行机构是产生旋转运动的直流电动机执行器。直流电动机执行器主要部件的简图如图 2.32所示。除了机座和轴以外，不旋转部分(定子)装有磁铁，在转子间产生磁场，这些磁铁可能是电磁石，在小电动机中用的是永磁铁。电刷与旋转的换向器接触，这使得在固有导体绕组中始终存在电流，以产生最大力矩。如果电流方向改变，则力矩方向也随之改变。

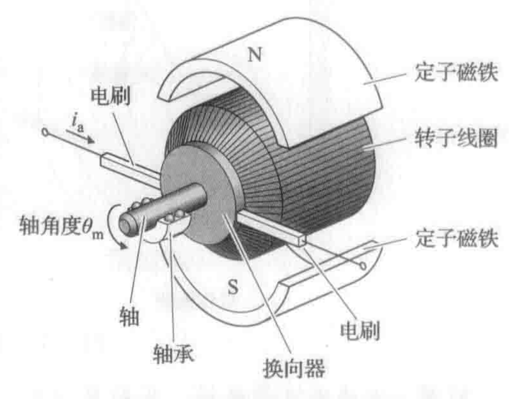


图 2.32 直流电动机示意图

电动机方程给出以电枢电流 i_a 表示的作用在转子上的转矩 T，以及以轴的转速$\dot{\theta}_m$ 表示的反电动势电压，即[⊖]

$$T = K_t i_a \tag{2.60}$$

$$e = K_e\,\dot{\theta}_m \tag{2.61}$$

单位一致时，力矩常数 K_t 等于电势常数 K_e，但有些时候力矩常数以其他单位给出。例如盎司—英寸/安培，而电势常数用 V/1000r/min 表示。这种情况下，工程师必须采取必要的转换以确保方程正确。

例 2.14 直流电动机模型

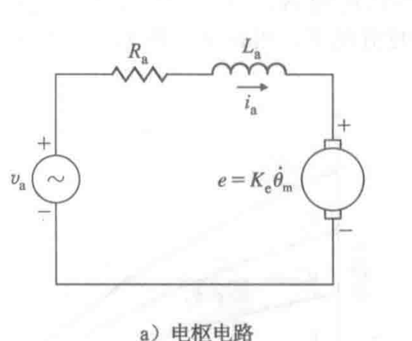
根据如图 2.33a 所示的等效电路图，列写直流电动机方程。假设转子的惯量为 J_m，黏性摩擦因数为 b。

⊖ 因为产生的电动势和外加的电枢电压相反，所以叫反电动势。

解答。转子的受力图如图 2.33b 所示，定义正方向，用 T 和 $b\dot{\theta}_m$ 表示产生的转矩。根据牛顿定律可得

52~53

$$J_m\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = K_t i_a \tag{2.62}$$



a）电枢电路

b）转子受力图

图 2.33 直流电动机

分析包含反电动势电压的电路，可得电路方程为

$$L_a\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + R_a i_a = v_a - K_e\dot{\theta}_m \tag{2.63}$$

在式(2.62)和式(2.63)中用 s 代替 d/dt，很容易得到电动机的传递函数为

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J_m s + b)(L_a s + R_a) + K_t K_e]} \tag{2.64}$$

一般地，与机械运动相比，电感的相对效应可忽略不计，方程(2.63)中可忽略电感的相对效应。在这种情况下，将式(2.62)和式(2.63)合并成一个方程，可得

$$J_m\ddot{\theta}_m + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)\dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a}v_a \tag{2.65}$$

从式(2.65)可清楚地看到，此时反电动势的影响和摩擦的影响是不可区分的，传递函数为

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a}}{J_m s^2 + \left(b + \frac{K_t K_e}{R_a}\right)s} \tag{2.66}$$

$$= \frac{K}{s(\tau s + 1)} \tag{2.67}$$

其中：

$$K = \frac{K_t}{bR_a + K_t K_e} \tag{2.68}$$

$$\tau = \frac{R_a J_m}{bR_a + K_t K_e} \tag{2.69}$$

多数情况下，需要建立电动机输入电压和输出速度($\omega = \dot{\theta}_m$)之间的传递函数。此时，传递函数变形为

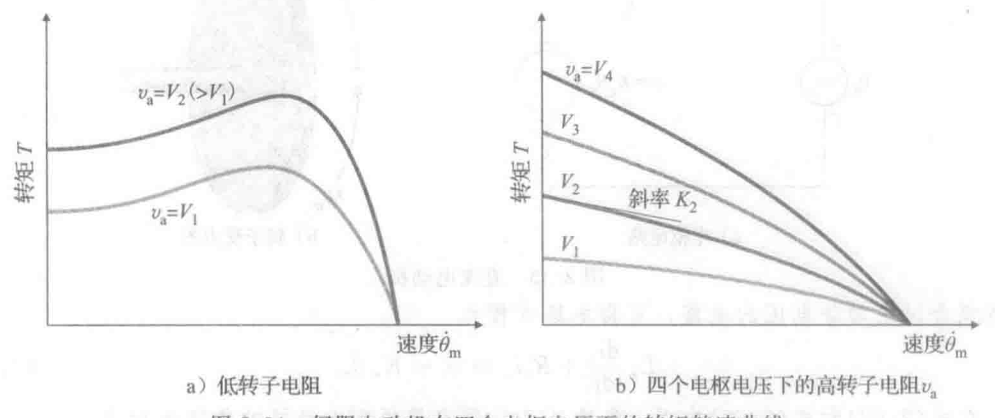
$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = s\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \tag{2.70}$$

54

机电能量转换的另一种装置是由 N. Tesla 发明的交流(AC)感应电动机。分析交流电动机远比分析直流电动机复杂。图 2.34 给出了当外加频率不变、幅值变化的(正弦)电压时，转速对转矩的典型实验曲线族。虽然图中数据是基于恒定的发电机转速得到的，但可以利用它们得到电动机常数，从而获得电动机动态模型。为了分析如图 2.34 所描述的交流电动机的控制问题，当转速接近零时，在中间电压处对曲线进行线性近似，可得

$$T = K_1 v_a - K_2\dot{\theta}_m \tag{2.71}$$

其中：K_1 为常数，表示在零转速处转矩变化和电压变化的比，其正比于在零转速处曲线间的距离；K_2 为常数，表示在转速为零时中间电压处转矩变化和电压变化的比，即它是零转速处某一条曲线的斜率，如图 2.34b 中电压为 V_2 时的直线所示。对于电气部分，电枢电阻 R_a 和电感 L_a 都是由实验确定的。一旦得到 K_1、K_2、R_a 和 L_a 的值，分析过程就类似于例 2.14 的直流电动机。在忽略电感的情况下，可用 K_1 和 K_2 分别代替式(2.65)中的K_t/R_a和K_tK_e/R_a。



a）低转子电阻　　b）四个电枢电压下的高转子电阻v_a

55

图 2.34　伺服电动机在四个电枢电压下的转矩转速曲线

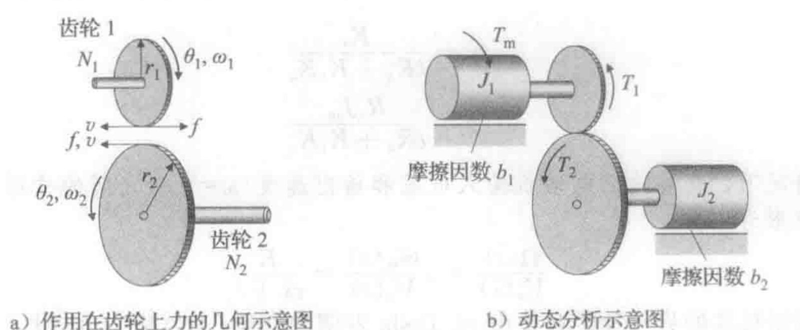
除了这里提到的直流和交流电动机之外，控制系统还使用无刷直流电动机(RMC 公司，1980)和步进电动机(Kuo，1980)。上述引用的文献中提出了这类机械模型，原理上与本节讨论的电动机并无区别。一般地，基于实验分析推导出由电压和转速表示的转矩函数，类似于图 2.34 给出的交流电动机转矩转速曲线。由这些曲线可得到：如式(2.71)的线性化公式，用于系统的机械部分；由电阻和电感组成的等效电路，用于系统的电气部分。

△2.3.3　齿轮

为了增加转矩，电动机通常需要与齿轮一起使用来达到控制目的，如图 2.35 所示。通过轮齿转动产生的力与另一个齿轮产生的力大小相等、方向相反，如图 2.35a 所示；因为转矩＝力×力臂，产生于轮齿施加到每个轴的输入转矩和输出转矩满足

$$\frac{T_1}{r_1}=\frac{T_2}{r_2}=f \tag{2.72}$$

其中：f 为通过轮齿产生的力。



a）作用在齿轮上力的几何示意图　　b）动态分析示意图

图　2.35

因此，我们看到转矩的乘积与齿轮的半径 r 成正比，或者等同于与每个齿轮上轮齿的个数 N 成正比，即

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{N_2}{N_1}=n \tag{2.73}$$

其中：定义 n 为齿轮比率。

同样地，两个齿轮接触点处的速度是相同的，因为

$$v = \omega r$$

其中：ω 是角速度。

有

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = v$$

因此，

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \tag{2.74}$$

56

此外，加速度变化，角度也会成比例地随之变化，因此，

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} = n \tag{2.75}$$

注意到这些几何关系式都未考虑任何惯性或齿轮加速的情况，它们仅仅改变了电动机转矩和转速的比例因子。当考虑动态时还有另外两个必须考虑的影响：有效转动惯性和系统的阻尼。假设伺服电动机与齿轮 1 相连，其输出转矩为 T_m。假设伺服电动机的齿轮 1 与齿轮 2 相啮合，且角度 θ_2 描述其(物体 2)位置。此外，齿轮 1 以及与其(物体 1)相连的物体的惯性为 J_1，而齿轮 2 以及与其(物体 2)相连的物体的惯性为 J_2，对于摩擦因数 b_1 和 b_2 也是如此。我们希望确定输出转矩 T_m 和输出角 θ_2 的传递函数，即 $\Theta_2(s)/T_m(s)$。物体 1 的运动方程为

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + b_1 \dot{\theta}_1 = T_m - T_1 \tag{2.76}$$

其中：T_1 是齿轮 2 作用于齿轮 1 的反作用转矩。而物体 2 的运动方程为

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + b_2 \dot{\theta}_2 = T_2 \tag{2.77}$$

其中：T_2 是齿轮 1 作用于齿轮 2 的转矩。注意，该系统不是独立系统，因为运动由齿轮连在一起。应用式(2.75)将式(2.76)中的 θ_1 用 θ_2 代替，应用式(2.73)将式(2.77)中的 T_2 用 T_1 代替，并结合两式将 T_1 消除，得到

$$(J_2 + J_1 n^2)\ddot{\theta}_2 + (b_2 + b_1 n^2)\dot{\theta}_2 = nT_m \tag{2.78}$$

那么，传递函数为

$$\frac{\Theta_2(s)}{T_m(s)} = \frac{n}{J_{eq}s^2 + b_{eq}s} \tag{2.79}$$

其中：

$$J_{eq} = J_2 + J_1 n^2, \quad b_{eq} = b_2 + b_1 n^2 \tag{2.80}$$

这些关系式分别称为“等效”惯性和阻尼系数[⊖]。如果输出转矩 T_m 和输出角 θ_1 的传递函数是理想情况下的，需要同样的分析过程得到等效惯性和阻尼系数，这和上述所讲的情况是不同的。

△2.4 热流体和热流量模型

热动力学、热传导和流体动力学都有各自的完整教材。为了在控制系统中建立动态模型，物理学中最重要的一个步骤是找出变量间的动态相互作用。通常是通过实验确定参数的实际值，从而完成控制系统设计中动态模型的建立。

57

2.4.1 热流量

一些控制系统涉及调节温度部分。温度控制系统的动态模型包括热能的流量和存储量。通过物质的热能流量正比于穿过物质前后的温度差，即

⊖ 等效惯性有时称为“反射阻抗”，然而这个术语更常用于电子电路。

$$q=\frac{1}{R}(T_1-T_2) \tag{2.81}$$

其中：q 为热能流量，单位为 J/s；R 为热阻，单位为℃/J·s；T 为温度，单位为℃。

流入物质的净热能流量又影响到该物质的温度，其关系式为

$$\dot{T}=\frac{1}{C}q \tag{2.82}$$

其中：C 为热容。通常，热量流入或流出某一种物质有多种途径，式(2.82)中 q 为满足式(2.81)的热能流量总和。

例 2.15 热流量方程

如图 2.36 所示，某一房间除了两面之外都是绝缘的($1/R=0$)。列写确定房间温度的微分方程。

解答。应用式(2.81)和式(2.82)得

$$\dot{T}_1=\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(T_O-T_1)$$

其中：C_1 为屋内空气热容；T_O 为外界温度；T_1 为屋内温度；R_2 为屋顶部的热阻；R_1 为墙壁的热阻。

图 2.36 房间温度动态模型

通常材料属性如下：

(1) 比定容热容 c_v，由下式转变到热容：

$$C=mc_v \tag{2.83}$$

其中：m 为物质的质量。

(2) 热导率[⊖] k，与热阻 R 的关系为

$$\frac{1}{R}=\frac{kA}{l}$$

其中：A 为横截面积；l 为热流路径长度。

除了式(2.81)表示的由于传导而产生的流量，热量也可以从温度高的物体流入温度低的物体，反之亦然。此时，

$$q=wc_v(T_1-T_2) \tag{2.84}$$

其中：w 为温度为 T_1 的液体流入温度为 T_2 的蓄水池的质量流量。有关温度控制系统中动态模型的全面论述，请参见坎农(Cannon)(1967 年)或有关热传导教材。

例 2.16 热交换器模型方程

图 2.37 所示的为热交换器。蒸汽通过顶部的控制阀进入箱内，温度较低的蒸汽从底部流出。管中的水流量恒定，管道弯曲穿过箱中央，以便获取蒸汽热量。列写微分方程，描述水流出时温度与蒸汽入口控制阀打开面积 A_s 之间的函数关系。测量水流出时温度传感器滞后 t_d 管中出口温度。

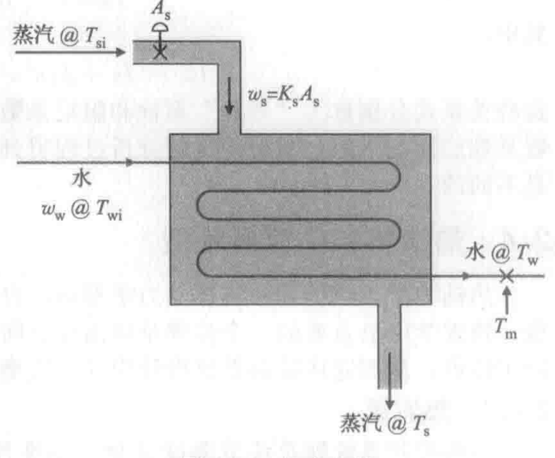


图 2.37 热交换器

解答。随着热量从蒸汽传到水中，管中水温会沿着管子持续不断地变化。蒸汽穿过弯曲的管子，箱内蒸汽温度也随之降低。由于从蒸汽传到水中的实际热量与每

⊖ 就房屋绝缘材料而言，电阻引用 R-数值形式；例如，R-11 表示物质对热流量的阻力等同于 11in(1in=25.4mm)的紧密材料的阻力。

一股流体的局部温度成比例，因此很难得到该过程精确的热模型。而在控制系统的应用中，没必要要求很高的精度，因为反馈可以校正模型中存在的相当大的误差。因此，可将不断变化的温度统一成单个温度 T_s 和 T_w，来分别表示流出的蒸汽温度和水的温度。

假定从蒸汽到水的热传递与温度差成比例，如式(2.81)所示。从蒸汽入口流入箱内的热量取决于蒸汽流量及其温度，根据式(2.84)得

$$q_{in} = w_s c_{vs}(T_{si} - T_s)$$

其中：$w_s = K_s A_s$，为蒸汽质量流量；A_s 为蒸汽进汽阀面积；K_s 为进汽阀的流量系数；c_{vs} 为蒸汽比定容热容；T_{si} 为流入的蒸汽温度；T_s 为流出的蒸汽温度。

流入箱内的净热量是流入蒸汽热量与流出水的热量差，该净热量决定了蒸汽温度的变化率，由式(2.82)得

$$C_s \dot{T}_s = A_s K_s c_{vs}(T_{si} - T_s) - \frac{1}{R}(T_s - T_w) \tag{2.85}$$

58~60

其中：$C_s = m_s c_{vs}$，是箱内质量为 m_s 的蒸汽热容；R 为通过整个交换器平均热流量的热阻。

同理，描述水温的微分方程为

$$C_w \dot{T}_w = w_w c_{cw}(T_{wi} - T_w) + \frac{1}{R}(T_s - T_w) \tag{2.86}$$

其中：w_w 为水的质量流量；c_{cw} 为水的比热容；T_{wi} 为输入水温；T_w 为输出水温。

为了完善该动态过程，考虑测量与出口流之间的时间延迟，关系式为

$$T_m(t) = T_w(t - t_d)$$

其中：T_m 为测量的水的出口温度；t_d 为时间延迟。

在测量蒸汽温度 T_s 时也会存在时延，可用同样的方法来建模。

由于包含状态变量 T_s 与控制输入 A_s 的乘积项，所以式(2.85)是非线性的。方程可在 T_{so}（T_s 的特殊值）处线性化，为了非线性项的近似，因此假设 $T_{si} - T_s$ 是常数，定义为 ΔT_s。为了消去式(2.86)中的 T_{wi} 项，所有温度测量都简单地基于 T_{wi} 的偏差，则方程变形为

$$C_s \dot{T}_s = -\frac{1}{R}T_s + \frac{1}{R}T_w + K_s c_{vs} \Delta T_s A_s$$

$$C_w \dot{T}_w = -\left(\frac{1}{R} + w_w c_{vw}\right) T_w + \frac{1}{R} T_s$$

$$T_m = T_w(t - t_d)$$

虽然时延不是非线性的，但在第3章我们会看到 $T_m = e^{-t_d s} T_w$，因此，热交换器的传递函数为

$$\frac{T_m(s)}{A_s(s)} = \frac{K e^{-t_d s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \tag{2.87}$$ ◀

2.4.2 不可压缩液体流量

流体流动在许多控制系统环节中普遍存在。液压执行机构就是其中一个例子，它被广泛应用于控制系统中，因为它能在低惯性、低重量情况下提供一个大的作用力。它们经常用来移动飞机的气动控制平面、火箭喷头万向接头、运土装置、农用拖拉机设备以及雕雪机的联动运行，以及控制机器人臂的运动等。

61

调节液体流量的物理关系有连续性、力平衡性和流阻。连续性关系简单阐述了物质的守恒，即

$$\dot{m} = w_{in} - w_{out} \tag{2.88}$$

其中：m 为系统指定部分液体的质量；w_{in} 为流入系统指定部分的质量流量；w_{out} 为流出系统指定部分的质量流量。

例 2.17 描述水箱水位高度的方程

确定图 2.38 所示水箱水位高度的微分方程。

解答。根据式(2.88)，得

$$\dot{h} = \frac{1}{A\rho}(w_{\text{in}} - w_{\text{out}}) \tag{2.89}$$

其中：A 为水箱面积；ρ 为水的密度；$h=m/A\rho$ 为水位高度；m 为水箱中水的质量。◀

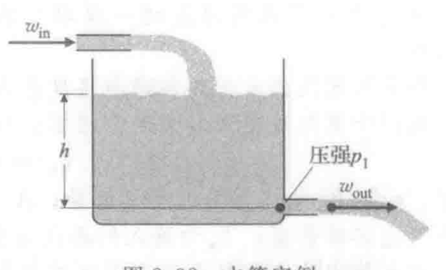


图 2.38 水箱实例

力平衡性实际上与利用式(2.1)描述机械系统一样。有时，在液体流动系统中，由于液体压强在活塞上会产生力的作用。此时，由液体产生的力为

$$f = pA \tag{2.90}$$

其中：f 为所受的力；p 为液体压强；A 为液体作用的面积。

例 2.18 液压活塞模型

图 2.39 所描述的是活塞传动装置的运动，确定其微分方程。假定作用在活塞上的力为 $\boldsymbol{F}_{\text{D}}$，容器内压强为 p。

解答。直接应用式(2.1)和式(2.90)，其中，活塞受到的力包括液体压强产生的力和外加力。结果为

$$M\ddot{x} = Ap - F_{\text{D}}$$

其中：A 为活塞面积；p 为容器内压强；M 为活塞质量；x 为活塞位移。◀

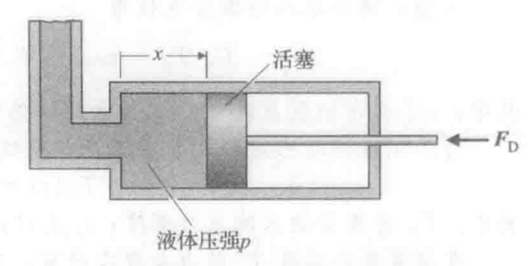


图 2.39 液压活塞传动装置

在一般流体流动问题中，流速由于路径中存在收缩或摩擦而受阻。阻力效应的一般形式为

$$w = \frac{1}{R}(p_1 - p_2)^{1/\alpha} \tag{2.91}$$

其中：w 为质量流量；p_1，p_2 为有流体的路径末端的压强；R，α 为常数，其值取决于节流类型。

或者，在水力学中更普遍地使用下式：

$$Q = \frac{1}{\rho R}(p_1 - p_2)^{1/\alpha} \tag{2.92}$$

63

其中：Q 为体积流量，这里 $Q=w/\rho$；ρ 为液体密度。

常数 α 取值在 1 到 2 之间。若通过管道或通过较短的收缩管、喷管的流速很高(雷诺(Reynolds)常数 $Re>10^5$)，则 α 一般取 2 左右。若通过管道或多孔塞的流速很低($Re\leqslant 1000$)，这时流体保持分层状，则 $\alpha=1$。在这两个极端值之间时，流速取中间值。雷诺常数表示流体中惯性力和黏性力的相对比重，它与物质的速度、密度和节流大小成正比，与黏性成反比。当 Re 很小时，黏性力占主导地位，流体呈分层状；当 Re 很大时，惯性力占主导地位时，流体呈湍流(紊流)状。

注意，当 $\alpha=2$ 时，表示流量与压强差的平方根成正比，因此将得到一个非线性微分方程。在控制系统分析和设计的初始阶段，有必要对这些方程线性化，以便应用本书讨论的设计方法。线性化需选取一个工作点，并在该工作点附近将非线性项展开作为小的摄动。

例 2.19 水箱液位和流出量的线性化

列写图 2.38 所描述水箱水位高度的非线性微分方程。假定在出口存在短时节流，设

$\alpha=2$，并在运算点 h_o 附近对方程进行线性化。

解答。应用式(2.91)得到流出水箱的流量与水位高度的函数关系为

$$w_{out}=\frac{1}{R}(p_1-p_a)^{1/2} \tag{2.93}$$

其中：$p_1=\rho gh+p_a$ 为液体压强；p_a 为节流外部环境压强。

将式(2.93)代入式(2.89)得到关于水位高度的非线性微分方程为

$$\dot{h}=\frac{1}{A\rho}\left(w_{in}-\frac{1}{R}\sqrt{p_1-p_a})\right) \tag{2.94}$$

64

选取工作点 $p_o=\rho gh_o+p_a$，对方程进行线性化，并将 $p_1=p_0+\Delta p$ 代入式(2.93)。然后根据下面关系式将非线性项展开：

$$(1+\varepsilon)^{\beta}\approx 1+\beta\varepsilon \tag{2.95}$$

其中：$\varepsilon\ll 0$。因此式(2.93)可变为

$$\begin{aligned} w_{out} &= \frac{\sqrt{p_0-p_a}}{R}\left(1+\frac{\Delta p}{p_0-p_a}\right)^{1/2} \\ &\approx \frac{\sqrt{p_0-p_a}}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p_0-p_a})\right) \end{aligned} \tag{2.96}$$

只要 $\Delta p\ll p_0-p_a$，式(2.96)的近似线性关系就是合理的；即系统压强距选定的工作点偏差非常小。

合并式(2.89)和式(2.96)，得到水箱水位运动的线性化方程为

$$\Delta\dot{h}=\frac{1}{A\rho}\left[w_{in-}\frac{\sqrt{p_0-p_a}}{R}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p_o-p_a}\right)\right]$$

由于 $\Delta p=\rho g\Delta h$，该方程演化为

$$\Delta\dot{h}=-\frac{g}{2AR\sqrt{p_0-p_a}}\Delta h+\frac{w_{in}}{A\rho}-\frac{\sqrt{p_0-p_a}}{\rho AR} \tag{2.97}$$

这是关于 $\Delta\dot{h}$ 的线性微分方程。工作点并不是平衡点，因为若要维持在该点，需要有一定的控制输入。也就是说，当系统无输入($w_{in}=0$)且处于工作点($\Delta h=0$)时，它将因为 $\Delta\dot{h}\neq 0$ 而偏离该点。因此，如果没有水流入水箱，那么水箱中的水会被耗尽，从而会偏离设定点。为了设定工作点是平衡点，要求有一额定流量，即

$$\frac{w_{in_0}}{A\rho}=\frac{\sqrt{p_0-p_a}}{\rho AR}$$

且把已线性化的输入流量作为此额定值的扰动。◀

液压执行机构同样遵循我们在水箱实例中看到的基本关系：连续性[式(2.88)]、力平衡性[式(2.90)]和流阻[式(2.91)]。尽管上述推导过程中假设液体是完全不可压缩的，然而实际上液体由于内部的传输携入空气而具有一定的压缩性。因为液体的可压缩性作用类似刚性弹簧，所以该特性导致液压执行机构具有一定的谐振性，此谐振会限制其响应速度。

例 2.20 液压执行机构的模型

(1) 图 2.40 所示的为液压执行机构，推导非线性微分方程，建立控制面 θ 的运动与输入阀位移 x 之间的关系。

65

(2) 在有、无外加载荷，即 $F\neq 0$ 和 $F=0$ 两种情况下，当 $\dot{y}$ 为常数时对运动方程采取近似线性化。假设 θ 在小范围内运动。

解答。

(1) **运动方程**：当阀门在 $x=0$ 时，通道关闭，无运动产生。如图 2.40 所示，当 $x>0$ 时，油如图所示顺时针流动，活塞受力方向向左。当 $x<0$ 时，液体逆时针流动。在高压 p_s 作用下油流入大活塞的左边，产生使活塞向右运动的力。这就使得油从右端通道而不会

图 2.40　带阀门的液压执行机构

从左端通道流出阀室。

我们假定通过阀门孔的流量与 x 成正比，即

$$Q_1 = \frac{1}{\rho R_1}(p_s - p_1)^{1/2} x \tag{2.98}$$

同理，

$$Q_2 = \frac{1}{\rho R_2}(p_2 - p_e)^{1/2} x \tag{2.99}$$

则连续性关系为

$$A\dot{y} = Q_1 = Q_2 \tag{2.100}$$

其中：A 为活塞面积。

力平衡关系为

$$A(p_1 - p_2) - F = m\ddot{y} \tag{2.101}$$

其中：m 为活塞和附属杆的质量；F 为活塞杆对控制面支点的作用力。

此外，由式(2.14)可得控制面的转矩平衡方程为

66

$$I\ddot{\theta} = Fl\cos\theta - F_a d \tag{2.102}$$

其中：I 为控制面与合页衔接部分的转动惯量；F_a 为外加空气动力载荷。

为了求解这五个方程，需要附加 θ 和 y 的关系，有

$$y = l\sin\theta \tag{2.103}$$

执行机构中作用于两通道的阀通常是相同的，因此 $R_1 = R_2$，由式(2.98)到式(2.100)得

$$p_s - p_1 = p_2 - p_e \tag{2.104}$$

这些关系式就是运动的非线性微分方程，很复杂，难以求解。

(2) 线性化与简化：对于 $\dot{y} = a$ 为常数($\ddot{y} = 0$)且未加载荷($F = 0$)的情况，由式(2.101)和式(2.104)得

$$p_1 = p_2 = \frac{p_s + p_e}{2} \tag{2.105}$$

因此，应用式(2.100)和 $\sin\theta \approx \theta$(假定 θ 很小)，可得

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p_s - p_e}}{\sqrt{2}A\rho Rl} x \tag{2.106}$$

这表示输入 x 和输出 θ 之间为单一积分，其中，比例常数仅是供油压强和执行机构固定参数的函数关系。对于 $\dot{y}$ 为常数，而 $F \neq 0$ 的情况，由式(2.101)和式(2.104)可得

$$p_1 = \frac{p_s + p_e + F/A}{2}$$

和

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{p_s - p_e - F/A}}{\sqrt{2}A\rho Rl}x \tag{2.107}$$

这个结果也是输入 x 和输出 θ 之间的单一积分，但此时比例常数取决于外加载荷 F。

只要指定了输入 x 得到输出 θ 的运动，且 $\ddot{\theta}$ 的值足够小，则式(2.106)或式(2.107)的近似就是合理的，不需要其他线性化动态关系。然而，如果输入 x 产生加速运动，此时惯性力($m\ddot{y}$ 和对 $I\ddot{\theta}$ 的反作用力)就是 $p_s - p_e$ 的重要部分，那么这种近似就不合理了。我们必须把这些力合并，从而得到 x 和 θ 之间比式(2.106)和式(2.107)的纯积分形式更复杂的动态关系。一般地，对于最初的控制系统设计，假定液压执行机构满足式(2.106)和式(2.107)的简单关系。当液压执行机构用于反馈控制系统中时，会碰到谐振现象，此时不能使用如式(2.106)和式(2.107)所示的简单的积分器进行近似。由于油内部有空气故而具有一定的压缩性，这一额外特性导致在前面提到的被忽略的加速运动中产生谐振。这一现象被为“油质谐振”。 ◀

67

2.5 历史展望

1686年，牛顿第二定律(式(2.1))首次发表在他的论文“PhilosophiceNaturalis Principia Mathematica”上，同时还有他另外两个著名的运动定律。牛顿第一定律——物体总保持匀速直线运动状态或静止状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种运动状态；以及牛顿第三定律——每一个作用力都会引起大小相等且方向相反的反作用力。在该书中牛顿还发表了万有引力定律，提出任意两个质点都是相互吸引的，引力的大小与它们质量的乘积成正比，与它们距离的平方成反比。牛顿在前人研究结果的基础上创立了这几个运动定律，并结合自己发展出的微积分理论使其与他所有的观察结果一致。令人惊异的是，直到现在这些定律仍然是几乎所有动态分析的基础，除了在19世纪初爱因斯坦(Einstein)所扩充的相对论效应。同样让人惊奇的是牛顿对于微积分理论的发展奠定了数学中动态建模的根基。牛顿不仅聪明，还很古怪。正如布伦南(Brennan)在“Heisenberg Probably Slept Here”中写道，“在学校的时候，他衣冠不整，戴着歪斜的假发，穿着破旧的鞋子和一个脏皮围巾。他似乎只关心他的工作。他如此专注于他的工作以至于忘了吃饭。”关于牛顿另一个有趣的方面是，起初发现微积分和现在著名的物理学定律的时间距他出版这些成果早了近20年。而出版的动机源于1684年在酒吧吃午饭时，E. 哈勒(Edmond Halley)、雷恩(Christopher Wren)和R. 胡克(Robert Hooke)三人之间的打赌。他们都认为，开普勒(Kepler)的椭圆特征的行星运动可以用平方反比定律来解释，但是没有人证明它，所以他们打赌谁能第一个证明这个猜想[⊖]。由于牛顿作为数学家的声望，哈雷(Halley)找牛顿寻求帮助，而牛顿说他多年前就已经证明了这一猜想，会把文件给他。牛顿不久之后将文件发给哈雷，然而两年之后这些文件的细节出现在了《Principia》一书中。

68

牛顿的研究是基于天文学家 N. 哥白尼(Nicholas Copernicus)的理论，开始于《Principia》出版前一百多年。N. 哥白尼是第一个推测行星围绕太阳旋转，而不是天空中一切都围绕地球旋转的人。但是除了教会禁止他出版外，当时哥白尼的“邪恶”的观点很大程度上被忽视了。然而，有两位科学家注意到了这一观点：意大利的伽利略(Galileo)和奥地利的开普勒。开普勒依据由丹麦天文学家 Tycho Brache 提供的大量天文数据，得出的结论是，行星轨道是椭圆形而非圆形的，这些哥白尼假定过。伽利略是一个制造望远镜

⊖ 关于牛顿的背景介绍摘自1997年Richard P. Brennan编著的“Heisenberg Probably Slept Here”中。该书介绍了牛顿的工作成果以及为牛顿奠定基础的早期的科学家们。

的专家，能够清楚地证明地球不是所有运动的中心，部分原因是他能看到卫星围绕其他行星转动。他也做了使球体沿斜面向下滚动的实验，结果满足 $F=ma$ 的关系(他使球体从比萨斜塔垂直落下的实验是一个虚拟的故事)。伽利略于 1632 年发表了这一成果，激怒了教会，以致他被软禁直到去世[1]。而直到 1985 年，教会才认可了伽利略的这一重要贡献。这些人为牛顿提出物理学定律和反平方引力定律奠定了基础。这两个物理定律，以及所有实际观察组合而成的理论框架，形成了今天动态系统建模的基础理论体系。

这一系列的发现最终形成了我们如今认为理所当然的动力学规律，而当我们驻足思考，在没有计算机、计算器甚至计算尺的情况下研究出来的这些成果，就尤其引人注目。不仅如此，牛顿还创立了微积分理论来协调数据。

发表“Principia”之后，牛顿当选为国会议员，并获得很高的荣誉，包括成为第一位被女王封为爵士的科学家。他还经常和其他科学家打架斗殴，并利用他的权势得到他想要的。有一次，他想得到皇家天文台的数据，而这些数据获取速度不够快。因此，他成立了一个比天文台更加权威的新董事会，并将皇家天文学家逐出英国皇家学会。牛顿也有其他不那么科学的兴趣，在他死后很多年，J. M. 凯因斯(John Maynard Keynes)发现，牛顿花费在研究神秘的形而上学、炼金术和圣经作品的时间和研究物理的时间差不多。

69

牛顿的“Principia”发表百余年之后，M. 法拉第(Michael Faraday)在自由空间进行了大量的实验，并对电磁力线的概念做出了假设。他还发现了电磁感应现象(法拉第定律)，从而得到了电动机和电解定律。法拉第出生在一个贫穷的家庭，几乎没受过教育，并在 14 岁时成为一名学徒装订工。学徒期间，他读过很多受限制的书，并对科学的文章十分痴迷。由于痴迷于此，他设法找到了一份作为著名科学家身边杂役的工作，并努力汲取营养足以与该科学家抗衡，最终成为伦敦皇家学会的一位教授，但是由于他缺乏正规教育，没有数学基础，使得他缺乏发现创建理论框架的能力。尽管出身卑微，法拉第仍然成为一名著名的科学家。在他因其发明获得一定名望，并成为英国皇家学会会员之后，首相问他的发明有什么好处[2]。法拉第说，“首相，它会为您带来税收。”但在那个时代，科学家们几乎都是一出生就很有权势，所以当时，其他的科学家都把法拉第当作二等公民来对待。因此，他拒绝骑士爵位，并拒绝安葬在 Westminster 教堂。结合库仑(Coulomb)和安培(Ampere)的发现，法拉第的发现使得麦克斯韦将他们关于磁性和电的知识融入了麦克斯韦方程组。与当代最著名科学家的信仰相反(法拉第除外)，麦克斯韦发明了场和波的概念，解释了磁力和静电力，是建立统一理论的关键。尽管牛顿发现了光的光谱，麦克斯韦也首次意识到，光是一种电磁波，麦克斯韦方程组也解释了这一特性。实际上，方程组中仅有的常量是 μ 和 ε。光速为 $c=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$。

麦克斯韦是苏格兰的数学家和理论物理学家。他的作品被称为是物理学上第二次大统一，第一次是牛顿的作品。麦克斯韦出生于特权阶级，有机会得到良好的教育并确实学有所用。事实上，他是一个非常有天赋的理论和实验科学家，也是一个朋友多、慷慨、善良，又有点虚荣的人。除了至今仍支配工程分析的统一的电磁学理论外，麦克斯韦还是第一个解释了光如何运动、光的三原色、气体分子运动论、土星环的稳定性，以及反馈控制系统的稳定性的科学家。他发现的光的三原色(红、绿、蓝)是今天我们彩色电视的理论基础。他的理论指出，光速是一个常数，而这很难与牛顿定律一致起来。由此促使爱因斯坦在 19 世纪初创建了狭义相对论。这使得爱因斯坦说，“一个科学的时代结束了，新的科学时代始于麦克斯韦。”[3]

70

[1] 在《Galileo's Daughter》一书中，Dava Sobel 对伽利略的生活、主要成就以及软禁做出了很好地描述。

[2] $E=mc^2$. A Biography of the World's Most Famous Equation, by David Bodanis, Walker and Co., New York, 2000。

[3] The Man Who Changed Everything: The Life of James Clerk Maxwell, Basil Mahon, Wiley, Chichester, UK, 2003.

小结

建立被控系统的数学模型是分析和设计所期望得到系统的第一步。在本章中，我们建立了几个典型系统的模型。每一类系统中的重要方程见表2.1。事实上仅仅通过实验数据获取数学模型也是可行的，这一方法将会在第3章进行简单讨论，详细的讨论见富兰克林(Fanklin)、鲍威尔(Powell)和沃尔克曼的著作(1998年)的第12章。

表2.1 动态模型的主要方程

系统	重要定律或关系	相关方程	方程序号
机械	平移运动(牛顿定律)	$F=ma$	(2.1)
	旋转运动	$M=I\alpha$	(2.14)
电气	运算放大器		(2.46)，(2.47)
机电	电动机定律	$F=Bli$	(2.53)
	发电机定律	$e=Blv$	(2.56)
	在转子中产生的转矩	$T=K_t i_a$	(2.60)
反电动势	转子旋转产生电压	$e=K_e\dot{\theta}_m$	(2.61)
齿轮	实际惯性	$J_{eq}=J_2+J_1n^2$	(2.80)
热流量	热能流量	$q=(1/R)(T_1-T_2)$	(2.81)
	温度与热能流量的关系	$\dot{T}=\frac{1}{C}q$	(2.82)
	比热	$C=mc_v$	(2.83)
液体流量	连续性关系(物质守恒)	$\dot{m}=w_{in}-w_{out}$	(2.88)
	液体作用于活塞的力	$f=pA$	(2.90)
	液体流量的节流效应	$W=(1/R)(p_1-p_2)^{1/\alpha}$	(2.91)

复习题

2.1 什么是“受力图”?

2.2 牛顿定律的两种形式是什么?

2.3 对于控制诸如机器臂这样的结构对象，什么是“合体控制”? 什么是“单体控制”?

2.4 阐述基尔霍夫电流定律。

2.5 阐述基尔霍夫电压定律。

2.6 “运算放大器”这种装置是由谁在什么时候命名的? 为什么要这样命名?

2.7 给运算放大器加零输入电流的主要好处是什么?

2.8 为什么电动机的电枢电阻R_a取小点的值是重要的?

2.9 电动机电势常数的定义和单位是什么?

2.10 电动机转矩常数的定义和单位是什么?

2.11 为什么要把被控对象的实际模型(通常是非线性的)近似成线性模型?

△2.12 写出下列关系式:

(a) 通过物质的热流量;

(b) 物质中的存储热量。

△2.13 给出控制液体流动的三大关系式方程，并为它们命名。

习题

2.1节习题

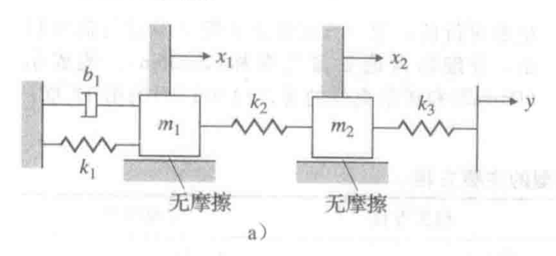
2.1 列写如图2.41所示机械系统的微分方程。对于图2.41a和b，考虑物体在非零初始条件和输入为零的情况下，系统是否做衰减运动直至最终停止运动，并给出理由。

2.2 列写如图2.42所示机械系统的微分方程。考虑物体在非零初始条件和输入为零的情况下，系统是否做衰减运动直至最终停止运动，并给出理由。

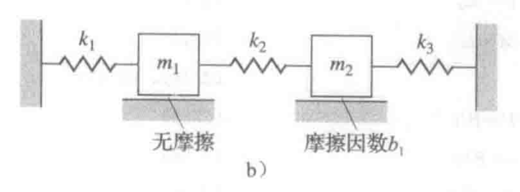
2.3 列写图2.43所示双摆锤系统的运动方程。假设摆锤的位移角足够小，以保证弹簧总是平衡的，摆锤杆长为l，质量忽略不计，且弹簧置于杆下方3/4处。

2.4 列写摆的运动方程，摆和一根长为l、质量为2kg的细杆由枢轴悬浮。为了使周期为1s，此杆应该多长?(细杆I对于终端的惯量为$\frac{1}{3}ml^2$，假定θ足够小，使$\sin\theta\approx\theta$。)你认为，

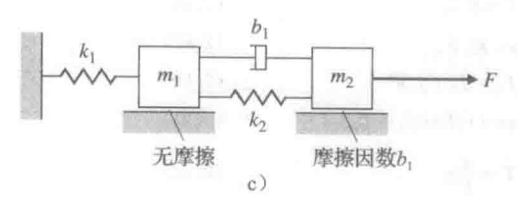
为什么落地式大摆钟一般都是 6ft(1ft=0.3048m)高？



a)



b)



c)

图 2.41 机械系统

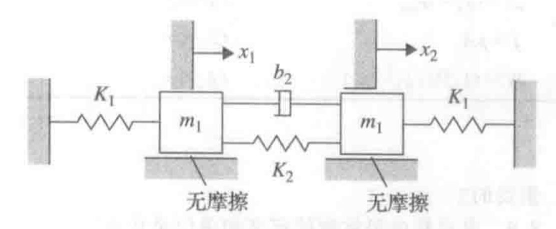


图 2.42 习题 2.2 中的机械系统

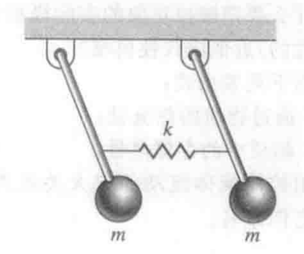


图 2.43 双摆锤

2.5 对于例 2.2 讨论的汽车悬挂装置，使用 Matlab 绘制在汽车存在“单位颠簸”后(如 r 为单位阶跃)汽车和车轮的位置。假定 $m_1=10\text{kg}$，$m_2=250\text{kg}$，$K_w=500\,000\text{N/m}$，$K_s=10\,000\text{N/m}$。若你是车里的乘客，选择你希望的 b 值。

2.6 质量为 m 的物体由弹簧悬置在一固定点，弹簧的弹性系数为 k，列写此运动方程。并仔细考虑什么位置处物体位移为零。

2.7 汽车厂商试图构造主动悬挂系统，最简单的改变就是制造可变化阻尼 $b(u_1)$ 的减震器。也可以制造一个装置与弹簧平行放置，以产生一个作用在车轮轴和汽车上大小相等、方向相反的力 u_2。

(a) 在该控制作用下，修改例 2.2 中的运动方程。

(b) 该系统是线性的吗？

(c) 用力 u_2 完全代替弹簧和减震器可行吗？这是否是一个好的设想？

2.8 在许多机械定位系统中，系统一部分与另一部分之间存在灵活性。在图 2.7 所示实例中，存在太阳面板的柔性。图 2.44 描述了这一情形，其中，力 u 作用在质量体 M 上，另一质量体 m 与它相连。物体之间的这种耦合经常通过弹性系数为 k 的弹簧以及阻尼系数为 b 的阻尼器来建立模型，尽管实际情况比这要复杂得多。

(a) 列写该系统的运动方程。

(b) 建立控制输入 u 和输出 y 之间的传递函数。

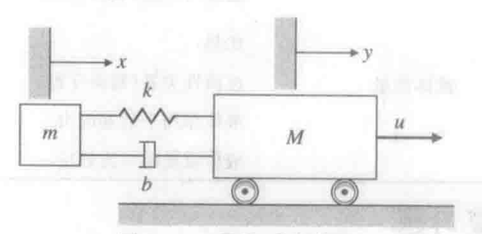


图 2.44 柔性系统简图

2.9 修改例 2.1 中巡航控制运动式(2.4)，使其有如下控制规律；即令

$$u=K(v_r-v) \tag{2.108}$$

其中：

$$v_r=\text{参考速度} \tag{2.109}$$

$$K=\text{常数} \tag{2.110}$$

这是“比例”控制规律，把 v_r 与实际速度之差作为信号来加快或减慢发动机速度。以 v_r 为输入，v 为输出，将运动方程改写为传递函数形式。假定 $m=1500\text{kg}$，$b=70\text{N}\cdot\text{s/m}$，使用 Matlab 研究 v_r 为单位阶跃时的响应。利用试错法，选择 K 值，使控制系统中实际速度能尽可能快地收敛到参考速度，达到满意的效果。

2.10 确定图 2.45 所示机器人横向运动的动力学方程。如图 2.46 的几何图所示，假定它有三个轮子，其中一个单一的、可操纵的车轮在前面，控制器 U_{steer} 直接控制转向角的变化速率。假定机器人沿着一条直线运动，且偏离角非常小。也假定机器人以恒定速度 V_o 运动。在控制器 U_{steer} 处于理想情况下，

列写有关机器人中心横向速度的动态方程。



图 2.45 医疗设备用于交付的机器人

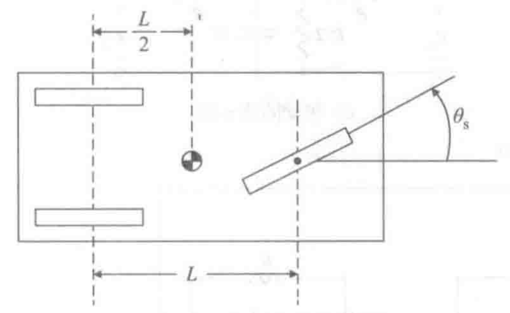


图 2.46 机器人运动模型

2.2 节习题

2.11 首先已知运算放大器的实际模型由下列方程给出，模型如图 2.47 所示

$$V_{out}=\frac{10^7}{s+1}[v_+-v_-]$$

$$i_+=i_-=0$$

应用此模型建立图示简单放大电路的传递函数。

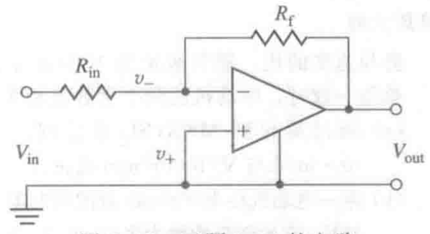


图 2.47 习题 2.11 的电路

2.12 图 2.48 所示为运算放大器的连接。若为理想运算放大器，则有 $V_{out}=V_{in}$。若此运算放大器存在习题 2.11 中的非理想传递函数时，列出此时的传递函数。

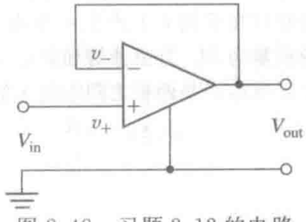


图 2.48 习题 2.12 的电路

2.13 图 2.49 所示为电动机功率放大器的常见连接，目标是让电动机电流跟随输入电压，该连接称为电流放大器。假设感应电阻 r_s 与反馈电阻 R 相比非常小，列写 V_{in} 到 I_a 的传递函数。同时写出当 $R_f=\infty$时的传递函数。

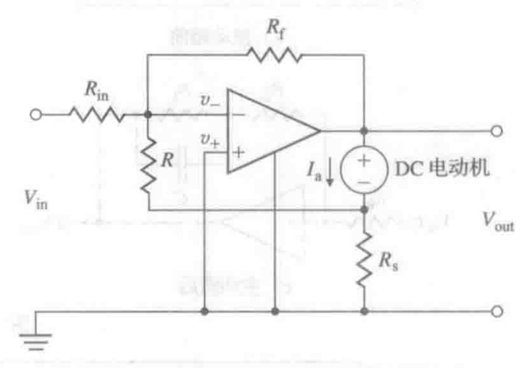


图 2.49 习题 2.13 的运算放大器电路

2.14 如图 2.50 所示，运算放大器的正端以及负端都与反馈连接，如果运算放大器存在习题 2.11 中给出的非理想传递函数，在电路维持稳定的情况下，根据负反馈系数 $N=R_{in}/(R_{in}+R_f)$ 给出正反馈系数 $P=r/(r+R)$的最大可能值。

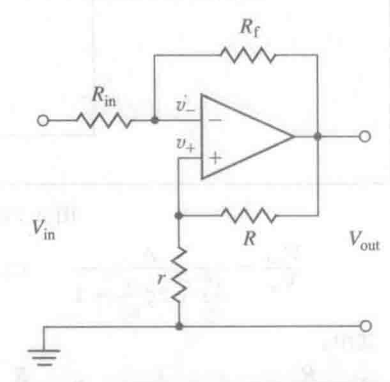


图 2.50 习题 2.14 的运算放大器电路

2.15 列写图 2.51 所示电路的动态方程，并建立其传递函数。

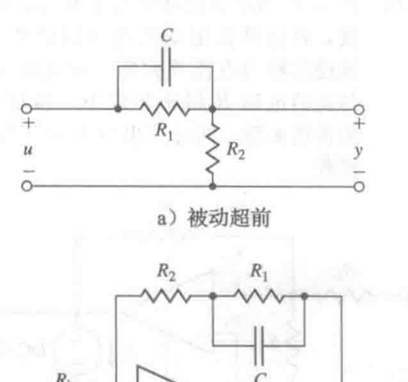
(a) 被动超前电路； (b) 主动超前电路；

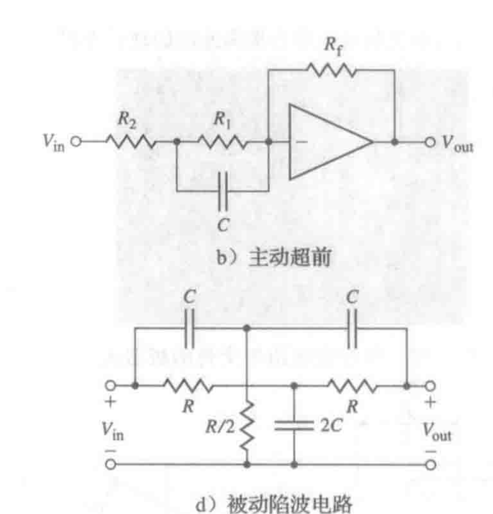
(c) 主动滞后电路； (d) 被动陷波电路。

2.16 图 2.52 所示的具有灵活性电路称之为双二次型电路，因为它的传递函数是两个二阶或二次多项式的比。

通过选取不同的 R_a、R_b、R_c、R_d 的值，此电路可实现低通、带通、高通或带阻(陷波)滤波器。

(a) 说明当 $R_a=R$ 且 $R_b=R_c=R_d=\infty$时，从 V_{in} 到 V_{out} 的传递函数可写为如下低通滤波器：





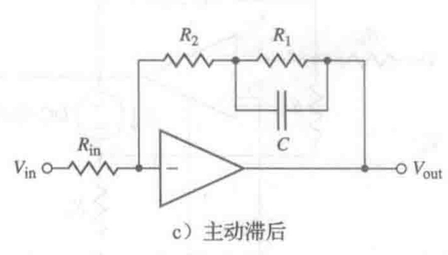


图 2.51

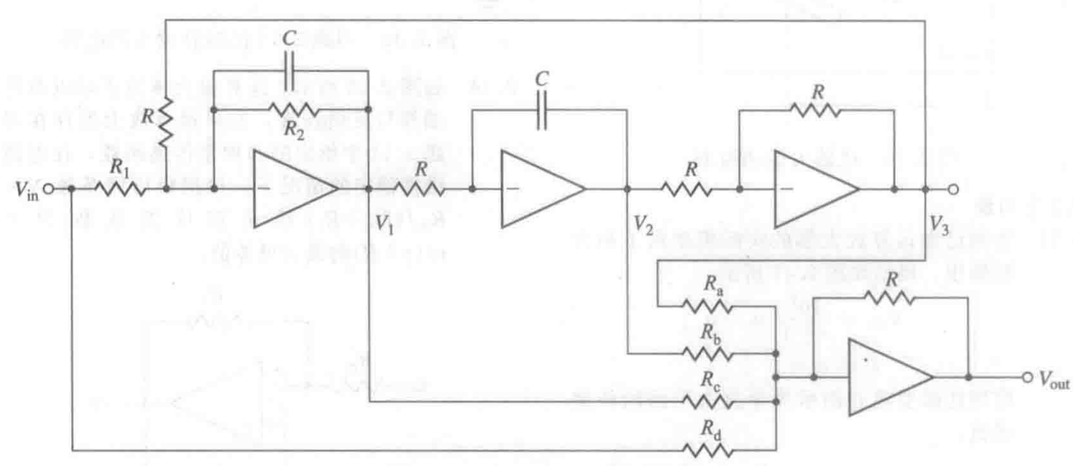


图 2.52 双二次型运算放大器

$$\frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}}=\frac{A}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+2\zeta\frac{s}{\omega_n}+1} \qquad (2.111)$$

其中：

$$A=\frac{R}{R_1};\quad \omega_n=\frac{1}{RC};\quad \zeta=\frac{R}{2R_2}$$

(b) 运用 Matlab 指令 step，在 $A=2$，$\omega_n=2$ 和 $\zeta=0.1$、0.5、1.0 三种情况下，求解并绘制图 2.52 所示双二次型的阶跃响应。

2.17 在图 2.52 双二次型电路中，若 $R_a=R$，$R_d=R_1$ 且 $R_b=R_c=+\infty$，列写其方程和传递函数。

2.3 节习题

2.18 电动机的转矩常数为转矩与电流的比，通常表示为盎司·英寸/安培(oz·in/A)(盎司·英寸有力-距离的量纲，其中 1oz=(1/16)lb[⊖])，电动机的电势常数为反电动势与速度的比，通常表示为 V/1000r/min。单位一致时，电动机的两个常数是相等的。

(a) 通过简化到 MKS(SI) 单位制，说明 oz·in/A与 V/1000r/min 成正比。

(b) 某一电动机在 1000r/min 时的反电动势为 25V，它的转矩常数为多少 oz·in/A?

(c) 若以 N·m/A 为单位，b 问中电动机的转矩常数是多少?

2.19 图 2.53 所示机电系统为电容式传声器的简化模型。此系统由平行的平板电容连接成电路，电容平板 a 固定在传声器框架上。声波穿过接口在平板 b 上产生一个力 $f_s(t)$，平板的质量为 M，且由弹簧和阻尼器连接到框架上。电容 C 是两板之间距离 x 的函数：

$$C(x)=\frac{\varepsilon A}{x}$$

⊖ 1lb=0.454kg。

其中：ε 为两板之间介质的介电常数；A 为平板的表面积。

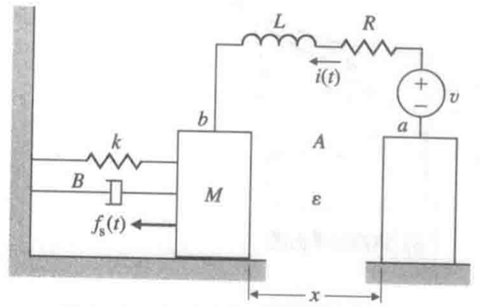


图 2.53 电容式传声器的简化模型

通过平板的电量 q 和电压 e 的关系为

$$q = C(x)e$$

而电场又产生作用在运动平板上的力 f_e，来阻碍平板的运动：

$$f_e = \frac{q^2}{2\varepsilon A}$$

(a) 列写微分方程来描述此系统的运行(可以是非线性的)。

(b) 能否得到线性模型？

(c) 系统的输出是什么？

2.20 机电位置控制中，非常典型的问题是电动机驱动有明显振动模式的载荷。此问题出现在计算机磁盘磁头控制、卷轴—卷尺驱动装置以及许多其他的应用中。

如图 2.54 原理图所示，电动机电势常数为 K_e，转矩常数为 K_t，电枢电感为 L_a，电阻为 R_a，转子惯量为 J_1，黏性摩擦力为 B，负载惯量为 J_2，两惯量体由轴弹簧常数为 k、等效黏性阻力为 b 的轴相连。列写其运动方程。

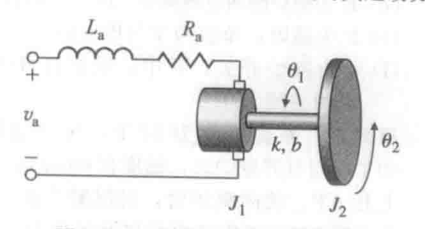


图 2.54 带柔性载荷的电动机

△2.21 对于图 2.45 所示的机器人，伺服电动机与带有齿轮的主传动轮相连，假设已知齿轮比值为 2∶1，从而使作用于主传动轮的输出转矩按伺服输入转矩 2 倍的速度增长。确定机器人速度对伺服转矩的动态方程。假设方程所需的某些量已知，如汽车的质量、惯量和车轮半径。

△2.22 根据图 2.35，当弹簧连接到输出负载时，推导出应用转矩 T_m 和输出 θ_2 之间的传递函数。即，存在作用于输出负载的转矩 T_s，且 $T_s = -K_s\theta_2$.

2.4 节习题

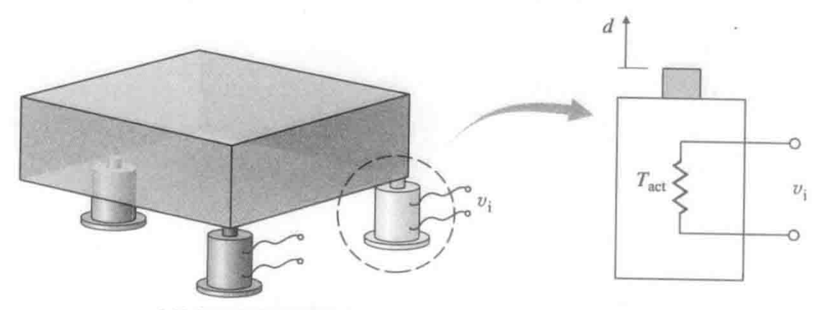
2.23 精密桌的平面简图如图 2.55 所示，它依靠两角下方执行机构的热膨胀提升或降低各自拐角而使桌面保持水平。各个参数为：T_{act} 为执行机构的温度；T_{amb} 为环境的空气温度；R_f 为执行机构和空气之间的热流量系数；C 为执行机构的热容；R 为加热丝电阻。

假定：①执行机构为纯电阻器件，②流入执行机构的热流量与输入电能成正比，③由热膨胀得到的移动量 d 与 T_{act} 和 T_{amb} 之间的差成正比。列写执行机构移动量的大小 d 与外加电压 v_i 之间的微分方程。

2.24 如图 2.56a 所示，空调为高层建筑四楼的每个房间以相同的温度提供冷空气。第四层平面图如图 2.56b 所示，冷空气流入每个房间时，等量的热流量 q 流出房间。列写一组控制每个房间温度的微分方程，其中：T_o 为建筑物外温度；R_o 为热流量穿过外部墙壁的阻力；R_i 为热流量穿过内部墙壁的阻力。

假定：①所有房间都是方形的，②无热流量穿过地面和天花板，③每个房间温度是均匀的。利用对称性简化成三个微分方程。

2.25 两水箱液体流量系统如图 2.57 所示，列写流入第一个水箱的流量与流出第二个水箱的流量间的微分方程。



a）由执行机构保持精密桌水平

b）执行机构侧视图

图 2.55

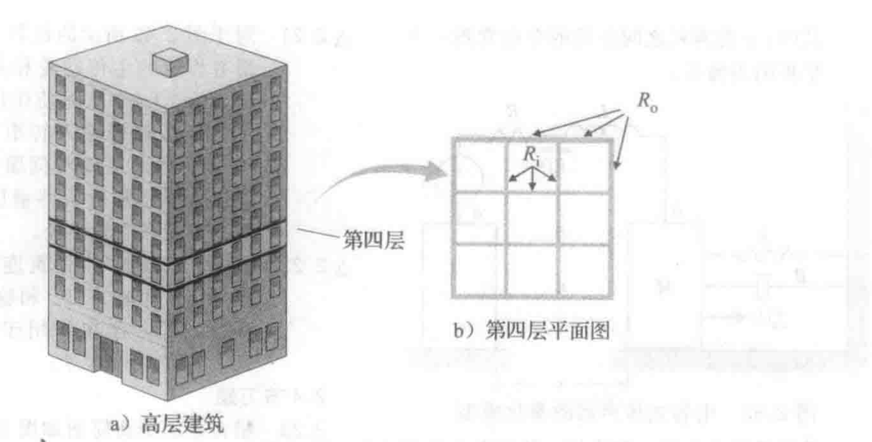


图 2.56 空调建筑

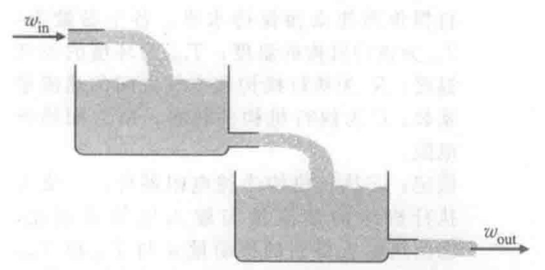


图 2.57 习题 2.25 的两水箱液体流量系统

2.26 某实验室通过两水箱做水流量的实验如图 2.58所示。假定方程(2.93)描述了通过 A、B 或 C 处大小相同的孔的流量。

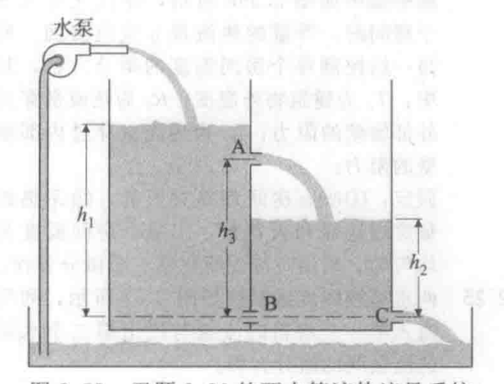


图 2.58 习题 2.26 的两水箱液体流量系统

71
~
83

(a) 当孔 B、C 存在但孔 A 不存在时，列写此系统关于 h_1 和 h_2 的运动方程，假定当 $h_2=10\text{cm}$ 时，流出量为 200g/min。

(b) 当 $h_1=30\text{cm}$ 且 $h_2=10\text{cm}$ 时，求解线性化模型和从水泵流量(cm^3/min)到 h_2 的传递函数。

(c) 假定孔 B 关闭，孔 A 打开，重新分析(a)问和(b)问。假设 $h_3=20\text{cm}$，$h_1>20\text{cm}$ 且 $h_2<20\text{cm}$。

2.27 式(2.81)和式(2.82)为给房屋加热的方程，特殊情况下，用小时表示时间可写为

$$C\frac{dT_h}{dt}=Ku-\frac{T_h-T_o}{R}$$

其中：

(a) C 为房屋的热容，单位为 Btu/℉[⊖]；

(b) T_h 为屋内温度，单位为℉；

(c) T_o 为屋外温度，单位为℉；

(d) K 为壁炉的额定热流量，$K=90\,000\text{Btu/h}$；

(e) R 为热阻，单位为℉/(Btu/h)；

(f) u 为壁炉开关，其中，壁炉打开为 1，壁炉关闭为 0。

经测定，外界温度为 32 ℉，房屋温度为 60℉，当打开壁炉时，温度在 6min(0.1h)内上升 2℉。关闭壁炉时，房屋温度在 40min 内下降 2℉。该房屋的 C 和 R 的值为多少？

⊖ 1Btu=1055.056J。

第3章 动态响应

系统响应介绍

第2章讨论了如何获取一个系统的动态模型。在进行控制系统设计时，重要的是看试验性的设计与期望的性能在多大程度上是匹配的。我们通过系统模型方程的求解来解决这个问题。

这里有两种方法求动态方程的解。为了快速近似地分析，我们使用线性分析法。所得到的系统响应的近似结果，使我们能更深入地了解动态方程的解为何具有某些特征，以及如何改变系统以使其按所期望的方向来调整。与之相反，精确的系统响应图通常需要使用计算机辅助对非线性运动方程进行数值仿真。本章主要关注线性分析和可用于解决线性系统时间响应的计算机工具。

研究系统动态响应可在三个领域中进行：拉普拉斯变换(s平面)、频率响应和状态空间(用状态变量描述来分析)。控制工程师应该能熟练地掌握这些，因此第5～7章分别对这三方面做深入阐述。本章主要是在研究s平面分析频率响应和状态空间之前，讨论一些必要的基本数学方法。

章节概述

3.1节(和附录A)将回顾一下拉普拉斯变换。拉普拉斯变换能将微分方程转化为易于处理的代数形式。此外，还有两种图形工具可用于对系统模型进行可视化处理，以及评估系统各部分间相互关联的数学关系。一种是已在第1章中介绍的框图。3.2节将讨论框图和传递函数的处理方法。

一旦确定了传递函数，我们就可以求出它的零极点，这些零极点可以提供关于系统特征的大量信息，如3.1节介绍的频率响应。3.3～3.5节将集中讲述零点和极点以及运用它们来达到所期望的系统特征的方法。当引入反馈时，系统就有可能不稳定。为了研究系统反馈带来的不稳定影响，3.6节将介绍稳定性的定义和劳斯判据。劳斯判据通过检查系统特征方程的系数，来确定系统的稳定性。最后，3.7节对于本章的内容提供了一个历史展望。另一种可供选择的图形化形式的系统分析方法是信号流图方法，信号流向是由复杂的传递函数来确定的，都归纳在 www.fpe7e.com 的附录W3.2.3中，以供参考及查阅。

3.1 拉普拉斯变换回顾

几乎所有应用于线性时不变(LTI)系统的分析工具，都是基于这类系统的以下两个性质：

(1) 线性系统响应服从叠加原理。

(2) 线性时不变(LTI)系统的响应可以描述为系统输入和单位脉冲响应的卷积。

接下来，将简单介绍叠加原理，卷积和脉冲响应的定义。

从第二个性质(下面将介绍)可直接得到，输入为指数形式的线性时不变系统的响应也是指数形式。这一结论是我们采用傅里叶(Fourier)变换和拉普拉斯变换研究线性时不变系统的主要原因。

3.1.1 卷积响应

叠加原理指出如果系统的输入可以表示成若干信号之和，那么系统的响应可以表示为

各信号的单独响应之和的形式。从数学方面描述叠加原理：考虑一个输入为u、输出为y的系统。进一步假设系统是静止的，给定一个输入$u_1(t)$，观测输出为$y_1(t)$，系统重新恢复静止后，给定另一个输入$u_2(t)$，再次测得输出为$y_2(t)$，那么我们构造混合输入为$u(t)=\alpha_1 u_1(t)+\alpha_2 u_2(t)$。最后，如果应用叠加原理，那么相应响应将是$y(t)=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)$。叠加原理仅仅适用于线性系统。

例 3.1 叠加原理

该例证明，对于可以建模成一阶线性微分方程的系统

$$\dot{y}+ky=u$$

叠加原理是成立的。

解答。令$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$，并且假设$y=\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$，那么$\dot{y}=\alpha_1 \dot{y}_1+\alpha_2 \dot{y}_2$。如果将上述表达式代入系统方程，可得

$$\alpha_1 \dot{y}_1+\alpha_2 \dot{y}_2+k(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2$$

由此可得

$$\alpha_1(\dot{y}_1+ky_1-u_1)+\alpha_2(\dot{y}_2+ky_2-u_2)=0 \tag{3.1}$$

如果y_1是输入为u_1时方程的解，y_2是输入为u_2时方程的解，那么式(3.1)满足，系统响应为各个输入响应之和，叠加原理成立。◀

注意到，如果k是一个时间函数，式(3.1)的叠加原理结果也会保持。如果k是一个常数，我们称此系统为时不变系统。在这种情况下，可得以下结论，如果输入是时滞的或随时间变化的，那么除了同样的变化之外，输出是未改变的，从数学角度描述如下：如果$y_1(t)$是输入为$u_1(t)$时的系统响应，那么$y_1(t-\tau)$是输入为$u_1(t-\tau)$时的系统响应。

例 3.2 时不变性

考虑系统

$$\dot{y}_1(t)+k(t)y_1(t)=u_1(t) \tag{3.2}$$

并且

$$\dot{y}_2(t)+k(t)y_2(t)=u_1(t-\tau)$$

其中：τ是常数。假设$y_2(t)=y_1(t-\tau)$那么

$$\frac{dy_1(t-\tau)}{dt}+k(t)y_1(t-\tau)=u_1(t-\tau)$$

作变量代换$t-\tau=\eta$，那么

$$\frac{dy_1(\eta)}{d\eta}+k(\eta+\tau)y_1(\eta)=u_1(\eta) \tag{3.3}$$

86

仅当$\tau=0$或者$k(\eta+\tau)=k=$常数时，式(3.3)满足式(3.2)，在这种情况下，有

$$\frac{dy_1(\eta)}{d\eta}+ky_1(\eta)=u(\eta)$$

这就是例3.1中的第1个式子。所以，我们得到以下结论：如果系统是时不变的，$y(t-\tau)$将是输入为$u(t-\tau)$时的系统响应；也就是说，如果输入延迟τ，那么输出也会延迟τ。◀

给定一个一般信号，只需通过叠加将给定的信号简单地分解为若干基本信号的和的形式，我们就能够求解线性系统的响应，总结得出：系统对一般信号的响应就是对基本信号响应的和。为了处理以上问题，基本信号需要有广泛的代表性，并且一定能很容易地得到它们的响应。用于线性系统的最常见的基本信号为脉冲信号和指数信号。

假设一个线性时不变系统的输入信号是一个短脉冲$u_1(t)=p(t)$，并且相应的输出信号为$y_1(t)=h(t)$。如图3.1a所示，如果这个输入按比例缩小到$u_1(t)=u(0)p(t)$，那么依据叠加原理的扩展性质，输出响应将是$y_1(t)=u(0)h(t)$。已证明：一个线性时不变系统遵循时不变特性。如果我们把这个小脉冲信号延迟时间τ，那么输入是$u_2(t)=p(t-\tau)$，并且输出响应也将以同样的时刻延迟至$y_2(t)=h(t-\tau)$。如图3.1b所示，在图3.1c中，

依据叠加原理，两个短脉冲的响应可以表示成各自输出响应之和的形式。如果把 4 个脉冲信号作为输入，那么输出响应将是这 4 个单独响应之和，如图 3.1d 所示，对于任何输入信号 $u(t)$ 都可以被近似成若干脉冲信号的叠加，如图 3.2 所示，定义一个短脉冲 $p_\Delta(t)$ 作为一个具有单位面积的矩形脉冲如

$$p_\Delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta}, & 0\leqslant t\leqslant \Delta\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{3.4}$$

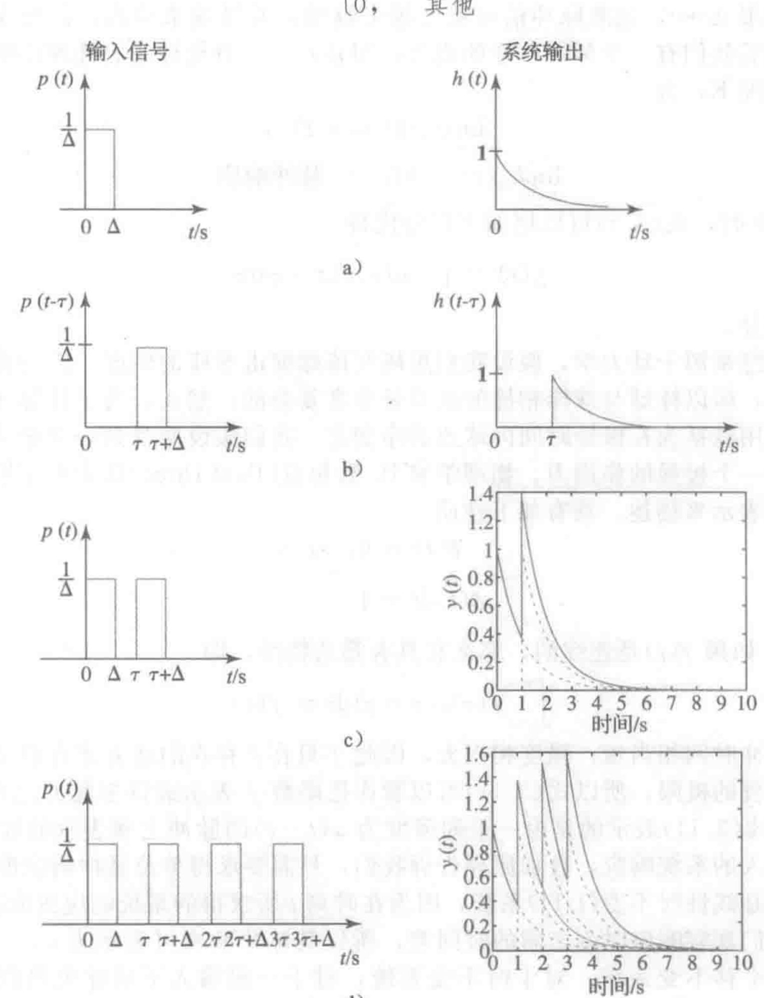


图 3.1　带有一系列短脉冲输入信号的系统响应的卷积示意图

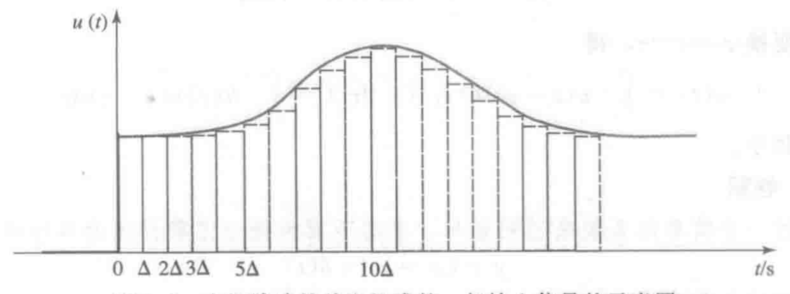


图 3.2　由短脉冲的总和组成的一般输入信号的示意图

如图 3.1a 所示，假设系统响应 $p_\Delta(t)$ 被定义为 $h_\Delta(t)$，从时刻 $n\Delta$ 到 $\Delta u(k\Delta)p_\Delta(k\Delta)$ 的系统响应为

$$\Delta u(k\Delta)h_\Delta(\Delta n-\Delta k)$$

依据叠加原理，在时刻 t，若干短脉冲的总响应如下

87 ~ 88

$$y(t)=\sum_{k=0}^{k=+\infty}\Delta u(k\Delta)h_\Delta(t-\Delta k) \tag{3.5}$$

如果我们取极限 $\Delta\to 0$，基准脉冲信号就会越来越窄，并且越来越高，最终保持在一个常数区域内，然后我们有一个脉冲信号的概念，即 $\delta(t)$，这将允许我们处理连续信号。

在这种情况下，有

$$\lim_{\Delta\to 0}p_\Delta(t)=\delta(t) \tag{3.6}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}h_\Delta(t)=h(t)=\text{脉冲响应} \tag{3.7}$$

此外，当 $\Delta\to 0$ 时，式(3.5)可以用如下积分代替

$$y(t)=\int_0^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.8}$$

这就是卷积积分。

脉冲的思想来源于动力学，假设我们想研究棒球撞击球棒的情况。因为棒球会变形并且球棒会弯曲，所以棒球与球棒相撞的细节是非常复杂的；然而，为了计算球的路径，我们将撞击的作用概括为在极短时间内球速的净变化。我们假设球受到一个脉冲，即在极短的时间内受到一个极强的作用力。物理学家 P. 狄拉克(Paul Dirac)认为该作用力可以用脉冲 $\delta(t)$ 的数学表示来描述。具有如下性质

$$\delta(t)=0,\quad t\neq 0 \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{3.10}$$

在 $t=\tau$ 时刻，如果 $f(t)$ 是连续的，那么它具有筛选特性，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(\tau-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t) \tag{3.11}$$

换句话说，脉冲时间相当短，强度相当大，因此 f 只在 δ 存在的地方才有意义。因为积分是一个求和过程的极限，所以式(3.11)可以看作把函数 f 表示成许多脉冲之和。如果用 u 代替 f，那么式(3.11)表示的是由一系列强度为 $u(t-\tau)$ 的脉冲之和表示的输入 $u(t)$。为了求出任意输入的系统响应，叠加原理告诉我们，只需要求得单位脉冲响应即可。

如果系统是线性时不变(LTI)系统，因为在时刻 t 所求得的系统响应只取决于在时刻 τ 时的输入和我们观察响应时刻之间的时间差，所以其脉冲响应可表示为 $h(t-\tau)$。因此时不变系统也叫平移不变系统。对于时不变系统，对于一般输入下的输出可以由如下积分给出

89

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.12}$$

或通过坐标变换 $\tau_1=t-\tau$，得

$$y(t)=\int_{+\infty}^{-\infty}u(t-\tau_1)h(\tau_1)(-\mathrm{d}\tau_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.13}$$

这就是卷积积分。

例 3.3 卷积

我们通过一个简单的系统来说明卷积。考虑下面由微分方程描述的系统的脉冲响应：

$$\dot{y}+ky=u=\delta(t)$$

脉冲之前的初始条件为 $y(0)=0$。

解答。因为 $\delta(t)$ 仅仅在 $t=0$ 时刻才有意义，我们对此方程在 0^- 到 0^+ 之间求积分，

得到

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y}\mathrm{d}t + k\int_{0^-}^{0^+} y\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t$$

$\dot{y}$的积分可简单地看成是 y，y 在小范围内的积分为 0，并且这个脉冲在相同范围内的积分是单位 1，所以

$$y(0^+) - y(0^-) = 1$$

由于系统在有脉冲之前是静止的，即 $y(0^-)=0$。所以，脉冲的响应为 $y(0^+)=1$。对于正的时间，有微分方程

$$\dot{y} + ky = 0, \quad y(0^+) = 1$$

如果假设方程的一个解为 $y=A\mathrm{e}^{st}$，那么 $\dot{y}=As\mathrm{e}^{st}$。于是上述方程变为

$$As\mathrm{e}^{st} + kA\mathrm{e}^{st} = 0$$

$$s + k = 0$$

$$s = -k$$

因为 $y(0^+)=1$，必然有 $A=1$。因此 $t>0$ 时脉冲响应的解为 $y(t)=h(t)=\mathrm{e}^{-kt}$。考虑到 $t<0$时 $h(t)=0$，我们定义单位阶跃函数为

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

在这个定义下，一阶系统脉冲响应为

$$h(t) = \mathrm{e}^{-kt}1(t)$$

对于一个一般输入，系统响应可以通过以下输入的脉冲响应的卷积给出：

90

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k\tau}1(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k\tau}u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

◀

在线性时不变系统中，对于一般输入，输出由以下积分给出：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.14}$$

注意，积分上下限是无穷。因此，当$t<0$时，h 和 u 可能都是非零的。当$t<0$时，如果 h 非零，这意味着在有输入之前系统响应就存在了！这样的系统称为非因果的，因为非因果系统不遵守通常系统的因果关系的规律[一]。当然所有的物理系统都是因果的。此外，在大多情况下我们感兴趣的是在 $t=0$ 时加入输入。在这种情况下因果系统的积分可以被重写为

$$y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.15}$$

3.1.2 传递函数和频率响应

第 2 章提出了传递函数简要的概念。稍后，我们将用卷积积分给出这一概念的严谨表达式。直接求解卷积积分式(3.14)是比较困难的。然而，使用由式

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

定义的拉普拉斯变换能够给出一个间接方法[二]，事实上，应用拉普拉斯变换到卷积公式，得到

91

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

[一] 如果输出不依赖于未来的输入，也就是“系统不受将来输入的影响”，那么系统是因果的。
[二] 许多拉普拉斯变换的性质在附录 A 中给出。

接下来，交换积分顺序，首先对 t 进行积分，即

$$Y(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对内层积分作变量替换 $t-\tau=\eta$，得到

$$Y(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(\eta)\mathrm{e}^{-s(\eta+\tau)}\mathrm{d}t\right]h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.16}$$

$$Y(s)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(\eta)\mathrm{e}^{-s\eta}\mathrm{d}\eta\right]\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$Y(s)=U(s)H(s)$$

在这个解中，$U(s)$是输入时间函数的拉普拉斯变换，并且 $H(s)$为脉冲响应的拉普拉斯变换，将其定义为传递函数，通过此变换，复杂的卷积积分被转换为简单变换的乘积。接下来要对变换和传递函数进行解释。首先，一般情况下，不是对于变量 s 的所有值，变换的积分都收敛。实际上，它们仅仅在 s 平面中的一个有限区域内有定义。

对于 e^{st}形式的输入，直接可得卷积结果为 $H(s)\mathrm{e}^{st}$。注意，输入和输出都是指数形式的时间函数，并且输出和输入的不同仅仅在于输出具有幅值 $H(s)$。$H(s)$定义为系统的传递函数。常数 s 可以为复数，可表示为 $s=\sigma_1+\mathrm{j}\omega$。所以，输入和输出都可以是复数。如果在式(3.13)中，令 $u(t)=\mathrm{e}^{st}$，那么

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{s(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{st}\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{e}^{st}$$

92

$$y(t)=H(s)\mathrm{e}^{-st} \tag{3.17}$$

其中：

$$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3.18}$$㊀

拉普拉斯定义了这个积分，所以称为拉普拉斯变换。注意，积分区间为从 $-\infty$ 到 $+\infty$，意味着 $h(t)$在任意时刻都可能有值。需要对式(3.18)进行解释㊁，注意，对于所有的时间 t，输入为指数形式，式(3.18)表示的是对所有时间的响应，因此没有初始条件。从而式(3.17)给出了系统的稳态行为。所以，如果对于所有时间系统输入是指数形式的，并且传递函数 $H(s)$已知，输出很容易通过乘法计算，而没必要使用卷积！一个重要的结论是如果输入是指数时间函数，那么输出也是指数时间函数，而它们的比值就是传递函数。对于任意的因果系统，$h(t)=0$，如果 $t<0$，那么积分的上下限可以变成在 0 到 $+\infty$，即：

$$H(s)=\int_{0}^{+\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

对于因果系统，式(3.13)简化为

$$y(t)=\int_{0}^{+\infty}h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3.19}$$

例 3.4 传递函数

计算例 3.1 中的系统传递函数，并求输入为 $u=\mathrm{e}^{st}$ 时的输出 y，$-\infty<t<+\infty$，其中

㊀ 对于任意的 s，积分不是都是收敛的，因此必须小心以确保结果没有用到积分不存在的点处。具体细节参考附录 A。

㊁ 相应的系统输出是众所周知的结果，即解线性常微分方程得到的一个特解。

s为一个给定复数。

解答。例3.3中的系统方程为

$$\dot{y}(t)+ky(t)=u(t)=\mathrm{e}^{st} \tag{3.20}$$

假设 $y(t)$ 表示成 $H(s)\mathrm{e}^{st}$。于是 $\dot{y}=sH(s)\mathrm{e}^{st}$ 且式(3.20)可化为

$$sH(s)\mathrm{e}^{st}+kH(s)\mathrm{e}^{st}=\mathrm{e}^{st} \tag{3.21}$$

求得传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{1}{s+k}$$

93

将此式代入到式(3.17)中，得到输出为

$$y(t)=\frac{\mathrm{e}^{st}}{s+k}$$

不需要计算式(3.18)中的积分就可以得到系统的传递函数。相反，可先假设有形如式(3.17)的一个解，将其代入系统的微分方程中，从而求得系统的传递函数 $H(s)$。

传递函数的正式定义如下：从系统输入 $U(s)$ 到输出 $Y(s)$ 的增益 $H(s)$ 称为该系统的传递函数。这是系统输出的拉普拉斯变换与系统输入的拉普拉斯变换之比。我们可以明确地推导出传递函数。如果对式(3.19)两边取拉普拉斯变换，得到 $Y(s)=H(s)U(s)$ 并且

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=H(s) \tag{3.22}$$

关键是假设系统的所有初始条件都为0。

假设所有的初始条件为0，传递函数 $H(s)$ 是系统的输出与输入拉普拉斯变换的比值。

如果输入 $u(t)$ 是单位脉冲 $\delta(t)$，那么 $y(t)$ 是单位脉冲响应。$u(t)$ 的拉普拉斯变换是1，并且 $y(t)$ 的拉普拉斯变换是 $H(s)$，因为

$$Y(s)=H(s) \tag{3.23}$$

换句话说，传递函数 $H(s)$ 是单位脉冲响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

所以，应用单位脉冲和测量产生的响应是描述线性时不变系统的一种方法，这就是传递函数的一种描述(拉普拉斯反变换)。

例如，给定一个输出为 $y(t)$，输入为 $u(t)$ 的三阶系统的常微分方程为

$$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+a_3y=b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u \tag{3.24}$$

在零初始条件 $(y(0^-)=\dot{y}(0^-)=\ddot{y}(0^-)=u(0^-)=\dot{u}(0^-)=0)$ 下，我们对方程两边进行拉普拉斯变换，得

$$s^3Y(s)+a_1s^2Y(s)+a_2sY(s)+a_3Y(s)=b_1s^2U(s)+b_2sU(s)+b_3U(s) \tag{3.25}$$

94

$$(s^3+a_1s^2+a_2s+a_3)Y(s)=(b_1s^2+b_2s+b_3)U(s)$$

从而推导出传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{b(s)}{a(s)} \tag{3.26}$$

这种思想可以很容易地扩展到一个 n 阶系统中。

例3.5 RC电路的传递函数

计算如图3.3所示电源驱动的RC电路的传递函数。

解答。由基尔霍夫电压定律得系统方程为

$$Ri(t)+y(t)=u(t)$$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$$

或者

$$RC\dot{y}+y=u(t)$$

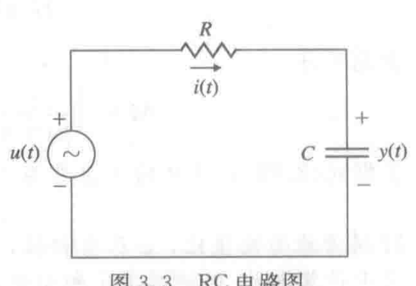


图3.3 RC电路图

如果输入电压是单位脉冲信号，即

$$RC\dot{y}+y=\delta(t)$$

并且对上述方程两边取拉普拉斯变换(附录A)，得

$$RC(sY(s)-y(0^-))+Y(s)=U(s)=1$$

然后在零初始条件($y(0^-)=0$)下，得到

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=Y(s)=\frac{1}{RCs+1}$$

输出，就是脉冲响应也就是$Y(s)$的拉普拉斯反变换

$$y(t)=h(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}1(t)$$

所以，此系统的传递函数为

95

$$H(s)=\mathscr{L}\{h(t)\}=\frac{1}{RCs+1}$$

线性时不变系统的指数响应往往用于求频率响应或者正弦信号响应。首先，我们将正弦信号的频率响应表示成两个指数表达式之和(欧拉(Euler)方程)：

$$A\cos(\omega t)=\frac{A}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})$$

如果在基本响应式(3.17)中令$s=\mathrm{j}\omega$，那么对于输入$u(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$的响应为$y(t)=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$；类似地，对于$u(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$的响应为$H(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$，由叠加原理得该余弦信号的响应为这两个指数响应之和，即

$$y(t)=\frac{A}{2}[H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+H(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}] \tag{3.27}$$

传递函数$H(\mathrm{j}\omega)$为复数时，可以表示为极坐标$H(\mathrm{j}\omega)=M(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$形式，简记为$H=M\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$的形式或振幅-相位形式。将此代入到式(3.27)中，得到

$$\begin{aligned} y(t)&=\frac{A}{2}M(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)})\\ &=AM\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中：

$$M=|H(\mathrm{j}\omega)|,\quad \varphi=\angle H(\mathrm{j}\omega)$$

这意味着，传递函数为$H(s)$的系统，其输入是幅值为A的正弦信号，那么输出也是同频率的幅值为AM的正弦信号，且存在φ角相移动。

例3.6　频率响应

对于例3.1中的系统，求其正弦输入$u=A\cos(\omega t)$的系统响应，即：

(1) 求频率响应，并画出$k=1$时的频率响应图。

(2) 确定系统在$k=1$时，对于正弦输入$u(t)=\sin(10t)$的全响应。

解答。在例3.4中，我们已得到系统的传递函数。为了求解频率响应，令$s=\mathrm{j}\omega$，那么

$$H(s)=\frac{1}{s+k}\Rightarrow H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega+k}$$

由此可得

$$M=\left|\frac{1}{\mathrm{j}\omega+k}\right|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+k^2}},\quad \varphi=-\arctan\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

根据式(3.28)，正弦输入信号的系统响应为

$$y(t)=AM\cos(\omega t+\varphi) \tag{3.29}$$

M通常称为幅值比，φ称为相位，它们都是输入频率ω的函数。以下的Matlab程序可以

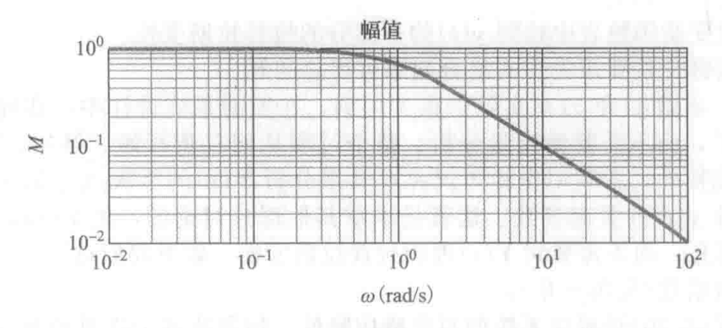
96

用于计算$k=1$时的幅值比和相位，如图3.4所示。在Matlab中，logspace命令用来设置

频率范围(对数刻度)，bode命令用来计算频率响应。因为这种描述频率响应的方法(在对数坐标上)是由H. W. 伯德提出的；所以该频率图也称为“伯德图”[⊖](见6.1节)。

```
k = 1;
tf=('s');                        % define Laplace variable
sysH = 1/(s+k);                  % define system by its transfer function

w = logspace(-2,2);              % set frequency w to 50 values from
                                   10^-2 to 10^+2
[mag,phase] = bode(sysH,w);      % compute frequency response
loglog(w,squeeze(mag));          % log-log plot of magnitude
semilogx(w,squeeze(phase));      % semi-log plot of phase
```



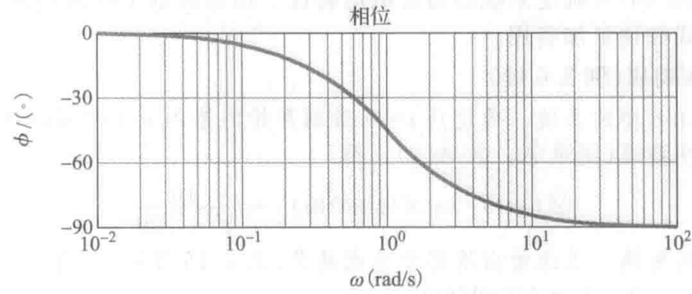


图 3.4 $k=1$ 时的频率响应

作为式(3.18)的推广，我们来研究信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

从而推广频率响应。

97

如果将该定义用于 $u(t)$ 和 $y(t)$，并应用卷积积分，即式(3.13)，可得

$$Y(s)=H(s)U(s) \tag{3.31}$$

其中：$Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别是 $y(t)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换。

与傅里叶变换只关注系统的稳态响应相比，式(3.30)的拉普拉斯变换是用来研究反馈系统的全响应特性，包括暂态响应，即系统对初始条件或突然施加信号的时间响应。在控制领域，普遍遇到的问题是求系统对于输入 $u(t)$ 的输出响应 $y(t)$，以及系统模型。应用式(3.30)，我们就有了计算线性时不变系统输入的拉普拉斯变换和系统传递函数拉普拉斯变换的方法，而由式(3.31)可知，输出的拉普拉斯变换可为两者之积。如果想得到输出的时间函数，就需要对 $Y(s)$ 进行反变换得到拉普拉斯反变换式。这一步通常不进行明确说明。然而，明白由 $Y(s)$ 如何得到 $y(t)$ 非常重要，因为它能够使我们比较深入地了解一般线性系统的性能。因此，对于给定的线性系统，其传递函数为 $H(s)$，输入信号为 $u(t)$，应用拉普拉斯变换来确定 $y(t)$ 步骤如下。

⊖ 注意，%在Matlab中表示注释。

步骤1)确定系统的传递函数：$H(s)=\mathscr{L}\{$系统脉冲响应$\}$。用以下步骤计算$H(s)$。

(a) 对运动方程进行拉普拉斯变换。在这个过程中，拉普拉斯变换表格是经常用到的。

(b) 求解拉普拉斯变换后所得的代数方程，这一步往往要借助相应的框图方法，这里可以通过图形处理或者用 Matlab 来解该方程。

步骤2)确定输入信号的拉普拉斯变换：$U(s)=\mathscr{L}\{u(t)\}$。

步骤3)计算输出的拉普拉斯变换：$Y(s)=H(s)U(s)$

步骤4)用部分分式展开方法将$Y(s)$分解。

步骤5)对步骤4)中的$Y(s)$进行拉普拉斯反变换，得到系统输出。$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$[即将$Y(s)$转化为$y(t)$]：

(a) 在时域变换函数表中找到$y(t)$的各部分的拉普拉斯变换。

(b) 将这些部分按要求的形式组合起来可得总的解。

如前所述，步骤4)和5)在实际中很少用到。在控制系统设计中，往往只是做一些定性分析就足够了，而不需要做定量分析。整个过程从前三步开始。然而，除了对$Y(s)$进行拉普拉斯反变换外，常利用先验知识和直觉来分析$Y(s)$的零极点分布对响应的基本属性，以便于估计$y(t)$的关键参数。这就是本章其他部分讨论的，由$Y(s)$的零极点组合得到有关$y(t)$的信息。而不需要对$Y(s)$进行拉普拉斯变换。如果我们可以获得伯德图，也可以从中获得等价信息(见第6章)。

98

虽然通过式(3.30)可确定系统的暂态响应特性，但那些基于零时刻开始输入的拉普拉斯变换的简单形式往往更加有用。

例3.7　频率响应(例3.6续)

继续考虑例3.6中的系统，确定从$t=0$时刻开始的输入$u(t)=\sin(10t)1(t)$的系统响应，由拉普拉斯变换表(附录A，表A.2)，得

$$\mathscr{L}\{u(t)\}=\mathscr{L}\{\sin(10t)\}=\frac{10}{s^2+100}$$

这里表示拉普拉斯变换。系统输出用部分分式展开(见3.15节)，可得

$$\begin{aligned}Y(s)&=H(s)U(s)\\&=\frac{1}{s+1}+\frac{10}{s^2+100}\\&=\frac{\alpha_1}{s+1}+\frac{\alpha_0}{s+\mathrm{j}10}+\frac{\alpha_0^*}{s-\mathrm{j}10}\\&=\frac{\frac{10}{101}}{s+1}+\frac{\frac{\mathrm{j}}{2(1-\mathrm{j}10)}}{s+\mathrm{j}10}+\frac{\frac{-\mathrm{j}}{2(1+\mathrm{j}10)}}{s-\mathrm{j}10}\end{aligned}$$

系统输出的拉普拉斯反变换为(见附录A)

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{10}{101}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{\sqrt{101}}\sin(10t+\varphi)\\&=y_1(t)+y_2(t)\end{aligned}$$

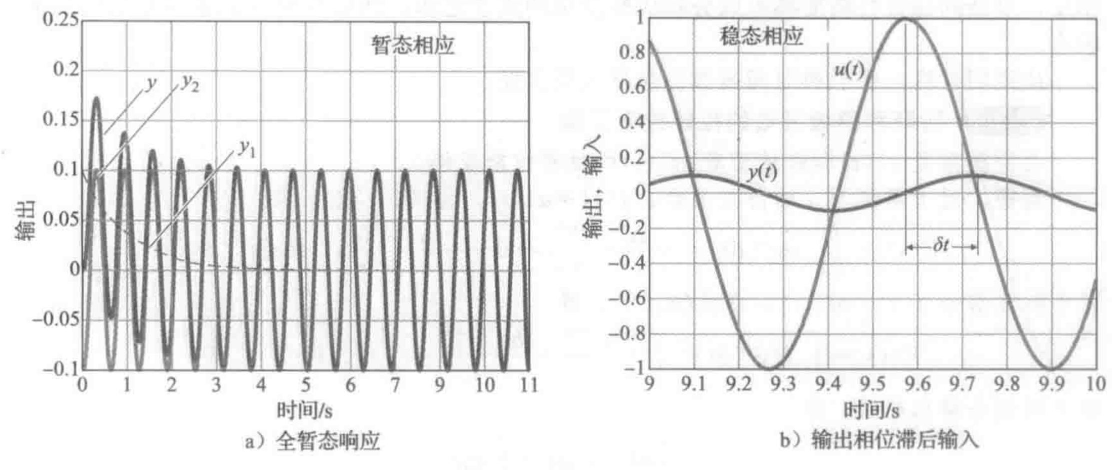
其中：

$$\varphi=\arctan(-10)=-84.2°$$ ◀

$y_1(t)$为暂态响应分量，随着时间推移衰减为零；$y_2(t)$为稳态响应分量，它与式(3.29)给出的响应相等。图3.5a展示了不同分量(y_1，y_2)和复合量(y)的输出响应与时间的关系图。输出频率为10rad/s，从图3.5b中可以测得稳态相位差约为$10*\delta t=1.47\text{rad}=84.2°$[⊖]图3.5b说明输出滞后输入84.2°，并且输出的稳态振幅的幅值比是$\frac{1}{\sqrt{101}}=0.0995$

⊖ 相位差也可由 Lissajous 方式来确定。

(即输入信号振幅乘以传递函数在 $\omega=10\text{rad/s}$ 处的幅值)。 



a) 全暂态响应　　b) 输出相位滞后输入

图 3.5

该例说明，对于线性时不变系统，如果输入是频率为 ω 的正弦信号，那么输出响应也为同频率且振幅比为传递函数幅值的正弦信号。此外，传递函数在输入频率处的相位给出了输出与输入信号之间的相位差。所以，幅值比与相位差可以通过计算刚刚讨论的传递函数得到；当然，我们还可以很容易通过实验的方法测得这些参数，即用一已知正弦形式的输入信号驱动系统，然后测量系统输出的稳态振幅和相位。输入信号的频率要足够丰富，从而得到如图 3.4 所示的曲线。 100

3.1.3 拉普拉斯变换

在本书中，应用的是单边(或单侧)拉普拉斯变换，即用 0^-(即 $t=0$ 之前的值)作为式(3.30)的积分下限。$f(t)$的单边拉普拉斯变换标记为$\mathscr{L}_-\{f(t)\}=F(s)$，它是复变量 $s=\sigma_1+\mathrm{j}\omega$ 的函数。这里

$$F(s)\stackrel{\text{def}}{=\!=\!=}\int_{0-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{3.32}$$

当 $\sigma_1>0$ 时，被积函数中的指数衰减项提供了内在的衰减因子。这意味着，即使在 $t\to+\infty$时 $f(t)$都不为零，如果 f 的增长率低于指数项的增长率，且 σ 足够大，则被积函数将趋于零。积分下限 0^- 允许用 $t=0$ 时刻的脉冲函数代替，如例 3.3 所示；然而，在 $t=0^-$ 和$t=0$ 时刻的区别在实际中并不经常出现。因此，大多数情况下，去掉 $t=0$ 时刻的负上标；但是，当在 $t=0$ 时刻有脉冲输入时，我们将仍然用符号 $t=0^-$。

如果式(3.32)是单边拉普拉斯变换，那么式(3.30)为双边拉普拉斯变换㊀。从这往后，我们将用$\mathscr{L}$代替$\mathscr{L}_-$。

在式(3.32)的基础上正式定义拉普拉斯变换，我们能够确定拉普拉斯变换的性质并且能够计算常见时间函数的拉普拉斯变换。借助拉普拉斯变换分析线性系统往往要用到常用性质表和时间函数表。所以我们在附录 A 中提供了这些信息。有了时间函数，拉普拉斯变换表和性质表，允许我们通过一些简单信号来求复杂信号的拉普拉斯变换。对于拉普拉斯变换深入的研究和更为详尽的表格，见丘吉尔(Churchill，1972)和坎贝尔(Campbell)和福斯特(Foster，1948)。对双边拉普拉斯变换的研究，见范·德尔·波尔(Van der Pol)和布雷默尔(Bremmer，1955)。这些作者表明时间函数可由拉普拉斯反变换得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma_c-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_c+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \tag{3.33}$$

㊀ 另外一种单边拉普拉斯变换为$\mathscr{L}_+$积分下限为 0^+。在其他应用中有时会用到。

这里 σ_c 是在 s 平面中 $F(s)$ 所有零极点的右边的选定值。在实际应用中，该关系很少用到。相反，复杂的拉普拉斯变换可以分解成较简单的式子之和，然后分别查表求得它们的时间响应。

101

让我们计算一些经典时间函数的拉普拉斯变换。

例 3.8　阶跃和斜坡函数的拉普拉斯变换

求阶跃函数 $a1(t)$ 和斜坡函数 $bt1(t)$ 的拉普拉斯变换。

解答。对于幅值为 a 的阶跃函数，$f(t)=a1(t)$，由式(3.32)，得

$$F(s)=\int_0^{+\infty} a\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\left.\frac{-a\mathrm{e}^{-st}}{s}\right|_0^{+\infty}=0-\frac{-a}{s}=\frac{a}{s},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

对于斜坡信号 $f(t)=bt1(t)$，由式(3.32)，得

$$F(s)=\int_0^{\infty} bt\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{bt\mathrm{e}^{-st}}{s}-\frac{b\mathrm{e}^{-st}}{s^2}\right]_0^{\infty}=\frac{b}{s^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

这里用到分部积分法，即

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$$

其中：$u=bt$；$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$。然后，除了在极点即原点位置，我们可以扩展 $F(s)$ 的有效性到整个的 s 平面(见附录 A)。◀

更为巧妙的例子是脉冲函数的拉普拉斯变换。

例 3.9　脉冲函数的拉普拉斯变换

求单位脉冲函数的拉普拉斯变换。

解答。由式(3.32)可得

$$F(s)=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1 \tag{3.34}$$ ◀

因为这是单位脉冲函数的拉普拉斯变换，所以用到的是 $\mathscr{L}_-$ 变换而不是 $\mathscr{L}_+$ 变换。

例 3.10　正弦函数的拉普拉斯变换

求正弦函数的拉普拉斯变换。

解答。再一次利用式(3.32)，可得

$$\mathscr{L}(\sin(\omega t))=\int_0^{+\infty}(\sin(\omega t))\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{3.35}$$

如果我们将 www.fpe7e.com 的附录 WA 中的式(WA.34)，

102

$$\sin(\omega t)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}$$

代入式(3.35)，得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\sin(\omega t))&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{(\mathrm{j}\omega-s)t}-\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}\omega+s)t})\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega-s}\mathrm{e}^{(\mathrm{j}\omega-s)t}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega+s}\mathrm{e}^{-(\mathrm{j}\omega+s)t}\right]\Bigg|_0^{+\infty}\\
&=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}(s)>0
\end{aligned}$$

然后，可以扩展拉普拉斯变换的有效范围到除了极点 $s=\pm\mathrm{j}\omega$ 以外的整个 s 平面(见附录 A)。◀

附录 A 中表 A.2 给出了基本时间函数的拉普拉斯变换。表中每一条都如例 3.8 到例 3.10所示的那样，可直接应用拉普拉斯变换的定义式(3.32)得到。

3.1.4 拉普拉斯变换的性质

本节将讨论表 A.1 所列的拉普拉斯变换的性质。关于这些性质和相关例子以及初值定理的证明，请参阅附录 A。

1. 可加性质

线性性质是拉普拉斯变换的一个重要性质，这意味着可以应用叠加原理，即

$$\mathscr{L}\{\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\}=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s) \tag{3.36}$$

幅值缩放性是可加性的一个特例，即

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)\}=\alpha F(s) \tag{3.37}$$

2. 时延性质

设一个函数 $f(t)$ 延迟 $\lambda>0$ 个单位时间，$f_1(t)=f(t-\lambda)$，它的拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty} f(t-\lambda)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-s\lambda}F(s) \tag{3.38}$$

从这个结果我们可以看出，λ 时间单位的时滞对应于变换式乘以 $\mathrm{e}^{-s\lambda}$。

103

3. 尺度变换性质

若将 t 放大 a 倍，即 $f_1(t)=f(at)$，则该函数的拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty} f(at)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{3.39}$$

4. 频移性质

函数 $f(t)$ 在时域乘以一个指数表达式（调制）$f_1(t)=\mathrm{e}^{-at}f(t)$ 对应于频率的平移：

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=F(s+a) \tag{3.40}$$

5. 时域微分性质

一个信号的导数的拉普拉斯变换与该信号的拉普拉斯变换以及它的初始条件有关：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\}=\int_{0^-}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=-f(0^-)+sF(s) \tag{3.41}$$

由式(3.41)可得

$$\mathscr{L}\{\ddot{f}\}=s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-) \tag{3.42}$$

再次应用式(3.41)，可得

$$\mathscr{L}\{f^{(m)}(t)\}=s^mF(s)-s^{m-1}f(0^-)-s^{m-2}\dot{f}(0^-)-\cdots-f^{(m-1)}(0^-) \tag{3.43}$$

这里 $f^{(m)}(t)$ 表示 $f(t)$ 对时间的 m 阶导数。

6. 时域积分性质

时间函数 $f(t)$ 积分 $f_1(t)=\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 的拉普拉斯变换由下式给出：

$$F_1(s)=\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}=\frac{1}{s}F(s) \tag{3.44}$$

这表明只需简单地将函数的拉普拉斯变换乘以 $\frac{1}{s}$。

7. 卷积性质

我们已经看到前面提到的系统响应可由输入信号与系统脉冲响应的卷积来确定，也可由系统传递函数与输入的拉普拉斯变换的乘积得到。下面讨论将其推广到不同的时间函数。

104

时域的卷积对应于频域上的乘积运算。假设 $\mathscr{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$ 和 $\mathscr{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$，那么

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{+\infty} f_1(t)*f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=F_1(s)F_2(s) \tag{3.45}$$

这里$\mathscr{L}$是一个卷积算子。这意味着

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\} = f_1(t) * f_2(t) \tag{3.46}$$

下面讨论类似的结果。

8. 时域乘积性质

时域中的乘积运算相当于频域中的卷积运算：

$$\mathscr{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}F_1(s) * F_2(s) \tag{3.47}$$

9. 频域微分性质

在时域中乘以时间 t，即 $f_1(t)=tf(t)$，相当于频域中的微分运算：

$$F_1(s) = \mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) \tag{3.48}$$

3.1.5 通过部分分式展开求拉普拉斯反变换

如果 $F(s)$为有理式，那么求 $f(t)$的拉普拉斯变换最简单的方法就是利用部分分式展开法将 $F(s)$展开成在拉普拉斯变换中能找到的简单项之和的形式。有理函数$F(s)$的一般形式由两个多项式之比组成：

$$F(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{3.49}$$

通过对多项式因式分解，该有理函数还可以表示成因式乘积的形式：

$$F(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \tag{3.50}$$

我们将讨论具有不同极点的简单例子。对于可以表示任意物理系统响应的拉普拉斯变换式 $F(s)$来说，$m\leqslant n$。当 $s=z_i$ 时，s 称为函数的零点，并且，当 $s=p_i$ 时，s 称为函数的极点。假设极点$\{p_i\}$是各不相同的实数或复数，我们重新将 $F(s)$写为部分分式的形式，即

105

$$F(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n} \tag{3.51}$$

下一步确定常系数集$\{C_i\}$，式(3.51)两边分别乘以 $s-p_1$，得到

$$(s-p_1)F(s) = C_1 + \frac{s-p_1}{s-p_2}C_2 + \cdots + \frac{(s-p_1)C_n}{s-p_n} \tag{3.52}$$

如果令式(3.52)两边的 $s=p_1$，那么，除了第一项外，所有的 C_i 项都将为零，而第一项为

$$C_1 = (s-p_1)F(s)\big|_{s=p_1} \tag{3.53}$$

其他各项系数也可以用类似的形式表示为

$$C_i = (s-p_i)F(s)\big|_{s=p_i}$$

这种处理方法称为消去法，因为在 $F(s)$的因式分解形式[式(3.50)]中，我们可以消去单个分母项，然后令 $s=p_i$，计算表达式剩余部分的值，从而可确定系数 C_i。一旦完成这些操作之后，时间函数变为

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{p_i t} 1(t)$$

因为如附录 A 的表 A.2 第 7 条所示，如果

$$F(s) = \frac{1}{s-p_i}$$

那么

$$f(t) = \mathrm{e}^{p_i t} 1(t)$$

分母中存在二次因子或重根的例子见附录 A。

例 3.11 部分分式展开：单实根

假设已经计算 $Y(s)$：

$$Y(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)}$$

求 $y(t)$。

解答。根据部分分式展开，记 $Y(s)$ 为

$$Y(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s+1}+\frac{C_3}{s+3}$$

用消去法得

$$C_1=\left.\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0}=\frac{8}{3}$$

106

以此类推，有

$$C_2=\left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)}\right|_{s=-1}=-\frac{3}{2}$$

和

$$C_3=\left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)}\right|_{s=-3}=-\frac{1}{6}$$

通过将部分分式相加检验所得结果的正确性，证明能够还原为原函数。对各部分分式查表后可得：

$$y(t)=\frac{8}{3}1(t)-\frac{3}{2}e^{-t}1(t)-\frac{1}{6}e^{-3t}1(t)$$

部分分式展开可用 Matlab 中的 residue 计算，Matlab 语句如下。

```
num = conv([1 2],[1 4]);        % form numerator polynomial
den = conv([1 1 0],[1 3]);      % form denominator polynomial
[r,p,k] = residue(num,den);     % compute the residues
```

由此得以下结果

```
r = [-0.1667 -1.5000 2.6667]';    p = [-3 -1 0]';    k = [];
```

该结果与手算结果一样。注意，Matlab 中 conv 函数常用于两个多项式相乘(函数的自变量为多项式系数)。 ◀

3.1.6 终值定理

在控制里，拉普拉斯变换的一个特别有用的性质称为终值定理，它使我们能够在给出了该函数的拉普拉斯变换后计算常数时间函数的稳态值。该定理来自部分分式展开定理的扩展。假设有一信号 $y(t)$ 的变换 $Y(s)$，希望由 $Y(s)$ 求得其终值，该终值有三种可能情况：常值、不确定或无穷。若 $Y(s)$ 有一对极点(见 3.1.5 小节)在 s 平面的右半部分，即该极点的实部大于零，即 $p_i>0$，那么 $y(t)$ 将增大且极值为无穷。若 $Y(s)$ 有一对极点在 s 平面的虚轴上，即 $p_i=\pm j\omega$，那么 $y(t)$ 为一条稳定正弦曲线，而其终值也将无法确定。只有一种情况下可得到非零的不变终值：若 $Y(s)$ 的所有极点除 $s=0$ 之外都在 s 平面左半部分，那么 $y(t)$ 的各项除了对应于极点 $s=0$ 的那项外都将衰减为零，而极点 $s=0$ 对应的这项在时间域为一常数。因此终值定理如下。

107

如果 $sY(s)$ 的所有极点在 s 平面的左半部分，那么

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{s\to0}sY(s) \tag{3.54}$$

这个关系在附录 A 中给出了证明。 ◀

例 3.12 终值定理

求 $Y(s)=\dfrac{3(s+2)}{s(s^2+2s+10)}$ 的系统终值。

解答。应用终值定理得

$$y(+\infty)=sY(s)|_{s=0}=\frac{3\times 2}{10}=0.6$$

所以，在暂态衰减为零之后，$y(t)$将趋于常数值0.6。◀

必须注意，终值定理只适用于稳定的系统（见3.6节）。如果将式(3.54)用于任意$Y(s)$，可能会导致错误结果，如下例所示。

例3.13　终值定理的错误应用

求$Y(s)=\frac{3}{s(s-2)}$所对应信号的终值。

解答。如果我们盲目应用式(3.54)，可得

$$y(+\infty)=sY(s)|_{s=0}=-\frac{3}{2}$$

然而，

$$y(t)=\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}e^{2t}\right)1(t)$$

并且式(3.54)只求得了常数项。当然，真正的终值为无穷。因为系统在极点$s=2$处不稳定。◀

终值定理也用于求系统的直流增益。直流增益是系统暂态响应分量衰减为零之后，其输出与输入（设为常值）的比值。为了求直流增益，设一单位阶跃输入$[U(s)=1/s]$，用终值定理计算稳态输出值。因此，对于传输函数为$G(s)$的系统，有

108

$$\text{直流增益}=\lim_{s\to 0}sG(s)\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}G(s) \tag{3.55}$$

例3.14　直流增益

求传递函数为$G(s)=\frac{3(s+2)}{(s^2+2s+10)}$的系统的直流增益。

解答。应用式(3.55)，得

$$\text{直流增益}=G(s)|_{s=0}=\frac{3\times 2}{10}=0.6$$ ◀

3.1.7　应用拉普拉斯变换求解微分方程

利用附录A中描述的拉普拉斯变换特性，可求解微分方程。首先，利用附录A中式(A.12)和式(A.13)的微分性质求解微分方程的拉普拉斯变换。然后，我们求解输出的拉普拉斯变换，并利用部分分式展开和表A.2将输出转换成时间响应函数。下面用三个例子来说明上述过程。

例3.15　齐次微分方程

求解微分方程$\ddot{y}(t)+y(t)=0$，其中：$y(0)=\alpha$，$\dot{y}(0)=\beta$。

解答。由式(3.42)得，微分方程的拉普拉斯变换为

$$s^2Y(s)-\alpha s-\beta+Y(s)=0$$

$$(s^2+1)Y(s)=\alpha s+\beta$$

$$Y(s)=\frac{\alpha s}{s^2+1}+\frac{\beta}{s^2+1}$$

为得到上述方程右边两项，查找拉普拉斯变换表（附录A表A.2）的时间函数，有

$$y(t)=[\alpha\cos t+\beta\sin t]1(t)$$

这里$1(t)$表示一个单位阶跃函数。将这个解带回到原微分方程，可以验证这个解的正确性。◀

109

另一个例子将说明方程为非齐次方程时的解，即系统受到激励时的情况。

例 3.16 受激励微分方程

求微分方程 $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=3$ 的解，其中 $y(0)=\alpha$，$\dot{y}(0)=\beta$。

解答。利用式(3.41)和式(3.42)对该微分方程的两边进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)-s\alpha-\beta+5[sY(s)-\alpha]+4Y(s)=\frac{3}{s}$$

解得 $Y(s)$ 为

$$Y(s)=\frac{s(s\alpha+\beta+5\alpha)+3}{s(s+1)(s+4)}$$

运用消去法进行部分分式展开，有

$$Y(s)=\frac{\frac{3}{4}}{s}-\frac{\frac{3-\beta-4\alpha}{3}}{s+1}+\frac{\frac{3-4\alpha-4\beta}{12}}{s+4}$$

因此可得时间函数为

$$y(t)=\left(\frac{3}{4}+\frac{-3+\beta+4\alpha}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3-4\alpha-4\beta}{12}\mathrm{e}^{-4t}\right)1(t)$$

将该解进行二次微分，并代回原微分方程，可验证该解满足原微分方程。 ◀

如果初始条件都是零，解是特别简单的。

例 3.17 零初始条件下受激励微分方程的解

求解微分方程 $\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+4y(t)=u(t)$，其中：$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=0$，$u(t)=2\mathrm{e}^{-2t}1(t)$。

(1) 用部分分式展开方法求解，

(2) 用 Matlab 求解。

解答。

(1) 对微分方程两边进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s)+5sY(s)+4Y(s)=\frac{2}{s+2}$$

解得 $Y(s)$

$$Y(s)=\frac{2}{(s+2)(s+1)(s+4)}$$

用消去法进行部分分式展开，得

$$Y(s)=-\frac{1}{s+2}+\frac{\frac{2}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s+4}$$

110

因此，可得时间函数为

$$y(t)=\left(-1\mathrm{e}^{-2t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t}\right)1(t)$$

(2) 部分分式展开也可以用 Matlab 中的 residue() 函数，其语句如下。

```
num = 2;                        % form numerator
den = poly([-2;-1;-4]);         % form denominator polynomial
                                  from its roots
[r,p,k] = residue(num,den);     % compute the residues
```

由此可得以下结果：

```
r = [0.3333 -1 0.6667]';    p = [-4 -2 -1]';    k = [];
```

该结果与手算结果一致。 ◀

使用拉普拉斯变换求解微分方程的主要价值在于，它能定性地提供关于响应特性的信息。一旦知道了 $Y(s)$ 的极点，我们就可以知道什么特性会出现在响应中。在最后一个例子中，极点 $s=-1$ 在响应中产生衰减项 $y=Ce^{-t}$。极点 $s=-4$ 在响应中产生衰减更快的

项 $y=Ce^{-4t}$。如果存在极点 $s=+1$，那么在响应中将有增长项 $y=Ce^{+t}$。用极点位置从本质上理解系统是如何响应的，这一方法非常有效，在3.3节中将做更多阐述。控制系统设计者经常通过调整设计参数使得极点值能够给出所接受的响应。他们跳过将极点转化为时间函数这一步，而是直接到设计的最后阶段。在设计过程中，设计者采用试凑法(如第5章所述)在图上描述如何改变设计参数来影响极点位置。当所设计系统极点位置预期都能够给出可接受的系统响应时，控制设计者就可以确定一个时间响应来验证所设计系统是否满足要求。整个设计过程往往通过计算机完成，计算机能够直接使用数值计算的方法来解微分方程。

3.1.8　极点和零点

一个有理传递函数能够描述成关于 s 的多项式之比，即

$$H(s)=\frac{b_1s^m+b_2s^{m-1}+\cdots+b_{m+1}}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{3.56}$$

或因式分解成零极点形式，即

111

$$H(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \tag{3.57}$$

其中：K 称为传递函数增益。分子的根 z_1，z_2，…，z_m 是系统的有限个零点。零点位于 s 平面上传递函数为零的位置。如果 $s=z_i$，那么

$$H(s)\big|_{s=z_i}=0$$

零点也对应于系统信号的阻断传播性质，也称为*系统的传输零点*。系统本身具有阻挡与其零点位置相对应的频率能力。如果系统的非零激励输入为 $u=u_0e^{s_0t}$，这里 s_0 不是系统的极点，那么输入对于频率在 $s_0=z_i$ 处的值恒为零[⊖]，$y\equiv0$ 零点也在系统的暂态性能方面有重要影响(见3.5节)。

分母的根 p_1，p_2，…，p_n，叫做*系统极点*[⊜]，极点位于 s 平面中传递函数幅值为无穷处。如果 $s=p_i$，那么

$$|H(s)|_{s=p_i}=+\infty$$

系统极点决定了系统的稳定性，就像我们在3.6节中看到的。系统的极点也决定了系统的自然属性或非强迫属性，即系统模式。零点和极点可能为复数，我们可以在一个复平面上标示他们的位置，也就是之前提的 s 平面。零极点所坐落的位置是反馈控制系统的核心，对控制系统的设计具有重要意义。如果 $m<n$ 时，系统有 $n-m$ 个零点位于无穷远处，随着 s 接近于无穷，传递函数趋于零。如果将无穷远处的零点也计算在内，那么系统将有相同的零极点数。实际物理系统不可能存在 $n<m$ 的情况，否则，在 $\omega=+\infty$ 处将有无穷大响应。如果 $z_i=p_j$，那么传递函数对消，将出现在第7章中讨论的不希望的性能。

3.1.9　用Matlab进行线性系统分析

分析一个系统的第一步是写出(建立)描述物理系统动态性能的时域微分方程。这些微分方程可由决定系统性能的物理学定律得到。例如，在第2章所描述的固体动力学、热力学和电学的例子。系统分析的第二步是确定并标明系统的输入和输出，然后计算描述动态系统输入输出属性的传递函数。在本章之前的部分，线性动态系统也可用其微分方程的拉普拉斯变换来描述——传递函数。传递函数也可表示成式(3.56)所示的两个多项式之比的

112

⊖　恒为零是指输出和各阶导数在 $t>0$ 时都为零。

⊜　极点含义可以通过将传递函数可视化为三维图形来理解。s 的实部和虚部画在 x 轴和 y 轴上，传递函数的幅值画在 z 轴上。对于这个情况，所得的三维图看起来像一个帐篷，帐篷的极点位于传递函数的极点！

形式，或者式(3.57)所示的因式分解的极点形式。通过分析传递函数，我们能够定性和定量地确定一个系统的动力学性质。一种提取有用的系统信息的方法是简单地确定零极点分布并推导出必要的系统动态特性。另一种方法是求得系统对典型激励信号，如脉冲信号，阶跃信号，斜坡信号和正弦信号的响应。还有一种方法是利用部分分式展开和附录A的表A.1和表A.2来分析计算拉普拉斯反变换，以此来确定系统的时间响应。还可以确定系统响应的一个任意输入。

我们将通过对第2章例子中的按难度排列的物理系统进行上述运算来说明这种分析方法。

我们回顾系统的不同表示形式，传递函数，零极点，状态变量等，用Matlab作为计算工具。Matlab可接受的系统指标有如下三种形式，状态空间，传递函数和零极点，分别记为tf和zp。此外，它可以将系统描述从一种形式转化到另一种形式。

例3.18 用Matlab建立巡航控制传递函数

求例2.1中巡航控制系统的输入u和汽车位置x之间的传递函数。

解答。由例2.1我们求得系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{0s^2+0s+0.001}{s^2+0.05s+0}=\frac{0.001}{s(s+0.05)}$$

在Matlab中，分子多项式的系数表示成行矢量num将分母多项式表示成行矢量den。该例结果为

$$\text{num}=[0\quad 0\quad 0.001],\quad \text{den}=[1\quad 0.05\quad 0]$$

结果能够用Matlab中(num，den)形式的命令返回。零极点的描述可以用Matlab命令计算，即

```
[z,p,k] = tf2zp(num,den)
```

并且得到传递函数的分解形式，其中：$z=[\ ]$，$p=[0\quad -0.05]^{T}$，$k=0.001$。 ◀ 113

例3.19 用Matlab求直流电机的传递函数

在例2.13中，假设$J_m=0.01\text{kg}\cdot\text{m}^2$，$b=0.001\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$，$K_t=K_e=1$，$R_a=10\Omega$和$L_a=1\text{H}$。

(1) 求输入v_a和输出θ_m之间的传递函数；

(2) 求输入v_a与输出$\omega=\dot{\theta}_m$之间的传递函数。

解答。

(1) 将上述参数带入到例2.13，求出系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{100}{s^3+10.1s^2+101s}=\frac{100}{s(s^2+10.1s+101)}$$

在Matlab中，我们看到将传递函数的分子多项式系数表示成行矢量numa和将分母多项式系数表示成行矢量denA。所得结果为

$$\text{numa}=[0\quad 0\quad 0\quad 100],\quad \text{dena}=[1\quad 10.1\quad 101\quad 0]$$

用Matlab命令[z，p，k]=tf2zp(numa，dena)计算零极点。

结果为

$$z=[\ ],\quad p=[0\quad -5.0500\quad +8.6889\text{j}\quad -5.0500\quad -8.6889\text{j}]^{T}$$
$$k=100$$

从而可得传递函数的因式分解形式为

$$H(s)=\frac{100}{s(s+5.05+\text{j}8.6889)(s+5.05-\text{j}8.6889)}$$

(2) 如果我们认为角速度$\dot{\theta}_m$为输出，那么可以求出numb=[0　0　100]，denb=[1　10.1　101]，可得传递函数为

$$G(s)=\frac{100s}{s^3+10.1s^2+101s}=\frac{100}{s^2+10.1s+101}$$

这是预料之内的，因为$\dot{\theta}_m$仅为θ_m的导数；所以$\mathscr{L}(\dot{\theta}_m)=s\mathscr{L}\{\theta_m\}$。对于单位阶跃输入$v_a$，用 Matlab 可以计算出阶跃响应(重提例 2.1)，其语句如下。

114

```
s=tf('s');                          % define Laplace variable
sysb=100/(s^3+10.1*s^2+101*s)       % form transfer function
t=0:0.01:5;        % form time vector
y=step(sysb,t)     % compute step response;
plot(t,y)          % plot step response
```

该系统产生一个稳态恒定角速度，如图 3.6 所示，由于系统没有单位交流增益，故曲线存在轻微波动。◀

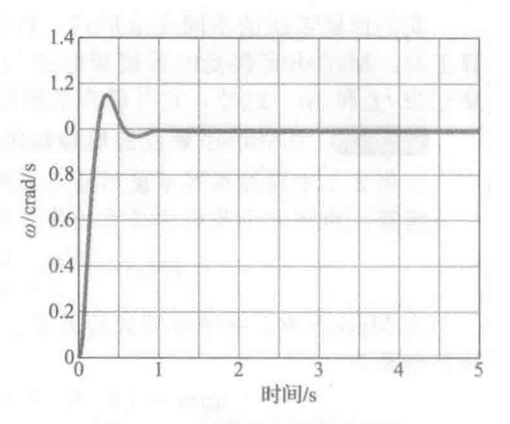


图 3.6 交流电机的暂态响应

当用一个任意阶的微分方程描述动态系统时，用微分方程求多项式形式的传递函数往往比较容易。因此，在这些情况下，最好用传递函数的形式来直接描述系统。

例 3.20 用 Matlab 进行变换

求以下微分方程所示系统的传递函数：

$$\ddot{y}+6\dot{y}+25y=9u+3\dot{u}$$

解答。利用式(3.41)和式(3.42)给出的微分关系式，我们可以得到

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s+9}{s^2+6s+25}$$

Matlab 语句如下。

```
numG = [3 9];     % form numerator
denG = [1 6 25];  % form denominator
```

如果想得到因式分解形式的传递函数，只要变换到 tf 描述即可。因此，Matlab 命令为

115

```
% convert from numerator-denominator polynomials to pole-zero form
[z,p,k] = tf2zp(numG,denG)
```

结果为$z=[-3]$，$\boldsymbol{p}=[-3+4\mathrm{j}\quad -3-4\mathrm{j}]^{\mathrm{T}}$，$k=[3]$。这意味着传递函数也可以写为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3(s+3)}{(s+3-4\mathrm{j})(s+3+4\mathrm{j})}$$

我们也可以将零极点描述转化为传递函数描述，需要用到 Matlab 中 zp2tf 命令，即

```
% convert from pole-zero form to numerator-denominator polynomials
[numG,denG]=zp2tf(z,p,k)
```

对于此例，$z=[-3]$，$\boldsymbol{p}=[-3+\mathrm{j}4;\quad -3-\mathrm{j}4]$，$k=[3]$可得传递函数的分子分母多项式。◀

例 3.21 用 Matlab 求卫星传递函数

(1) 求例 2.3 中输入F_c和姿态角θ之间的传递函数；

(2) 在以$t=5\mathrm{s}$为起始时刻的 0.1s 内，系统受到 25N 脉冲激励，确定系统响应。设$d=1\mathrm{m}$和$I=5000\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$。

解答。

(1) 由例 2.3，得

$$\frac{d}{I}=\frac{1}{5000}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}=0.0002\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}$$

这意味着系统传递函数为

$$H(s)=\frac{0.0002}{s^2}$$

通过这个特例检验也可以确定该式。我们可以标示传递函数分子多项式的系数为向量 num 和分母多项式的系数为行向量 den。结果为

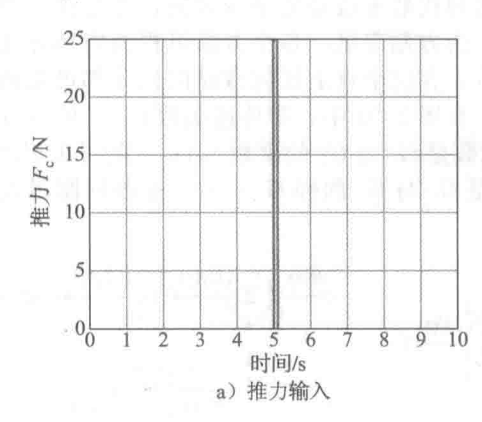
$$\text{num}=[0\quad 0\quad 0.0002],\quad \text{den}=[1\quad 0\quad 0]$$

（2）下面的 Matlab 语句用来计算系统的脉冲输入为 25N，0.1s 时的响应：

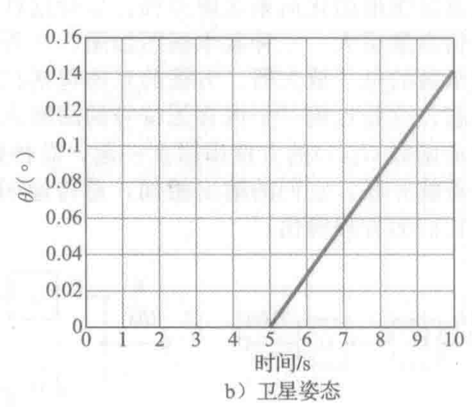
```
s=tf('s');                 % define Laplace variable
sysG=0.0002/s ^2;          % define system by its transfer function
t=0:0.01:10;               % set up time vector with dt = 0.01 sec
                           % pulse of 25N, at 5 sec, for 0.1 sec duration
u1=[zeros(1,500)
  25*ones(1,10)
zeros(1,491)];             % pulse input
[y1]=lsim(sysG,u1,t);      % linear simulation
ff=180/pi;                 % conversion factor from radians to degrees
y1=ff*y1;    % output in degrees
plot(t,u1);  % plot input signal
plot(t,y1);  % plot output response
```

在 $t=5\mathrm{s}$ 时系统受到一个短脉冲（脉冲输入）激励，其作用相当于在 $t=5\mathrm{s}$ 时给系统加一个非零角 θ_0。因为系统是无阻尼的，在没有控制，即不受任何约束的情况下，该系统将在 $t=5\mathrm{s}$ 时以由脉冲给出的恒定角速度飘移输入的时间响应如图 3.7a 所示，角 θ 飘移如图 3.7b所示。

116



a）推力输入



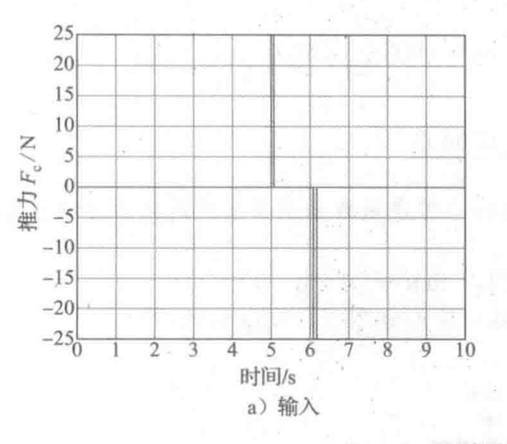
b）卫星姿态

图 3.7 卫星暂态响应

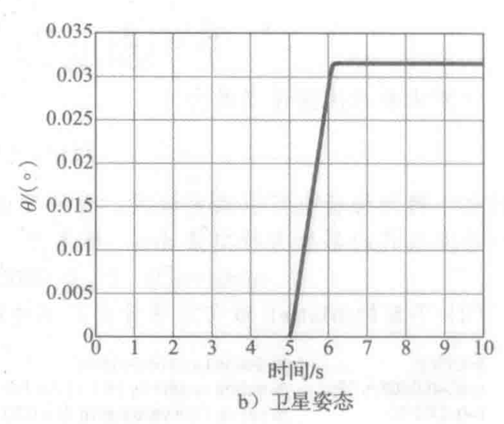
在 $t=5\mathrm{s}$ 时，我们用相同的正脉冲激励系统，在 $t=6.1\mathrm{s}$ 时受到相同幅值和持续时间的负脉冲激励[见图 3.8a 中输入]，那么系统的暂态响应如图 3.8b 所示。这就说明了实际应用中卫星姿态角是如何控制的。相关的其他 Matlab 语句如下。

117

```
                           % double pulse input
u2=[zeros(1,500) 25*ones(1,10) zeros(1,100) -25*ones(1,10)
  zeros(1,381)];
[y2]=lsim(sysG,u2,t);      % linear simulation
plot(t,u2);                % plot input signal
ff=180/pi;                 % conversion factor from radians to degrees
y2=ff*y2;                  % output in degrees
plot(t,y2);                % plot output response
```



a）输入



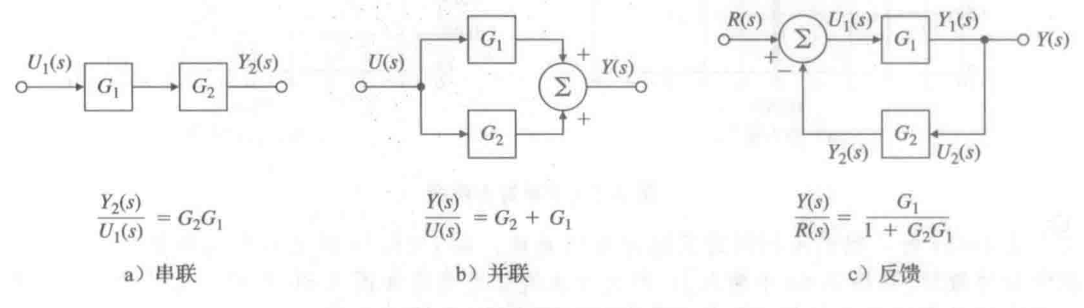
b）卫星姿态

图 3.8　卫星暂态响应（双脉冲）

3.2　系统模型框图

3.2.1　框图

为获取传递函数，我们需要求出运动方程的拉普拉斯变换，以及求解所得的代数方程，从而获得输入输出的关系。在许多控制系统中，系统方程可以写出来，而且只有某些环节的输入是另一个环节的输出时，它们各部分之间才有相互作用。在这些情况下，与第 1 章中图 1.2 所示的组成框图相类似，很容易就能绘制出描述数学关系的框图。将每一部分的传递函数放在一个方框内，两部分之间的输入输出关系用线和箭头表示。然后我们可以通过图形的化简来求解方程。尽管这种方法与代数方法是完全等价的，但它往往更简单且信息量更大。三种基本框图如图 3.9 所示，为方便起见，各个方框可视为内部标注了传递函数的电子放大器。方框的互连包括相加点，在这个点上任何数量的信号都可能被加到一起。这些点用一个内含$\sum$符号的圆圈表示。在图 3.9a 中，带传递函数 $G_1(s)$的方框与带传递函数 $G_2(s)$的方框串联在一起，总传递函数是 G_1 与 G_2 的乘积 G_2G_1。在图 3.9b 中，两个系统并联，它们的输出相加，总传递函数是 G_1 与 G_2 的和 G_1+G_2。这些框图可以由描述它们的方程得出。



a）串联　　b）并联　　c）反馈

图 3.9　基本框图的三个例子

图 3.9c 所示的为一个更复杂的情况。这里两个方框以反馈形式相连，以便互为输入。如图 3.9c所示，当反馈 $Y_2(s)$被减去时，称之为负反馈。通常，系统的稳定性要求系统为负反馈。现在，我们求解这些方程，然后将它们与框图联系起来。这些方程为

$$U_1(s) = R(s) - Y_2(s)$$
$$Y_2(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s)$$
$$Y_1(s) = G_1(s)U_1(s)$$

方程的解为

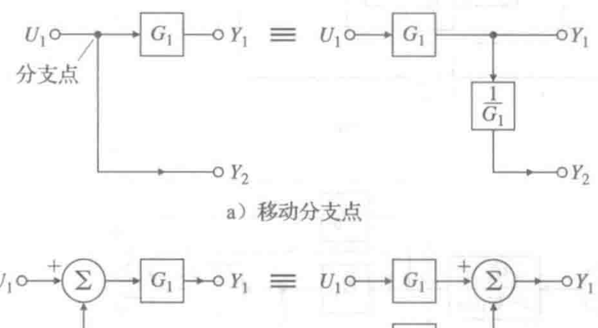
$$Y_1(s)=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}R(s) \tag{3.58}$$

我们可以通过以下规则来表示解。

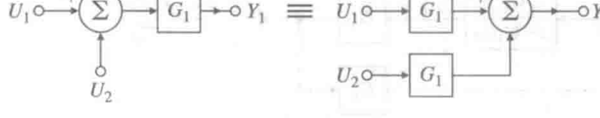
单回路负反馈系统的增益由前向增益除以 1 与回路增益之和的商给出。

当反馈是加而不是减时，我们称它为正反馈。在这种情况下，其增益由前向增益除以 1 与回路增益之差给出。

图 3.9 给出的三种基本情况可以结合起来，通过重复化简去求解任意由框图定义的传递函数。然而，当拓扑图很复杂时，处理过程冗长乏味且容易出错。图 3.10 所示框图的代数关系的例子是对图 3.9 的补充。图 3.10a 和 b 所示的为框图之间的连接在不影响其数学关系的情况下是如何进行处理的。图 3.10c 所示的为如何处理可以使一个常规系统(左侧)变换成一个反馈路径上没有元件的系统，通常称为单位反馈系统。



a）移动分支点



b）移动相加点

c）转换成单位反馈

图 3.10 框图的代数关系的例子

在所有情况下，化简的基本原则是简化拓扑图的同时保持框图剩余变量之间的关系完全一致。对基本线性方程组的代数运算来说，框图简化是一种通过消除变量求解方程的图示方法。

119
~
120

例 3.22 由简单框图求传递函数

求解图 3.11a 所示系统的传递函数。

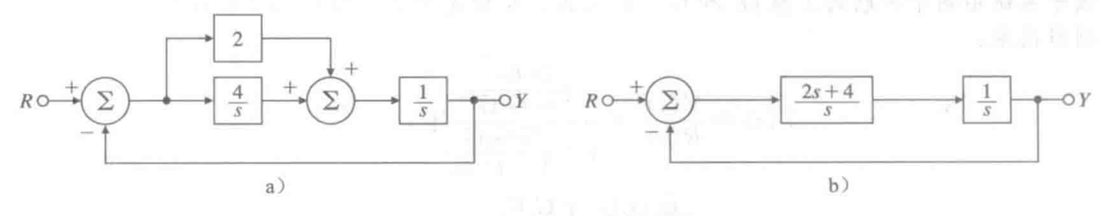


图 3.11 二阶系统的框图

解答。首先我们通过减少控制器路径上的并联环节来简化框图。所得结果如图 3.11b 所示，并且使用反馈规则获取闭环传递函数为

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}\frac{\frac{2s+4}{s^2}}{1+\frac{2s+4}{s^2}}=\frac{2s+4}{s^2+2s+4}$$ ◀

例 3.23 由框图求传递函数

求解图 3.12a 所示系统的传递函数。

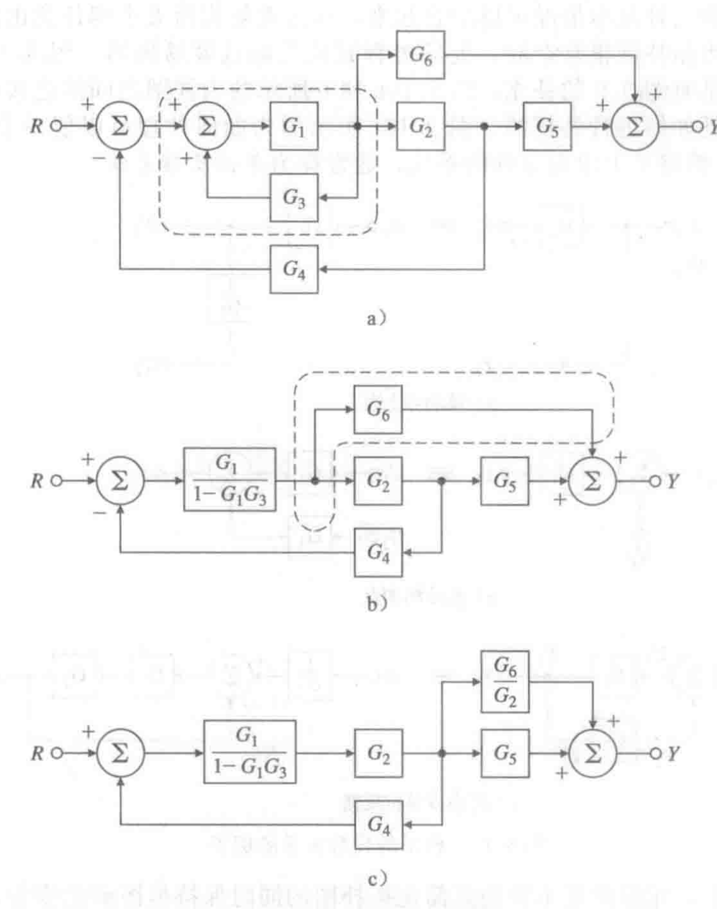


图 3.12 框图简化示例

解答。首先简化框图。运用式(3.58)的法则，用等价的传递函数替换包含 G_1 和 G_3 的反馈环，注意它是一个正反馈环。其结果如图 3.12b 所示。下一步是移动 G_2 前面的分支点到其输出端处[见图 3.12a]，如图 3.12c 所示。左侧的负反馈环与右侧的子系统并联，该子系统由两个并联的方框 G_5 和 G_6/G_2 组成。总传递函数根据图 3.9 给出的三个简化规则写出来：

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\frac{G_1G_2}{1-G_1G_3}}{1+\frac{G_1G_2G_4}{1-G_1G_3}}\left(G_5+\frac{G_6}{G_2}\right)$$

$$=\frac{G_1G_2G_5+G_1G_6}{1-G_1G_3+G_1G_2G_4}$$ ◀

正如我们所看到的，一个代数方程组可以用一个框图表示，框图中的方框代表各个传递函数，并且它们间的关系与系统方程相对应。框图是一种将系统可视化为一个相互关联的子系统的集合的便捷工具，它着重强调系统变量之间的关系。

3.2.2 用Matlab化简框图

如果控制系统各部分的传递函数已知，就可以使用Matlab命令计算互联系统的传递函数。用于求解上述传递函数的三种Matlab命令为series(串联)、parallel(并联)和feedback(反馈)。它们可以计算具有两个组成方框的传递函数，且这两个方框分别为串联、并联和反馈结构。下面的简单例子说明它们的用法。

例3.24 用Matlab求简单系统的传递函数

使用Matlab重新计算图3.11a所示框图的传递函数。

解答。将图3.11a所示的每个方框内的传递函数表示成图3.13所示的形式。然后我们通过以下程序合并两个并联的方框：

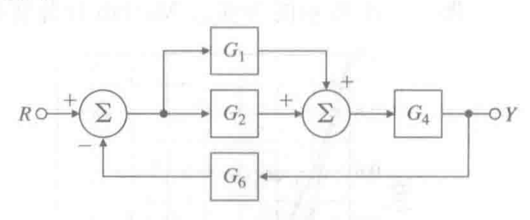


图3.13 框图简化示例

```
s=tf('s');                          % specify a transfer function using
                                      a rational function in the Laplace
                                      variable s
sysG1=2;                            % define subsystem G1
sysG2=4/s;                          % define subsystem G2
sysG3=parallel(sysG1,sysG2);        % parallel combination of G1 and G2
sysG4=1/s;                          % define subsystem G4
sysG5=series(sysG3,sysG4);          % series combination of G3 and G4
sysG6=1;
sysCL=feedback(sysG5,sysG6,-1);     % feedback combination of G5 and G6
```

通过Matlab计算所得结果为sysCL，表达形式为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{2s+4}{s^2+2s+4}$$

这一结果与通过框图简化获得的结果相同。◀

3.2.3 梅森规则和信号流图

另一种简化框图的有效方法是使用梅森(Mason)规则，它是确定复杂互连系统传递函数的一种有效方法。请参阅www.fpe7e.com的附录W3.2.3。

3.3 极点位置的作用

一旦传递函数确定之后，我们就可以分析它所描述的系统的响应。当系统方程是联立常微分方程组(ODE)时，所得的传递函数将是多项式之比的形式，即

$$H(s)=b(s)/a(s)$$

如果假设b和a没有公因子(通常情况是没有的)，那么$a(s)=0$时的s值将表示$H(s)$为无穷时的点。如在3.1.5小节探讨的那样，这些s值称为$H(s)$的极点。$b(s)=0$时的s值是$H(s)=0$的点，其对应的s值称为零点。零点在暂态响应中的作用将在3.5节讨论。这些极点和零点完全可以描述除常数乘法器之外的$H(s)$。由于脉冲响应是由系统传递函数对应的时间函数给出的，因此我们称脉冲响应为系统的*自然响应*。可以使用极点和零点去计算对应的时间响应，从而确定s平面内极点位置的时间关系曲线。例如，对$H(s)$进行部分分式展开，极点可以确定包含在脉冲响应中的信号种类。对于如下一阶系统的极点来说，

121~123

$$H(s)=\frac{1}{s+\sigma}$$

由附录A表A.2第7项可知其脉冲响应是一个指数函数，即

$$h(t)=\mathrm{e}^{-\sigma t}1(t)$$

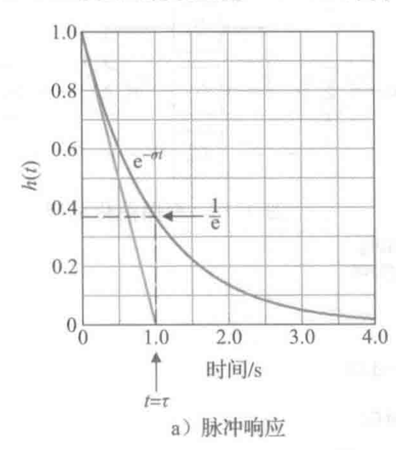
当$\sigma>0$时，极点位于$s<0$一侧，以指数形式衰减，我们说该脉冲响应是*稳定的*。如果$\sigma<0$，极点位于原点右侧，随时间增加以指数递增，脉冲响应是*不稳定的*(3.6节)。

图 3.14a所示的是一个典型的稳态响应，并且定义其时间常数 τ 为响应值是初始值的 $1/e$ 时的时间。

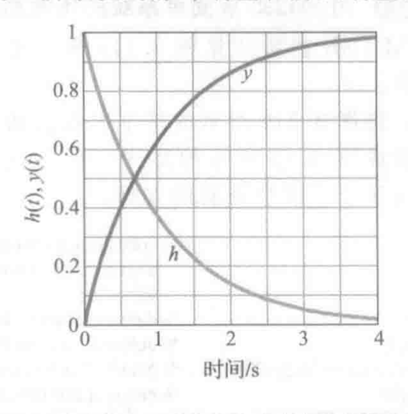
$$\tau = 1/\sigma \tag{3.59}$$

因此，它是衡量衰减速率的。直线是指数曲线在 $t=0$ 处的正切线，且与时间轴 $t=\tau$ 相交。一个指数形式的这些特征对绘制时间图或者检验计算结果都很有用。

图 3.14b 所示的为通过 Matlab 计算所得的一阶系统的脉冲响应和阶跃响应。



a）脉冲响应



b）用Matlab求得的脉冲响应和阶跃响应

图 3.14　一阶系统响应

例 3.25　相对于极点位置、实根的响应

比较系统的时间响应与极点位置，其系统输入与输出间的传递函数由下式给出：

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} \tag{3.60}$$

解答。传递函数式(3.60)的分子是

$$b(s) = 2\left(s+\frac{1}{2}\right)$$

分母是

$$a(s) = s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

因此，$H(s)$的极点位于 $s=-1$ 和 $s=-2$ 处，并且一个(有限的)零点位于 $s=-\frac{1}{2}$ 处。通过 Matlab 函数 pzmap(num, den)得到零极点在 s，即零极点位置为平面上的位置图，以此来完整地描述这个传递函数。

```
num=[2 1];
den=[1 3 2];
```

如图 3.15 所示。

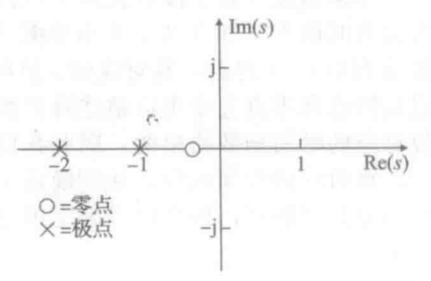


图 3.15　s 平面简图，极点用×表示，零点用○表示

$H(s)$的部分分式展开结果为

$$H(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

由表 A.2 可以查出 $H(s)$ 中每一项的拉普拉斯反变换，由此可知系统脉冲输入的时间函数 $h(t)$ 为

124 ~ 125

$$h(t) = \begin{cases} -e^{-t}+3e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3.61}$$

可以看出，时间函数 $h(t)$ 中 e^{-t} 和 e^{-2t} 部分的波形由 $s=-1$ 和 $s=-2$ 处的极点决定。对于更复杂的情况也是如此。总之，自然响应各部分的波形由传递函数的极点位置决定。

图3.16所示为极点位置和对应的自然响应，其他包括复极点在内的极点位置，将在后面讨论。

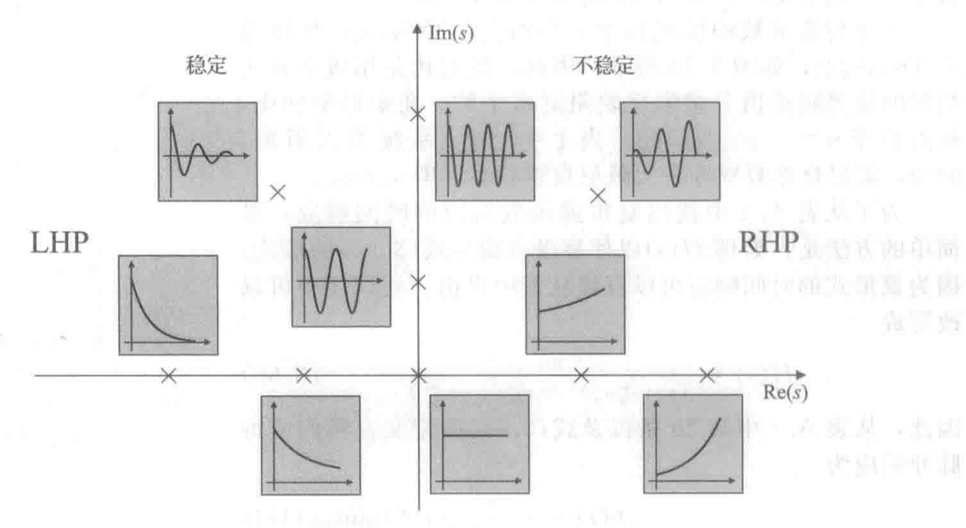


图3.16 与s平面上各点相关联的时间函数(LHP，左半平面；RHP，右半平面)

在部分分式展开过程中，系数的个数由$H(s)$的分子决定。因为e^{-2t}比e^{-t}衰减快，所以与极点-2相对应的信号衰减比与极点-1相对应的信号衰减快。为简便起见，我们只说在极点-2处比在极点-1处快。一般来说，在s平面左半部分，远离虚轴的极点对应的自然信号衰减速度大于离虚轴近的极点对应的自然信号衰减速度。如果极点所处位置的s值为正数(位于s平面的右半部分)，则响应将是一个递增的指数函数，是不稳定的。如图3.17所示，快速项$3e^{-2t}$在时间关系曲线的前半部分起主导作用，而$-e^{-t}$项在后半部分起主导作用。

这个例子说明了极点与响应特性之间的关系，这仅仅可以通过找出拉普拉斯反变换，并检查每一项来得到。然而，如果我们只是想绘制该例子的脉冲响应，那么更简便的方法是使用Matlab程序。其语句如下。

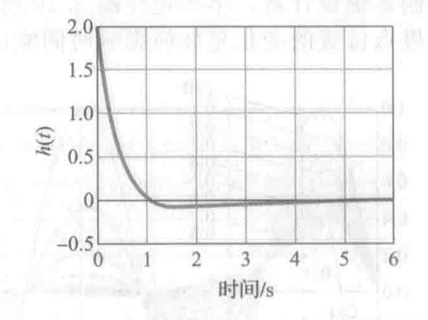


图3.17 例3.25[式(3.60)]的脉冲响应

```
s=tf('s');                      % define Laplace variable
sysH=(2*s+1)/(s^2+3*s+2);       % define system from its numerator
                                  and denominator
impulse(sysH);                  % compute impulse response
```

所得结果如图3.17所示。

复极点可以根据其实部和虚部来定义，通常简写为

$$s=-\sigma\pm j\omega_d$$

这意味着如果σ为正数，那么极点有一个负实部。既然复极点总是以复共轭对的形式出现，那么，对应的分母为

$$a(s)=(s+\sigma-j\omega_d)(s+\sigma+j\omega_d)=(s+\sigma)^2+\omega_d^2 \tag{3.62}$$

从二阶微分方程中求出传递函数，且通常将结果写成多项式的形式，即

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{3.63}$$

将式(3.62)展开，并且将它与式(3.63)中$H(s)$的分母系数作比较，找到两者系数之间的对应关系为

$$\sigma=\zeta\omega_n, \quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{3.64}$$

其中：参数 ζ 是阻尼比[⊖]；ω_n 是无阻尼自然频率。

这个传递函数的极点位于 s 平面上半径为 ω_n，角度为 $\theta=\arcsin\zeta$ 处，如图 3.18 所示。因此，阻尼比是用极点为实数时的临界阻尼值分量来反映阻尼水平的。在矩形坐标中，极点位于 $s=-\sigma\pm j\omega_d$ 处。当 $\zeta=0$ 时，系统为无阻尼，$\theta=0$，阻尼自然频率等于无阻尼自然频率，即 $\omega_d=\omega_n$。

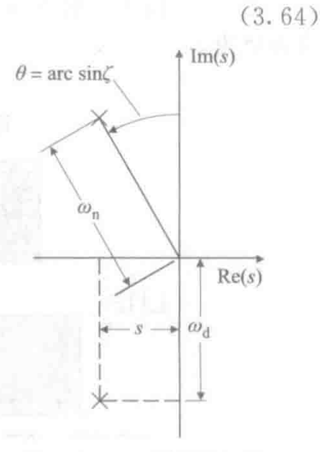


图 3.18 一对复极点的 s 平面图

为了从表 A.2 中找出复传递函数对应的时间响应，最简单的方法是，处理 $H(s)$ 以使复极点满足式(3.62)的形式，因为该形式的时间响应可以直接从表中得出。式(3.63)可以改写成

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)} \tag{3.65}$$

因此，从表 A.2 中第 20 条以及式(3.64)的定义，我们可得脉冲响应为

$$h(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\sigma t}(\sin(\omega_d t))1(t) \tag{3.66}$$

图 3.19a 绘制了不同 ζ 值时的 $h(t)$ 曲线图，时间已经归一化为无阻尼自然频率 ω_n。注意实际频率 ω_d 会随着阻尼比的增加而略微降低。也要注意，对于过低的阻尼来说，其响应是振荡的，然而对于大阻尼(ζ 接近于 1)来说，其响应没有振荡。这些响应中的一部分绘制在图 3.16 中，定性的描述了 s 平面内极点位置的变化是如何影响脉冲响应的。作为一个控制系统设计者，牢牢记住图 3.16 所示的图像将是非常有用的，这样就可以能够快速理解极点位置的变化是如何影响时间响应的。

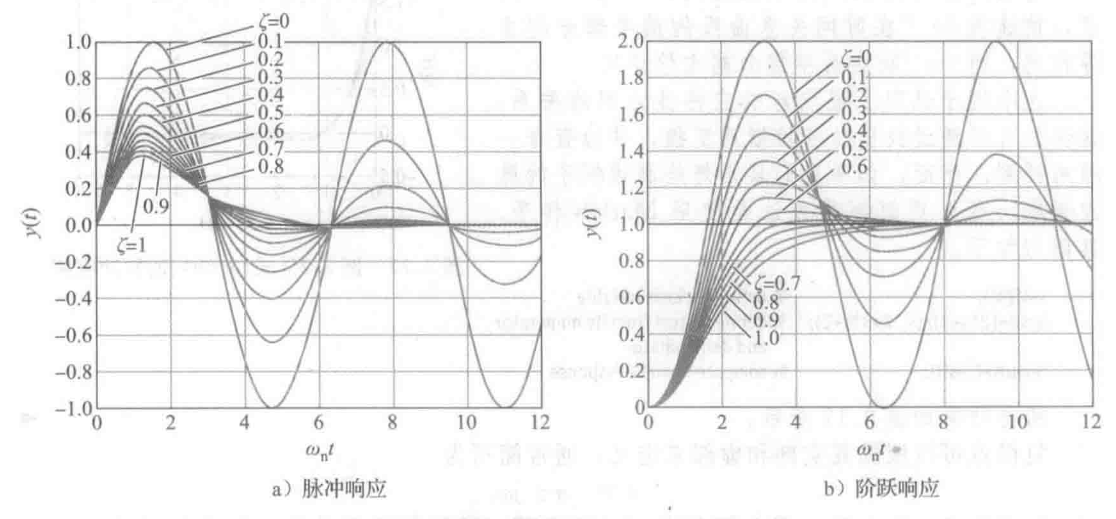


图 3.19 相对于不同 ζ 值的二阶系统响应

图 3.20 所示的三个极点位置与图 3.19a 所示的对应的脉冲响应作比较。极点的负实部 σ 值决定了与正弦曲线相乘的指数包络线的衰减率，如图 3.21 所示。注意，如果 $\sigma<0$（极点位于右半平面），那么，自然响应随时间的增长而增长，正如前面定义的那样，系统

⊖ 在通信和滤波器工程中，标准二阶传递函数可写成 $H=1/[1+Q(s/\omega_n+\omega_n/s)]$。这里 ω_n 称为带中心，并且 Q 称为质因子。与式(3.63)相比较可得 $Q=1/2\zeta$。

是不稳定的。如果 $\sigma=0$，自然响应既不增长也不衰减，则稳定性不确定。如果 $\sigma>0$，自然响应是衰减的，则系统是稳定的。

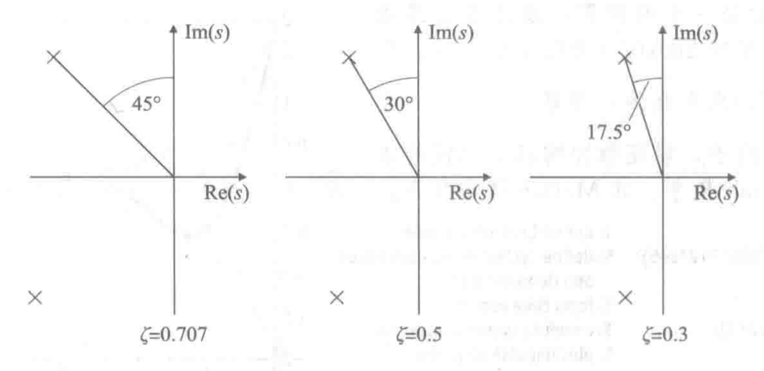


图 3.20　对应于三个 ζ 值的极点位置

研究系统 $H(s)$ 的阶跃响应也同样有意义，所谓的阶跃响应是指输入为单位阶跃信号 $u=1(t)$ 时系统 $H(s)$ 的响应，其中 $U(s)=1/s$。由表 A.2 中第 21 条可得阶跃响应变换由 $Y(s)=H(s)U(s)$ 给出。图 3.19b 绘制了不同 ζ 值对应的 $y(t)$ 曲线，从图中可知，脉冲响应的基本暂态响应特性继续存在于阶跃响应中；两种响应之间的不同在于阶跃响应的终值受控于单位阶跃值。

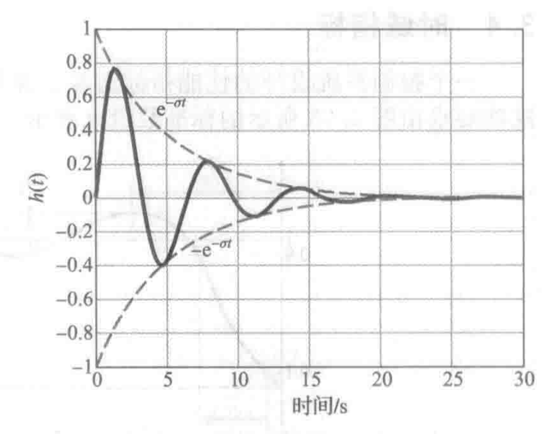


图 3.21　带有指数包络线的二阶系统响应

例 3.26　振荡的时间响应

讨论下式的极点与系统脉冲响应之间的相互关系，并且求出准确的脉冲响应。

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+5} \tag{3.67}$$

解答。从式(3.63)给出的 $H(s)$ 的形式，我们可以看出，

$$\omega_n^2=5\Rightarrow\omega_n=\sqrt{5}\,\text{rad/s}=2.24\,\text{rad/s}$$

并且

$$2\zeta\omega_n=2\Rightarrow\zeta=\frac{1}{\sqrt{5}}=0.447$$

这表明我们期望的频率大约在 2rad/s 左右，有轻微的振荡现象，为获取准确的响应，我们将 $H(s)$ 的分母转换成式(3.62)的形式，结果为

$$H(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+5}=\frac{2s+1}{(s+1)^2+2^2}$$

从式中可以看出传递函数的极点是复数，实部为 -1，虚部为 $\pm 2j$。表 A.2 中的第 19 条和第 20 条适用于这个分母。上述方程的右半部分需要拆分成两部分，以使他们分子与表中的条目相匹配：

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{2s+1}{(s+1)^2+2^2}\\&=2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}-\frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\end{aligned}$$

因此，脉冲响应为

$$h(t) = (2e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t))1(t)$$

图 3.22 所示的是一个响应图，显示了包络线是如何削弱主导项 $2\cos(2t)$ 的正弦曲线的，以及由 $-\frac{1}{2}\sin(2t)$ 所引起的小相移。

如前面的例子，确定脉冲响应最方便的方法是使用 Matlab 指令。其 Matlab 语句如下。

```
s=tf('s');                    % define Laplace variable
sysH=(2*s+1)/(s^2+2*s+5);     % define system by its numerator
                                and denominator
t=0:0.1:6;                    % form time vector
y=impulse(sysH,t);            % compute impulse response
plot(t,y);                    % plot impulse response
```

如图 3.22 所示。◀

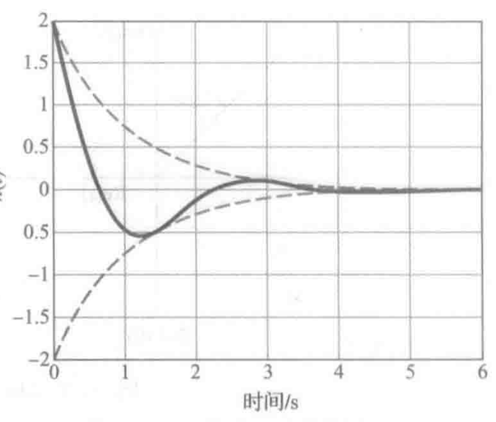


图 3.22　例 3.25 的系统响应

3.4　时域指标

一个控制系统设计的性能指标通常包含与系统时间响应相关的一些要求。阶跃响应的这些要求由图 3.23 所示的标准数量来表示。

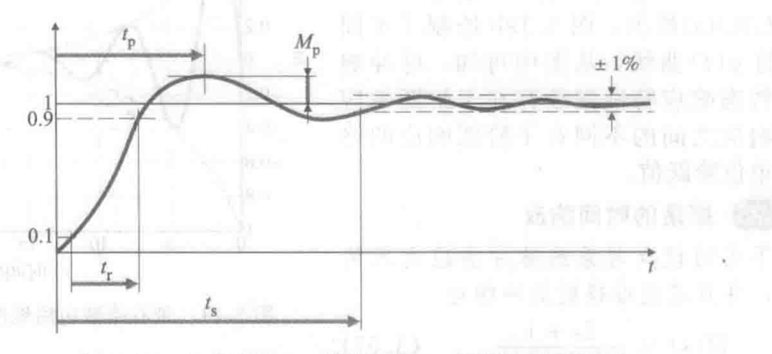


图 3.23　上升时间 t_r、调节时间 t_s 和超调 M_p 的定义

(1) 上升时间 t_r 就是系统达到新设定点附近所需的时间。

(2) 调节时间 t_s 就是系统暂态衰减所需的时间。

(3) 超调 M_p 就是系统调节过程中超过终值的最大值除以终值所得的结果(通常以百分比的形式表示)。

(4) 峰值时间 t_p 就是系统达到最大超调点所需的时间。

3.4.1　上升时间

对于二阶系统而言，图 3.19b 所示的时间响应中的指标信息太复杂，除非将其转化成一种简单的形式，否则很难记住。通过研究图 3.23 所示的这些曲线，我们可将这些曲线与极点位置参数 ζ 和 ω_n 联系起来。例如，所有的曲线大致在同一时间上升。如果我们将 $\zeta=0.5$处的曲线视为均值，那么从 $y=0.1$ 到 $y=0.9$ 的上升时间[㊀]大约是 $\omega_n t_r=1.8$，即

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \tag{3.68}$$

尽管这种关系可能在受阻尼比的影响时得到改善，但是记住如何使用式(3.68)仍然十分重要。此式仅对于无零点的二阶系统是准确的；对于所有其他系统，它只是 t_r 和 ω_n 之间的一种粗略的近似关系。在系统设计方面，大部分系统分析要比纯二阶系统复杂得多，因此

㊀ 上升时间 t_r。

设计者运用式(3.68)也仅是粗略的近似。

3.4.2 超调和峰值时间

126～132

我们将对超调 M_p 进行更多的分析。当通过计算得出导数为零时，这个值才会存在。图 3.19b 所示曲线的时间函数可通过 $H(s)/s$ 的拉普拉斯反变换求得，即

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right) \tag{3.69}$$

其中：$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$；$\sigma = \zeta\omega_n$。

我们可以用三角恒等式重写前面的方程式，即

$$A\sin(\alpha) + B\cos(\alpha) = C\cos(\alpha - \beta)$$

其中：α 为 $\omega_d t$。

或者

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{A}{B}\right) = \arctan\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) = \mathrm{arc\,sin}(\zeta)$$

其中：$A = \frac{\sigma}{\omega_d}$；$B = 1$。

一个更简洁的表示方法为

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_d t - \beta) \tag{3.70}$$

当 $y(t)$ 达到它的最大值时，它的导数将为 0，即

$$\dot{y}(t) = \sigma e^{-\sigma t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right) - e^{-\sigma t}(-\omega_d\sin(\omega_d t) + \sigma\cos(\omega_d t)) = 0$$

$$= e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma^2}{\omega_d} + \omega_d\right)\sin(\omega_d t) = 0$$

当 $\sin(\omega_d t) = 0$ 时，上式成立，所以

$$\omega_d t_p = \pi$$

因此

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{3.71}$$

将式(3.71)代入到 $y(t)$ 的表达式中，我们计算

$$y(t_p)p \overset{\text{def}}{=\!=} 1 + M_p = 1 - e^{-\sigma\pi/\omega_d}\left(\cos\pi + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\pi\right)$$

$$= 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d}$$

因此，我们可得

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 \leqslant \zeta < 1 \tag{3.72}$$

该图绘制在图 3.24 中。从曲线图中可知，频繁使用的两组值分别为 $M_p = 0.16$，$\zeta = 0.5$ 和 $M_p = 0.05$，$\zeta = 0.7$，也就是说，超调分别为 16%和 5%。

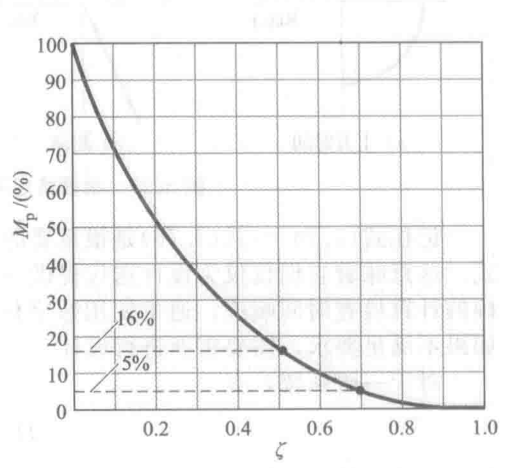


图 3.24 二阶系统中超调与阻尼比的关系

3.4.3 调节时间

暂态响应中我们感兴趣的最后一个参数为调节时间 t_s。它是指暂态衰减到最小值以使 $y(t)$ 几乎处于稳定状态所需的时间。为了便于说明，我们将采用 1%作为一个较合理的测度，其他情况下可以使用 2%或 5%。作为分析计算，我们注意到 y 相对 1 的偏差为衰减

指数项 $e^{-\sigma t}$ 与周期函数的正弦和余弦之积。这个偏差的持续时间基本上由暂态指数决定，所以，可以定义调节时间为衰减指数达到1%时 t_s 的值，即

$$e^{-\zeta\omega_n t_s}=0.01$$

因此，

$$\zeta\omega_n t_s=4.6$$

或者

$$t_s=\frac{4.6}{\zeta\omega_n}=\frac{4.6}{\sigma} \tag{3.73}$$

其中：σ 为极点负实部，由图3.18可以看出。

133～134

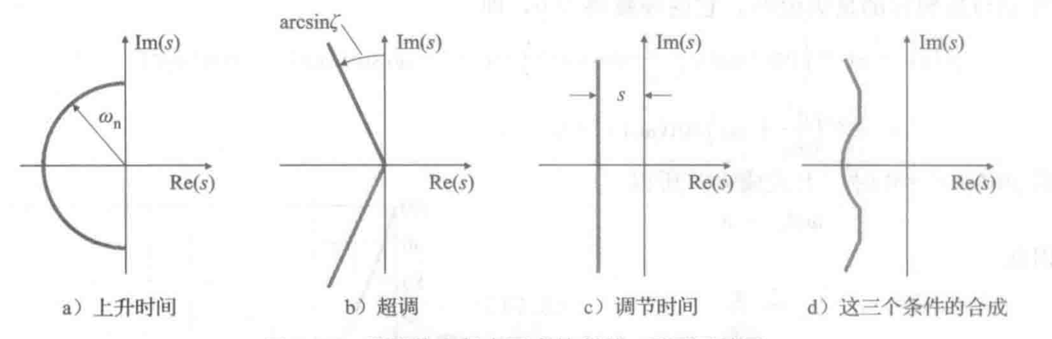
式(3.68)、式(3.72)和式(3.73)可利用无阻尼自然频率 ω_n、阻尼比 ζ 和负实部 σ 来描述无有限零点和两个复极点的系统的暂态响应。在分析和设计过程中，它们可用来估算任何系统的上升时间，超调和调节时间。在设计综合过程中，我们希望指定 t_r、M_p 和 t_s 以及极点位置，以便实际响应的指标小于或等于这些指标。对于指定的 t_r、M_p 和 t_s 值，等式的综合形式为

$$\omega_n \geqslant \frac{1.8}{t_r} \tag{3.74}$$

$$\zeta \geqslant \zeta(M_p)\quad（从图3.24可见） \tag{3.75}$$

$$\sigma \geqslant \frac{4.6}{t_s} \tag{3.76}$$

这些方程式可以绘制在 s 平面内，如图3.25a～图3.25c所示，它们将被用到以后的章节中指导极点和零点位置的选择以满足控制系统动态响应指标。



a）上升时间　b）超调　c）调节时间　d）这三个条件的合成

图3.25　根据特定暂态要求绘制的 s 平面区域图

记住式(3.74)～式(3.76)是很重要的，这些式子只是定性指导而不作为精确的设计公式。这意味着它们仅仅为设计迭代提供一个初始点。控制系统设计完成以后，需要通过精确的计算检查时间响应，通常使用数字仿真的方法，以验证时间指标是否已经满足要求。如果不满足要求，需要重新进行设计。

对于一阶系统，有

$$H(s)=\frac{\sigma}{s+\sigma}$$

其阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s)=\frac{\sigma}{s(s+\sigma)}$$

我们从表A.2中第11条可以看出 $Y(s)$ 对应于

135

$$y(t)=(1-e^{-\sigma t})1(t) \tag{3.77}$$

与式(3.73)比较可知一阶系统的 t_s 值同样

$$t_s=\frac{4.6}{\sigma}$$

因为可能不存在超调，所以 $M_p=0$。从图 3.14 可知，从 $y=0.1$ 到 $y=0.9$ 的上升时间为

$$t_r=\frac{\ln 0.9-\ln 0.1}{\sigma}=\frac{2.2}{\sigma}$$

然而，更典型的方法是依据它的时间常数描述一阶系统，在图 3.14 中它被定义为 $\tau=1/\sigma$。

例 3.27 将指标变换到 s 平面

解答。如果不知道系统是否是无零点的二阶系统，那么准确地找出其允许区域是不可能的。不管是什么系统，我们都可以通过二阶系统的关系获取一个大致的近似值。式(3.74)表明：

$$\omega_n\geqslant\frac{1.8}{t_r}=3.0\text{rad/s}$$

式(3.75)和图 3.24 表明：

$$\zeta\geqslant 0.6$$

式(3.76)表明：

$$\sigma\geqslant\frac{4.6}{3}=1.5\text{s}$$

允许区域是图 3.26 所示实线左侧的任意位置。注意任何满足 ζ 和 ω_n 约束条件的极点将会自动满足 σ 约束条件。

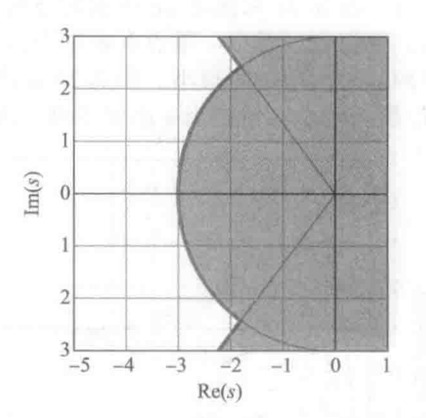


图 3.26 例 3.27 中极点在 s 平面的允许区域

136

3.5 零点和附加极点的作用

对于简单二阶系统来说，可按照图 3.25 所示判断系统性能；然而对于更复杂的系统，它们只能作为一种指导。如果所设计的控制系统的上升时间太慢，我们必须提高其自然频率；如果暂态超调过大，阻尼必须增加；如果暂态持续时间过长，极点需要在 s 平面内向左移动。

迄今为止只有对 $H(s)$ 的极点进行过讨论。但 $H(s)$ 也可能存在零点㊀。就暂态分析而言，零点通过修改指数项的系数发挥作用，而指数项的形式是由极点决定的，如例 3.25 所示。为了进一步说明该问题，研究下面具有相同极点不同零点的两个传递函数：

$$H_1(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2} \tag{3.78}$$

$$H_2(s)=\frac{2(s+1.1)}{1.1(s+1)(s+2)}=\frac{2}{1.1}\left(\frac{0.1}{s+1}+\frac{0.9}{s+2}\right)=\frac{0.18}{s+1}+\frac{1.64}{s+2} \tag{3.79}$$

它们归一化后具有相同的直流增益(也就是 $s=0$ 时的增益)。注意$(s+1)$项的系数从 $H_1(s)$ 中的 2 改成了 $H_2(s)$ 中的 0.18。其大幅度的下降是由 $H_2(s)$ 中的零点 $s=-1.1$ 引起的，这个零点几乎可以抵消极点 $s=-1$。如果我们将零点放在 $s=-1$ 处，这一项将完全消去。一般，极点附近的零点会降低这一项在整个响应中的影响。由部分分式展开式(3.51)的系数方程式可得

$$C_1=(s-p_1)F(s)|_{s=p_1}$$

可以看出，如果 $F(s)$ 的零点在极点 $s=p_1$ 的附近，$F(s)$ 的值会由于 s 的值接近零点而减小。因此，系数 C_1 将会减小，同时该系数也反映了该项对响应影响的大小。

137

为了考虑控制系统设计过程中零点如何影响暂态响应，设传递函数有两个复极点和一个零点。为了使绘制的图形具有广泛的适用性，我们将传递函数写成标准化的形式，即

㊀ 我们假设 $b(s)$ 和 $a(s)$ 没有公因式。如果不是这样，那么可能 $b(s)$ 和 $a(s)$ 可能会在同一位置均为零，从而导致此处 $H(s)$ 不为零。这种情况的影响将在第 7 章进行讨论，届时将会引进状态空间描述。

$$H(s)=\frac{(s/(\alpha\zeta\omega_n))+1}{(s/\omega_n)^2+2\zeta(s/\omega_n)+1} \tag{3.80}$$

零点位于 $s=-\alpha\zeta\omega_n=-\alpha\sigma$ 的位置。如果 α 较大，零点就会远离极点，零点在响应中的影响也会较小。如果 $\alpha\approx1$，零点的值会比较接近极点的实部，零点在响应中也会有比较大的影响。图 3.27 和图 3.28 所示的分别为 $\zeta=0.5$ 和 $\zeta=0.707$ 时不同 α 值对应的阶跃响应曲线。我们可以看出，零点在响应中最大的影响是增加了超调 M_p，降低了上升时间 t_r，而对调节时间的影响很小。图 3.29 给出了 M_p 和 α 的关系。该图表明如果 $\alpha>3$ 时，零点对 M_p 影响很小，但是当 α 小于 3 时，影响会逐渐增大，特别是当 $\alpha=1$ 或者更小时。

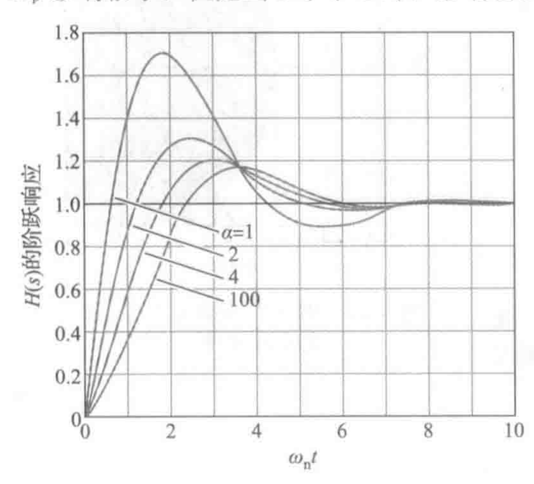


图 3.27 带一个零点的二阶系统的阶跃响应图($\zeta=0.5$)

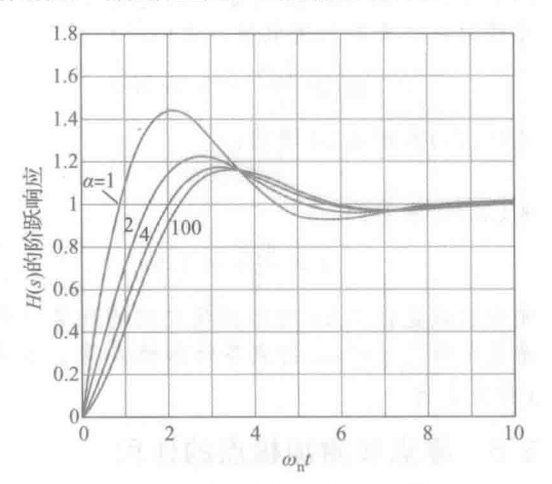


图 3.28 带一个零点的二阶系统的阶跃响应图($\zeta=0.707$)

图 3.27 可以通过拉普拉斯反变换来解释，首先我们用 s 代替 s/ω_n，有

$$H(s)=\frac{s/(\alpha\zeta)+1}{s^2+2\zeta s+1}$$

在传递函数中存在标准化频率的影响以及在对应的阶跃响应中存在归一化时间的影响；因此，$\tau=\omega_n t$。然后，我们将传递函数重新写成两项和的形式，即

$$H(s)=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}+\frac{1}{\alpha\zeta}\frac{s}{s^2+2\zeta s+1} \tag{3.81}$$

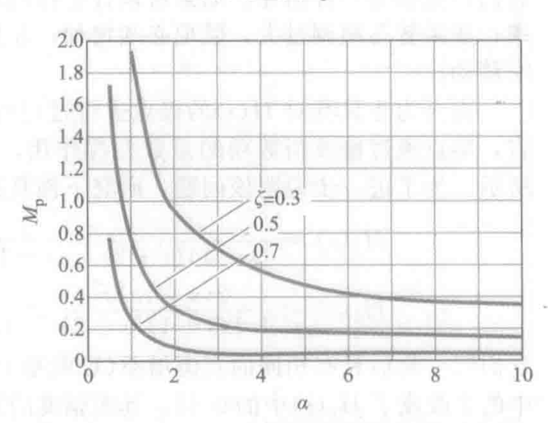


图 3.29 归一化零点 α 的函数的超调 M_p 的图形 $\alpha=1$ 是零点的实部等于极点的实部

第一项我们称为 $H_0(s)$，是初始项(无有限零点)，第二项 $H_d(s)$是由零点引入的，是原始项的 $s/(\alpha\zeta)$ 倍。$\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ 的拉普拉斯变换为 $sF(s)$，所以，$H_d(s)$是初始项导数的常数倍，也就是说，有

$$y(t)=y_0(t)+y_d(t)=y_0(t)+\frac{1}{\alpha\zeta}\dot{y}_0(t)$$

通过 $y_0(t)$，可得出 $H_0(s)$的阶跃响应，以及通过 $y_d(t)$，可得出 $H_d(s)$的阶跃响应，如图 3.30所示。观察这些曲线，我们可以看出，为什么零点能增加超调：导数在曲线的前半部分有一个大驼峰，将其加到 $H_0(s)$响应中会提高整个 $H(s)$的响应，进而产生超调。这个分析对于 $\alpha<0$ 并且零点位于右半平面的例子很有意义(这个点称为 RHP 零点，有时称为非最小相位零点，6.1.1 小节将对这个问题进行更加详细的讨论)。在这种情况下，要减去导数项而不是加上导数项。图 3.31 画出的是一个典型情形。

138 ~ 139

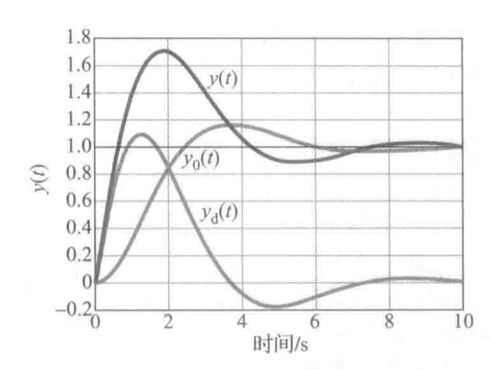


图 3.30 二阶系统传递函数 $H(s)$、$H_0(s)$、$H_d(s)$对应的阶跃响应 $y(t)$

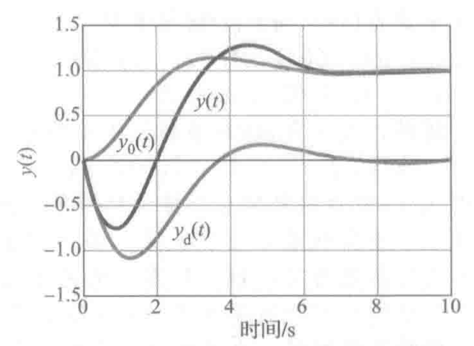


图 3.31 RHP 中带有一个零点的二阶系统（非最小相位系统）的阶跃响应 $y(t)$

例 3.28 邻近零点和极点位置对暂态响应的影响

考虑如下二阶系统，此系统具有一个有限零点和单位直流增益。

$$H(s)=\frac{24}{z}\frac{(s+z)}{(s+4)(s+6)}$$

确定当 $z=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$时，零点$(s=-z)$位置对单位阶跃响应的影响。 140

解答。阶跃响应是如下传递函数的拉普拉斯反变换。

$$H_1(s)=H(s)\frac{1}{s}=\frac{24}{z}\frac{(s+z)}{s(s+4)(s+6)}=\frac{24}{z}\frac{s}{s(s+4)(s+6)}+\frac{24}{s(s+4)(s+6)}$$

并且是两项之和，即

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

其中：

$$y_1(t)=\frac{12}{z}\mathrm{e}^{-4t}-\frac{12}{z}\mathrm{e}^{-6t}$$

$$y_2(t)=z\int_0^t y_1(\tau)\mathrm{d}\tau=-3\mathrm{e}^{-4t}+2\mathrm{e}^{-6t}+1$$

因此，

$$y(t)=1+\left(\frac{12}{z}-3\right)\mathrm{e}^{-4t}+\left(2-\frac{12}{z}\right)\mathrm{e}^{-6t}$$

可以看出，如果 $z=4$ 或 $z=6$，系统的一个模态不存在输出，由于零极点相消，系统的响应是一阶的。图 3.32 所示的为系统的阶跃响应（虚线表示 $z=4$，圆点虚线表示 $z=6$）。可以看出 $z=1$ 时，就附加超调来说，零点的影响很明显（零点位置接近原点）。当 $z=2$ 或 $z=3$ 的时候，系统仍存在超调。当 $z=4$ 或 $z=6$ 时，系统的响应正如所期望的是一阶响应。当 $z=5$ 时，零点位于两个极点之间，系统无超调，此结论具有一般性，其原因在于该零点有效地抵消了第二个极点的影响作用，使系统在任何频率下均为一阶。◀

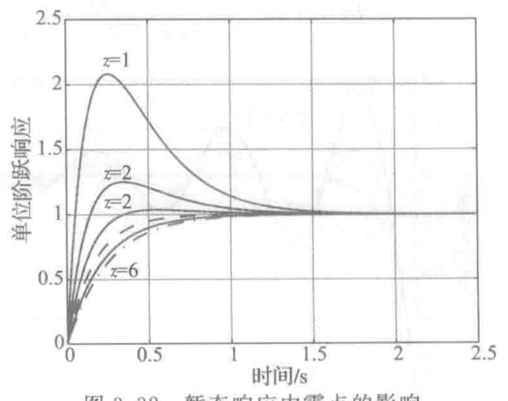


图 3.32 暂态响应中零点的影响

141

例 3.29 邻近的复零点和弱阻尼极点对系统的影响

考虑具有一对弱阻尼极点和一对复零点的三阶反馈系统，传递函数为

$$H(s)=\frac{(s+\alpha)^2+\beta^2}{(s+1)[(s+0.1)^2+1]}$$

确定复零点($s=-\alpha\pm j\beta$)的位置对系统单位阶跃响应的影响，其中，三个不同零点位置分别为$(\alpha, \beta)=(0.1, 1.0)$，$(\alpha, \beta)=(0.25, 1.0)$和$(\alpha, \beta)=(0.5, 1.0)$，如图3.33所示。

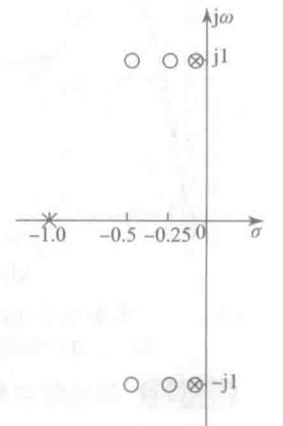


图3.33　复零点的位置

解答。使用Matlab绘制三条单位阶跃响应曲线，如图3.34所示。当$(\alpha, \beta)=(0.25, 1.0)$或$(\alpha, \beta)=(0.5, 1.0)$，也就是如图3.33所示的复零点不接近弱阻尼极点时，从图中可以看出，弱阻尼可使阶跃响应出现振荡。另一方面，对于$(\alpha, \beta)=(0.1, 1.0)$这种情况而言，如果复零点能完全抵消弱阻尼极点的影响，那么阶跃响应中的振荡即可完全消除。实际上，弱阻尼极点的位置不能精确地找到，也不可能完全地抵消。然而，复零点在弱阻尼极点的附近可充分改善阶跃响应的性能。在后面的第5、7、10章动态补偿器设计部分，还会用到这个方法。◀

例3.30　使用Matlab求飞行器的响应

10.3.2小节描述的波音747飞行器升降舵与高度之间的传递函数可以近似写为

$$\frac{h(s)}{\delta_e(s)}=\frac{30(s-6)}{s(s^2+4s+13)}$$

(1) 使用Matlab绘制出当升降舵以1°的脉冲输入时，飞机的高度和时间关系曲线。注意影响响应的非最小相位性质的物理因素。

(2) 检验t_r，t_s，M_p近似值的准确性[见图3.24、式(3.68)和式(3.73)]。

解答。

(1) 这个例子中建立脉冲响应的Matlab指令如下。

142～143

```
u=-1;                    % u = delta e
sysG=u*30*(s-6)/         % define system by its transfer function
   (s^3+4*s^2+13*s)
y=impulse(sysG);         % compute impulse response; y = h
plot(y);                 % plot impulse response
```

结果如图3.35所示。要注意一下，开始阶段高度是如何下降的，而后又是如何上升到一个新终值的。这个终值可以通过终值定理预测为

$$h(\infty)=s\left.\frac{30\times(s-6)\times(-1)}{s(s^2+4s+13)}\right|_{s=0}=\frac{30\times(-6)\times(-1)}{13}=+13.8$$

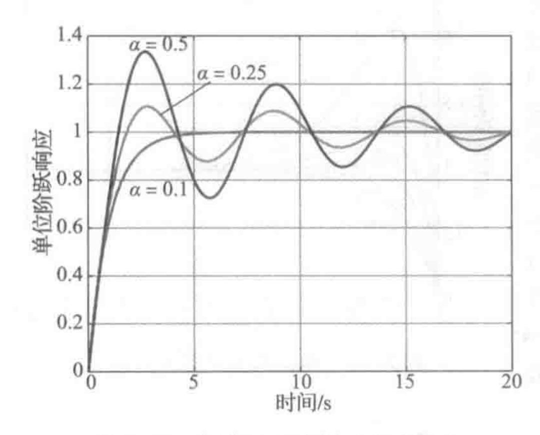


图3.34　暂态响应中复零点的影响

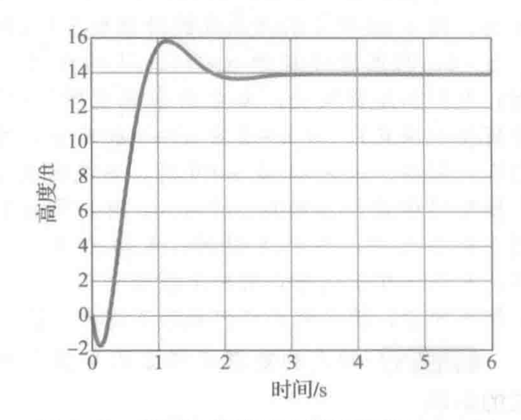


图3.35　升降舵脉冲输入时的飞机高度响应

事实上由于分母项中存在s项，所以输入的脉冲响应有一个有限终值。这表示一个纯积分，且脉冲函数的积分是一个有限值。如果输入是一个阶跃函数，那么高度会随着时间增

长继续增加；换句话说，阶跃函数的积分是一个斜坡函数。

开始阶段的下降可以通过传递函数的**右半平面**(RHP)零点来预测。按照惯例，将升降舵负偏转定义成向上(见图10.31)。升降舵向上偏转可以驱动飞机尾部向下偏，从而使机头旋转向上，飞机上升。在机头旋转之前，在初始时刻的偏转会产生一个向下的力，因此，初始高度的响应是下降的。旋转之后，机翼的迎角增加导致升力上升，从而使飞机上升。

(2) 从式(3.68)中可得上升时间为

$$t_r = \frac{1.8}{\omega_n} = \frac{1.8}{\sqrt{13}}\text{s} = 0.5\text{s}$$

我们可从下面关系式中求得阻尼比ζ：

$$2\zeta\omega_n = 4 \Rightarrow \zeta = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0.55$$

从图3.24可得，超调M_p为0.14。因为$2\zeta\omega_n = 2\sigma = 4$，由式(3.73)可得

$$t_s = \frac{4.6}{\sigma} = \frac{4.6}{2}\text{s} = 2.3\text{s}$$

仔细观察由Matlab输出得到的时间关系曲线$h(t)$，可得，$t_r \approx 0.43\text{s}$，$M_p \approx 0.14$和$t_s \approx 2.6\text{s}$，这些值相当接近估计值。非最小相位零点显著的影响就是导致初始响应朝“错误方向”运动，而且使响应有些迟缓。 ◀

144

除了研究零点的影响外，研究附加极点对标准二阶阶跃响应的影响仍然很有意义。在这个例子中，设传递函数为

$$H(s) = \frac{1}{(s/(\alpha\zeta\omega_n)+1)[(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)+1]} \tag{3.82}$$

图3.36所示的为$\zeta=0.5$和不同α值时的阶跃响应图。在此情况下，最主要的影响是延长了上升时间。如图3.37所示的为不同的ζ值对应的上升时间与α的关系图。

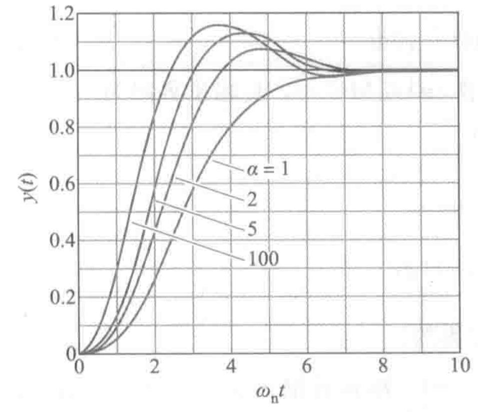


图3.36 当$\zeta=0.5$时三阶系统的几个阶跃响应

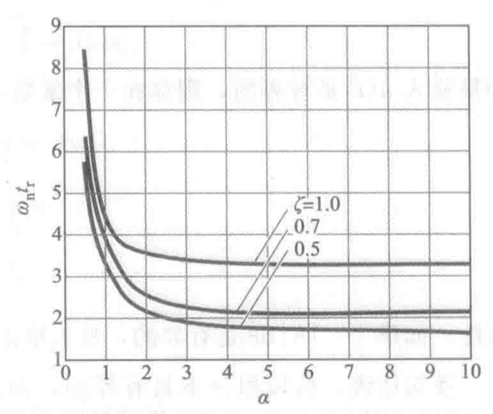


图3.37 相对于附加极点分布的归一化上升时间

从这些讨论中，我们可以得出几个通过零极点形式呈现的简单系统动态响应的结论。

零极点分布对动态响应的影响

1. 对一个具有有限零点的二阶系统来说，暂态响应指标参数近似为

上升时间：$t_r \approx \dfrac{1.8}{\omega_n}$

超调：$M_p \approx \begin{cases} 5\%, & \zeta = 0.7 \\ 16\%, & \zeta = 0.5 \quad (\text{见图3.24}) \\ 35\%, & \zeta = 0.3 \end{cases}$

调节时间：$t_s \approx \dfrac{4.6}{\sigma}$

(2) 位于左半平面(LHP)且小于复极点实部 1/4 的零点会增大响应的超调，如图 3.29 所示。

(3) 位于右半平面(RHP)的零点会减小超调(可能引起阶跃响应在开始时朝错误方向运动)。

(4) 位于左半平面(LHP)且小于复极点实部 1/4 的附加极点会显著延长上升时间，如图 3.37所示。

3.6 稳定性

对于非线性时变系统而言，稳定性的研究是一个复杂且困难的课题。在本节，仅仅考虑线性时不变系统，其稳定性条件如下。

一个线性时不变系统，如果其传递函数分母多项式的所有根具有负实部(即它们都位于 s 平面左半部分)，那么该系统是稳定的，否则是不稳定的。

如果初始条件衰减到零，则系统是稳定的，如果初始条件发散，则系统不稳定。如上所述，如果系统所有极点均严格地位于 s 平面左半部分[也就是说，系统所有极点均具有负实部($s=-\sigma+\mathrm{j}\omega$，$\sigma>0$)]，则线性时不变(定常)系统是稳定的。如果系统的任意一个极点位于 s 平面右半部分(也就是说，具有正实部，$s=-\sigma+\mathrm{j}\omega$，$\sigma<0$)，则系统是不稳定的，如图 3.16 所示。$\mathrm{j}\omega$ 轴($\sigma=0$)上任何一个极点，都会保持小的初始条件。对于其他 $\sigma=0$ 的极点来说，振荡运动依旧存在。因此，一个系统如果它的暂态响应衰减，则稳定，否则不稳定。图 3.16 所示的为系统基于极点位置的时间响应曲线。

145
~
146

在后面的章节中，我们将讨论更具体的稳定性判据，例如，奈奎斯特(Nyquist)频率响应稳定性判定(第 6 章)和李雅普诺夫稳定性判据(第 9 章)。

3.6.1 有界输入有界输出稳定性

如果系统的每个有界输入对应一个有界输出(不管系统内部发生什么)，则称该系统具有有界输入有界输出(BIBO)稳定性。当系统响应由卷积给出时，则可判定系统的特性。如果系统输入为 $u(t)$，输出为 $y(t)$，脉冲响应为 $h(t)$，那么有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}t \tag{3.83}$$

如果输入 $u(t)$是有界的，则存在一个常数 M，使得$|u|\leqslant M<\infty$，且输出界限为

$$\begin{aligned}|y| &= \left|\int hu\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &\leqslant\int|h|\,|u|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant M\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

因此，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h|\,\mathrm{d}\tau$ 是有界的，那么输出也是有界的。

换句话说，假设积分不是有界的，如果 $h(\tau)>0$，则有界输入 $u(t-\tau)=+1$，如果 $h(\tau)<0$，则 $u(t-\tau)=-1$，在这种情况下，有

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \tag{3.84}$$

输出是无界的。我们可得出结论

当且仅当积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau<+\infty$$

时，具有脉冲响应 $h(t)$ 的系统具有有界输入有界输出(BIBO)稳定性。

例 3.31　电容器的 BIBO 稳定性

确定图 3.38 所示的电流源驱动的电容器。电容电压

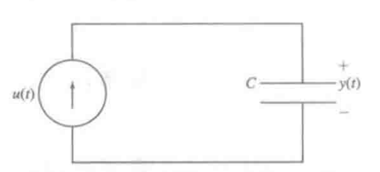


图 3.38　电流源驱动的电容器

为输出，电流为输入。

解答。该装置的脉冲响应为单位阶跃响应 $h(t)=1(t)$。该响应为

147

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}\tau \tag{3.85}$$

是无界的。电容器不具有 BIBO 稳定性。注意，系统的传递函数为 $1/s$ 且在虚轴有一个极点。实际上，可以看出恒定的输入电流会导致电压的增长，因此，系统的响应既不是有界的也不是稳定的。一般来说，如果 LTI 系统在虚轴或者右半平面有极点[⊖]，则响应就不具有 BIBO 稳定性；如果所有极点均位于左半平面，那么响应就具有 BIBO 稳定性。因此，对于这类系统，可根据传递函数的极点位置来判别稳定性。◀

劳斯稳定性判据提供了另一种计算脉冲响应积分，甚至是确定特征方程根的位置的方法，我们将在 3.6.3 小节中讨论。

3.6.2 LTI 系统的稳定性

考虑 LTI 系统，由它的传递函数分母多项式得出的特征方程为

$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n=0 \tag{3.86}$$

假设特征方程的根 $\{p_i\}$ 是各不相同的实数或复数。作为分母，式(3.86)中的函数出现在由下式所表达的零极点抵消之前的系统传递函数中：

$$\begin{aligned}T(s)&=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}\\&=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)},\quad m\leqslant n\end{aligned} \tag{3.87}$$

特征方程为式(3.86)的微分方程的解，可以写成部分分式展开的形式，即

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{p_it} \tag{3.88}$$

其中：p_i 为式(3.86)的根；K_i 为系数，由初始条件和零点位置决定。

148

如果传递函数的一个零点与一个极点在右半平面抵消，那么在输出中相应的 K_i 将等于零，但是在一些内部变量中也将出现不稳定的暂态响应。

系统是稳定的，当且仅当(充要条件)$t\to+\infty$时，式(3.88)的各项趋于零，即

$$\mathrm{e}^{p_it}\to 0,\quad \text{对于所有 } p_i$$

如果系统的所有极点严格位于左半平面，则上式才成立，其中

$$\mathrm{Re}\{p_i\}<0 \tag{3.89}$$

如果所有的极点都是重极点，那么响应会用一个包含 t 的多项式代替式(3.88)中 K_i，而结论不变。这就是所谓的*内部稳定*。因此，系统的稳定性可以通过计算特征方程根并判断是否全部位于*左半平面*来确定。如果系统在*右半平面*存在任意的极点，那么它是*不稳定的*。因此 $j\omega$ 轴是渐近稳定与不稳定响应的稳定性分界线。如果系统在 $j\omega$ 轴上不存在重极点，则称系统是*中性稳定*的。例如，极点在原点(积分器)导致系统非衰减暂态响应。一对 $j\omega$ 轴上的复极点会引起振荡响应(等幅)。如果系统在 $j\omega$ 轴上存在重极点，那么它是*不稳定*的[因为它导致式(3.88)中存在 $te^{\pm j\omega_it}$ 项]。例如，在原点处有一对极点(双积分器)会导致无界响应。Matlab 软件可用于极点计算，因此，系统稳定性的确定相对比较容易。

另一种确定特征方程根的位置的方法是劳斯稳定性判据，我们将在下节讨论。

3.6.3 劳斯稳定性判据

有一些方法可在不必求解具体根的情况下，获取多项式根的位置信息。这些方法在 19

⊖ 通过极点位置确定 BIBO 稳定性。

世纪开始发展，并且在 Matlab 软件出现之前大量使用。它们在确定系统稳定性的多项式系数范围方面还是很有用的，特别是多项式的系数为字符(非数字)形式时。研究一个 n 阶系统的特征方程[㊀]：

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \tag{3.90}$$

不需要求解多项式的根，也可以对系统稳定性给出结论。这是一个经典的问题并且现在有多种方法可以解决它。

149

系统稳定的必要条件是式(3.90)的所有根均具有负实部，这反过来要求所有的$\{a_i\}$为正[㊁]。

系统稳定的必要(但不充分)条件是特征多项式所有的系数都为正。

如果任意一个系数为零或者为负，那么系统将在左半平面之外存在极点。这种情况可以通过测试来验证。一旦这基本的必要条件得到满足，就需要更有力的检验方法。劳斯和霍尔维茨(Hurwitz)分别于 1874 年和 1895 年提出了与之等同的稳定性检验方法；我们也将讨论劳斯方法。劳斯公式要求对一个三角阵列进行计算，此三角阵列是$\{a_i\}$的函数。他提出稳定性的充要条件是此阵列中第一列的所有元素均为正。

当且仅当劳斯阵列第一列的所有元素都为正时，系统才是稳定的

为了确定劳斯阵列，首先将特征多项式系数分成两行，分别以第一项和第二项的系数开头，接下来分别为偶数项系数和奇数项系数，即

$$\begin{array}{llllll} s^n: & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1}: & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \end{array}$$

然后添加上后续的几行，完成劳斯阵列：

$$\begin{array}{lllllll}
\text{行}\ n & s^n: & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\
\text{行}\ n-1 & s^{n-1}: & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
\text{行}\ n-2 & s^{n-2}: & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\text{行}\ n-3 & s^{n-3}: & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\text{行}\ 2 & s^2: & * & * & & \\
\text{行}\ 1 & s^1: & * & & & \\
\text{行}\ 0 & s^0: & * & & &
\end{array}$$

第$(n-2)$行和第$(n-3)$行元素的计算公式分别为

150

$$b_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}$$

$$b_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1}$$

$$c_1 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - b_2}{b_1}$$

㊀ 为不失一般性，我们假设多项式是首一的(也就是说最高次项的系数为 1)。

㊁ 如果多项式由一阶和二阶因式之积构成，那么这就很容易理解了。

$$c_2 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = -\frac{\det\begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

注意第$(n-2)$行和下面几行的元素可通过行列式由前面的两行得到。通常情况下，在阵列完成后，第一列有$n+1$个元素。如果它们全为正，那么特征多项式所有的根都位于左半平面。然而，如果第一列的元素不全为正，那么位于右半平面的根的个数等于第一列元素符号的变化次数。+、−、+的模式记作两次符号改变：一次改变从+到−，另一次从−到+。为了简单证明劳斯判据，读者可参考1998年Ho等人的工作。

例3.32 劳斯判据

多项式为

$$a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

满足稳定性的必要条件，因为所有的$\{a_i\}$均为正且不存在非零项。确定多项式的根是否都位于右半平面。

解答。这个多项式的劳斯阵列为

$$\begin{array}{lllll}
s^6: & 1 & 3 & 1 & 4 \\
s^5: & 4 & 2 & 4 & 0 \\
s^4: & \frac{5}{2} = \frac{4\times 3 - 1\times 2}{4} & 0 = \frac{4\times 1 - 4\times 1}{4} & 4 = \frac{4\times 4 - 1\times 0}{4} & \\
s^3: & 2 = \frac{\frac{5}{2}\times 2 - 4\times 0}{\frac{5}{2}} & -\frac{12}{5} = \frac{\frac{5}{2}\times 4 - 4\times 4}{\frac{5}{2}} & 0 & \\
s^2: & 3 = \frac{2\times 0 - \frac{5}{2}\times\left(-\frac{12}{5}\right)}{2} & 4 = \frac{2\times 4 - \left(\frac{5}{2}\times 0\right)}{2} & & \\
s: & -\frac{76}{15} = \frac{3\left(-\frac{12}{5}\right) - 8}{3} & 0 & & \\
s^0: & 4 = \frac{-\frac{76}{15}\times 4 - 0}{-\frac{76}{15}} & & &
\end{array}$$

我们可推断出，由于第一列的元素不全为正，因此多项式在右半平面有根。事实上，因为有两次符号变化，所以有两个极点位于右半平面[⊖]。◀

注意，在计算劳斯阵列时，我们可以通过将某一行乘以或除以一个正数来简化剩余的计算。还要注意最后两行的每一行都具有一个非零元素。

劳斯判据在确定反馈系统保持稳定的参数范围方面也很有用。

例3.33 相对于参数范围的稳定性

考虑图3.39所示的系统。系统的稳定性是

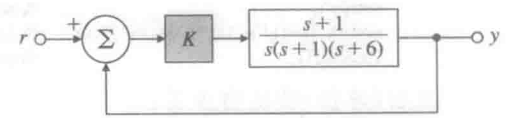


图3.39 用于检验稳定性的反馈系统

⊖ 应用Matlab的roots命令计算所得的多项式的实际根为−3.2644，0.7797±0.7488j，−0.6046±0.9935j，以及−0.8858，它们与我们得到的结论一致。

一个比例反馈增益 K 的函数。确定系统稳定时 K 的范围。

解答。系统的特征方程为

$$1+K\frac{s+1}{s(s-1)(s+6)}=0$$

或

$$s^3+5s^2+(K-6)s+K=0$$

对应的劳斯阵列为

$$\begin{array}{lll} s^3: & 1 & K-6 \\ s^2: & 5 & K \\ s: & (4K-30)/5 & \\ s^0: & K & \end{array}$$

系统若要稳定，则下式必须成立：

$$\frac{4K-30}{5}>0,\quad K>0$$

或

$$K>7.5,\quad K>0$$

因此，劳斯方法为稳定性问题提供了一个解析方案。尽管任何满足该不等式的增益都可使系统稳定，但是动态响应也会因 K 值的不同而不同。给增益一个特定的值，我们就可通过求特征多项式的根来计算闭环极点。特征多项式的系数可通过行矢量来表示(按 s 降幂次序)，即

```
denT = [1 5 K-6 K]
```

并且我们可以使用 Matlab 函数计算上式的根，即

```
roots(denT).
```

当 $K=7.5$ 时，根为 -5 和 $\pm1.22\text{j}$，系统是中性稳定的。注意当 $K=7.5$ 时，劳斯方法预测 $\text{j}\omega$ 轴上存在极点。如果我们设 $K=13$，那么闭环极点位于 -0.46 和 $-0.47\pm1.7\text{j}$ 处，设 $K=25$，它们位于 -1.90 和 $-1.54\pm3.27\text{j}$ 处，在这两种情况下，系统都如劳斯方法预测的那样是稳定的。图 3.40 所示的为三种增益值的暂态响应曲线。为获取这些暂态响应，我们计算如下闭环传递函数：

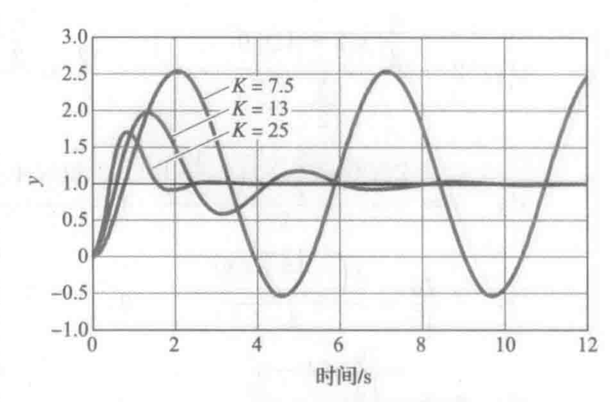


图 3.40　图 3.39 所示系统的暂态响应

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+1)}{s^3+5s^2+(K-6)s+K}$$

其 Matlab 语句如下。

```
s=tf('s');                                   % define the Laplace variable
sysT=K*(s+1)/(s^3+5*s^2+(K-6)*s+K);          % define transfer function
step(sysT);                                  % compute the step response
```

152 ~ 153

画出(单位)阶跃响应图。◀

例 3.34　相对于两个参数变化的稳定性

求控制器增益(K，K_1)的范围，以使图 3.41所示的 PI(比例积分，见第 4 章)反馈系统稳定。

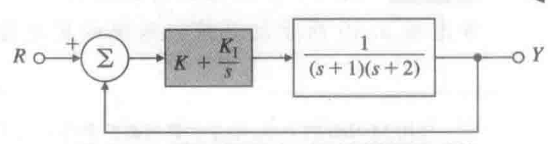


图 3.41　带比例积分(PI)控制器的系统

解答。闭环系统的特征方程为

$$1+\left(K+\frac{K_I}{s}\right)\frac{1}{(s+1)(s+2)}=0$$

我们也可以写成如下形式：

$$s^3+3s^2+(2+K)s+K_I=0$$

对应的劳斯阵列为

$$\begin{array}{lll} s^3: & 1 & 2+K \\ s^2: & 3 & K_I \\ s: & (6+3K-K_I)/3 & \\ s^0: & K_I & \end{array}$$

为使内部稳定，必须有：

$$K_I>0,\quad K>\frac{1}{3}K_I-2$$

可以使用如下 Matlab 指令绘制允许的区域范围：

```
fh=@(KI,K) 6+3*K-KI;
ezplot(fh)
hold on;
f=@(KI, K) KI;
ezplot(f);
```

且该范围是图 3.42(K_I, K)平面的阴影部分，它是稳定性问题的解析解。这个例子说明了劳斯判据方法的重要性，以及它比数字计算方法优越的原因。利用数位搜索方法会很难求得该增益的边界。该闭环传递函数为

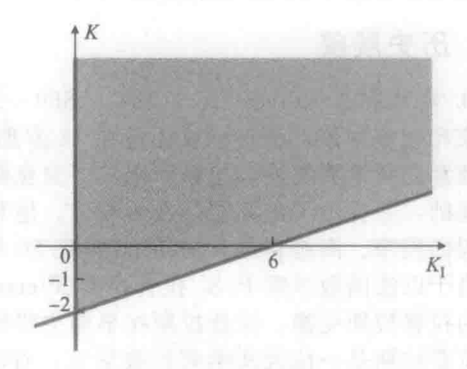


图 3.42 稳定的允许区域

$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{Ks+K_I}{s^3+3s^2+(2+K)s+K_I}$$

如例 3.33 那样，使用 Matlab 函数计算分母多项式，进而求解不同动态补偿增益下的闭环极点。其语句如下。

```
denT = [1 3 2+K KI];  % form denominator
```

类似的，我们可以通过计算分子多项式的根来求解零点。其语句如下。

```
numT = [K KI];  % form numerator
```

系统的闭环零点是$-K_I/K$。图 3.43 所示的为三组反馈增益对应的暂态响应曲线。当$K=1$，$K_I=0$时，闭环极点位于 0 和$-1.5\pm0.86j$处，并且在原点处有一个零点。当$K=K_I=1$时，零极点都位于-1处。当$K=10$，$K_I=5$时，闭环极点位于-0.46和$-1.26\pm3.3j$处，零点位于-0.5处。使用如下 Matlab 函数获取系统的阶跃响应：

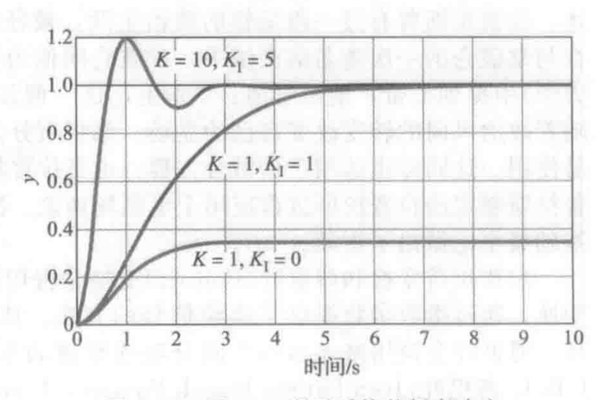


图 3.43 图 3.41 所示系统的暂态响应

```
sysT=tf(numT,denT);    % define system by its numerator and denominator
step(sysT)             % compute step response
```

在 $K_I=0$ 的情况下，存在一个较大的稳态误差(见第4章)。◀

154 ~ 155

如果某一行中第一个元素为零或者整行都为零，则标准的劳斯阵列就无法建立，所以我们只能使用下面的特殊方法来解决。

有如下特殊情况。

劳斯阵列某一行的第一个元素为零或者劳斯阵列中的一整行都为零时，就必须对劳斯阵列计算进行特殊的修改，详情见 www.fpe7e.com 的附录 W.3.6.3。

劳斯-霍尔维茨(Routh-Hurwitz)结果假设特征多项式的精确系数已知。众所周知，多项式的根对多项式系数的轻微扰动也是相当敏感的。如果每个多项式系数的变化范围是已知的，那么，卡里托诺夫(Kharitonov)定理(1978)允许使用劳斯判据来检测四个卡里托诺夫多项式，看看是否是多项式系数变化导致不稳定。

△3.7 从实验数据中获取模型：系统辨识

使用实验数据获取动态系统的模型有多种方法。这个领域的可用信息和相关技术属于系统辨识一类的内容。详情请见 www.fpe7e.com 的附录 W.3.7。

△3.8 幅值和时间尺度

在某些实际情况中，由于实际数据的幅值存在较大变化，因此幅值缩放是必要的。详情请见 www.fpe7e.com 上的附录 W3.8。

3.9 历史展望

O. 海维赛德(Oliver Heaviside，1850－1925年)是一个非同寻常的英国电气工程师、数学家和物理学家。他自学成才且在16岁那年离开学校成为一名电报员。他工作在对他充满敌意的科学界之外。他重新定义了麦克斯韦方程的形式，至今仍在使用。他奠定了电信的基础，并提出了电离层存在的假设。他开发了具有象征意义的海维赛德算子法求解微分方程的程序。海维赛德算法在20世纪20年代和30年代深受电气工程师的欢迎。该方法相当于以法国数学家 P. S. 拉普拉斯(Pierre Simon Laplace，1749—1827年)命名的更加严谨的拉普拉斯变换，拉普拉斯在早期主要致力于微积分算法的研究。

拉普拉斯是一位天文学家和数学家，有时被称为“法国牛顿”。他主要研究太阳系的起源，在他的第五卷“Méchanique céleste”(天体力学)中完成了牛顿对太阳系动力学稳定性研究的工作。156拉普拉斯提出了重力场和电场中电位的一般概念，并用拉普拉斯方程来描述。拉普拉斯曾有过一段短暂的政治生涯，被任命为拿破仑(Napoleon)政府的内政部长。在与拿破仑的一次著名的交谈中，拿破仑问他为什么没有在“Méchanique céleste”(天体力学)中提到上帝，他回答道：“先生，这一假设是没有必要的。”他是一个机会主义者，随着政治风向的转变改变自己的立场。他将微分方程转化为代数运算，使其在工程中很容易使用。这同样也适用于偏微分方程，也是拉普拉斯最初研究变换问题时关注的问题。拉普拉斯制定的拉普拉斯方程应用于电磁场理论、流体力学和天文学中。拉普拉斯同时也对基础概率论做出了贡献。

拉普拉斯变换和傅里叶(Fourier)变换是密切相关的(见附录A)。傅里叶级数和傅里叶变换，通过指数函数提供了描绘信号的方法。傅里叶级数用来表示一系列离散谱周期信号。傅里叶变换用来表示一个积分项连续谱的非周期信号。傅里叶变换是以法国数学家 J. B. J. 傅里叶(Jean Batiste Joseph Fourier，1768－1830年)命名的，他用傅里叶级数表示热传导方程并得到了该方程的解。拉普拉斯和傅里叶是同时代的人，而且彼此之间比较熟悉。事实上，拉普拉斯是傅里叶的老师。在1798年，傅里叶作为科学顾问跟拿破仑一起远征埃及，并且普遍认为此次考察使他们发现了温室效应。

变换方法为解决许多工程问题提供了一个统一的方法。如拉普拉斯变换和傅里叶变换

的线性变换对研究线性系统有很大用途。傅里叶变换在研究稳态行为方面很有用，拉普拉斯变换主要用于研究暂态响应及动态系统的闭环行为。1942 年加德纳(Gardner)和巴恩斯(Barnes)的书对拉普拉斯变换在美国的推广起了巨大作用。

小结

- 拉普拉斯变换是确定线性系统行为的主要方法。时间函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (3.91)$$

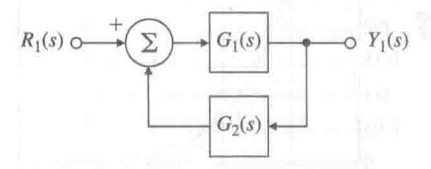
- 这个关系式引出拉普拉斯变换的关键性质，即

$$\mathscr{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0^-) \quad (3.92)$$

- 通过该性质我们可求解线性常微分方程的传递函数。给定系统的传递函数 $G(s)$，并且输入为 $u(t)$，其变换为 $U(s)$，那么系统输出的变换是 $Y(s)=G(s)U(s)$。
- 通常，通过查表如附录 A 中的表 A.2 或通过计算机来求拉普拉斯反变换。拉普拉斯变换和它的反变换的性质在附录 A 中的表 A.1 中做了总结。
- 在求稳定系统的稳态误差时，终值定理非常有用：若 $sY(s)$ 的所有极点位于左半平面，那么

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \quad (3.93)$$

- 框图是表示系统两部分之间关系的一种比较简便的方法。通常可利用图 3.10 和式(3.39)对框图进行简化，即框图与传递函数关系如下。



$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}R_1(s) \quad (3.94)$$

- 极点在 s 平面中的位置决定了系统响应特性，如图 3.16 所示。
- s 平面中极点的位置通过图 3.18 所示的参数来定义。这些参数都涉及图 3.23 中定义的时域量：上升时间 t_r，调节时间 t_s，超调 M_p。对于无零点的二阶系统来说，他们之间的对应关系为

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n} \quad (3.95)$$

$$M_p = \mathrm{e}^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.96)$$

$$t_s = \frac{4.6}{\zeta\omega_n} \quad (3.97)$$

- 当左半平面中存在零点时，超调增加。图 3.27，图 3.28 和图 3.29 对这个影响做了归纳总结。
- 当 s 平面的右半平面存在零点时，阶跃响应会起始于“错误的方向”，并且响应更缓慢。图 3.31对这个影响做了总结，并且称为非最小相位特性。
- 当存在附加稳定极点时，系统响应更缓慢。图 3.36和图 3.37 对这个影响做了总结。
- 对一个稳定的系统来说，所有的闭环极点肯定位于左半平面。
- 当且仅当劳斯阵列的第一列元素全为正时，系统才是稳定的。为了确定劳斯阵列，可参考 3.6.3 小节中的公式。

复习题

3.1 传递函数的定义是什么？

3.2 可用传递函数来描述其系统具有什么性质？

3.3 如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(s)$，那么 $f(t-\lambda)1(t-\lambda)$ 的拉普拉斯变换是什么？

3.4 证明终值定理(FVT)。

3.5 在控制系统中终值定理最常见的用途是什么？

3.6 已知阻尼比为 ζ 和自然频率为 ω_n 的二阶传递函数，阶跃响应上升时间的估计值是多少？阶跃响应中超调的估计值是多少？调节时间的估计值是多少？

3.7 左半平面的零点对二阶阶跃响应的最大的影响是什么？

3.8 右半平面的零点对二阶系统阶跃响应的最显著的影响是什么？

3.9 附加实极点对二阶阶跃响应的最大的影响是什么？

3.10 在控制系统设计中，为什么稳定性是一个重要考虑因素？

3.11 劳斯判据的主要应用是什么？

3.12 在什么情况下，知道如何根据实验数据估算传递函数非常重要？

习题

3.1节

3.1 说明在部分分式展开过程中，复共轭极点的系数也是复共轭的(由此可得每当有复共轭极点对存在时，只需计算其中一个系数即可)。

3.2 求下列时间函数的拉普拉斯变换。

(a) $f(t)=1+7t$；

(b) $f(t)=4+7t+t^2+\delta(t)$，其中：$\delta(t)$是单位脉冲函数；

(c) $f(t)=e^{-t}+2e^{-2t}+te^{-3t}$；

(d) $f(t)=(t+1)^2$；

(e) $f(t)=\sinh t$。

3.3 求下列时间函数的拉普拉斯变换。

(a) $f(t)=4\cos(6t)$；

(b) $f(t)=\sin(3t)+2\cos(3t)+e^{-t}\sin(3t)$；

(c) $f(t)=t^2+e^{-2t}\sin(3t)$。

3.4 求下列时间函数的拉普拉斯变换。

(a) $f(t)=t\sin t$；

(b) $f(t)=t\cos(3t)$；

(c) $f(t)=te^{-t}+2t\cos t$；

(d) $f(t)=t\sin(3t)-2t\cos t$；

(e) $f(t)=1(t)+2t\cos(2t)$。

3.5 求下列时间函数的拉普拉斯变换（* 表示卷积）。

(a) $f(t)=\sin t\sin(7t)$；

(b) $f(t)=\sin^2 t+7\cos^2 t$；

(c) $f(t)=(\sin t)/t$；

(d) $f(t)=\sin t * \sin t$；

(e) $f(t)=\int_0^t \cos(t-\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau$。

3.6 已知 $f(t)$的拉普拉斯变换为 $F(s)$，求下列时间函数的拉普拉斯变换。

(a) $g(t)=f(t)\cos t$；

(b) $g(t)=\int_0^t\int_0^{t_1} f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t_1$。

3.7 运用部分分式展开，求下列各拉普拉斯变换式所对应的时间函数。

(a) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$；

(b) $F(s)=\dfrac{5}{s(s+1)(s+5)}$；

(c) $F(s)=\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}$；

(d) $F(s)=\dfrac{3s^2+6s+6}{(s+1)(s^2+6s+10)}$；

(e) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+16}$；

(f) $F(s)=\dfrac{2(s+3)}{(s+1)(s^2+16)}$；

(g) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$；

(h) $F(s)=\dfrac{1}{s^6}$；

(i) $F(s)=\dfrac{4}{s^4+4}$；

(j) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2}$。

3.8 求下列各拉普拉斯变换式所对应的时间函数。

(a) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$；

(b) $F(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s^5-1}$；

(c) $F(s)=\dfrac{2(s^2+s+1)}{s(s+1)^2}$；

(d) $F(s)=\dfrac{s^3+s+2}{s^4-4}$；

(e) $F(s)=\dfrac{4}{s^4+4}$；

(f) $F(s)=\dfrac{2(s+2)(s+5)^2}{(s^2+1)^2}$；

(g) $F(s)=\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)$。

3.9 使用拉普拉斯变换求下列常微分方程。

(a) $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+3y(t)=0$；$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=2$；

(b) $\ddot{y}(t)-2\dot{y}(t)+4y(t)=0$；$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=2$；

(c) $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=\sin t$；$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=2$；

(d) $\ddot{y}(t)+3y(t)=\sin t$；$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=2$；

(e) $\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)=e^t$；$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=2$；

(f) $\ddot{y}(t)+y(t)=t$；$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=-1$。

3.10 利用卷积积分求系统的阶跃响应，已知该系统的脉冲响应如下式，曲线如图 3.44 所示。

$$h(t)=\begin{cases} te^{-t}, & t\geqslant 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

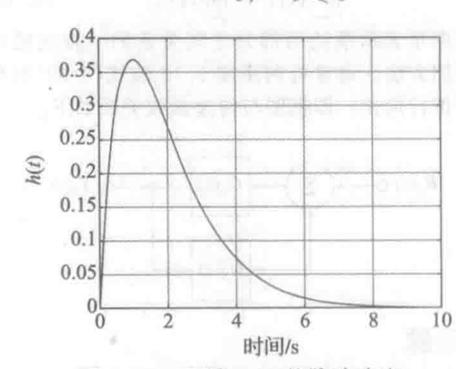


图 3.44 习题 3.10 的脉冲响应

3.11 利用卷积积分求系统的阶跃响应，已知该系统的脉冲响应如下式，曲线如图 3.45 所示。

$$h(t)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant t\leqslant 2, \\ 0, & t<0 \text{ 或 } t>2 \end{cases}$$

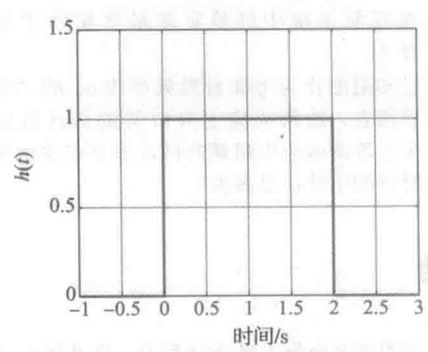


图 3.45 习题 3.11 的脉冲响应

3.12 考虑标准二阶系统

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

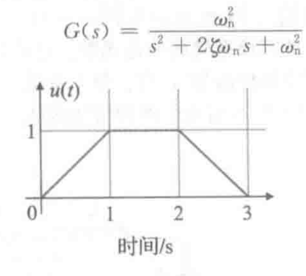


图 3.46 习题 3.12 的输入图

(a) 写出图 3.46 所示信号的拉普拉斯变换。

(b) 如果将该信号用于 $G(s)$ 中，其输出的拉普拉斯变换是什么？

(c) 输入如图 3.46 所示，求系统的输出。

3.13 将一转动载荷与一场控直流电动机相连，该电动机电感可忽略不计。当输入为恒值 100V 时，输出载荷在 1/2s 内达到速度为 1rad/s 的测试被应用到电动机终端。同样可测得其输出稳态速度为 2rad/s。确定电机的传递函数$\frac{\Theta(s)}{V_f(s)}$。

3.14 图 3.47 所示为计算机磁带驱动器简图。

(a) 根据下列参数，写出运动方程。K 和 B 分别代表弹簧常数和磁带伸展阻尼，ω_1 和 ω_2 为角速度。将一个正电流加到直流电动机上之后，电动机将会给主轴一个转矩，使其沿箭头所示方向顺时针转动。求抵消力 $\boldsymbol{F}$ 后的电流大小，然后从等式中消除恒定电流和与其平衡的力 $\boldsymbol{F}$。假定两轮的正角速度方向如图中箭头所示。

$J_1=5\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 为电动机和主轴的转动惯量；$B_1=1\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ 为电动机的阻尼；$r_1=2\times10^{-2}\text{m}$；$K_t=3\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m/A}$ 为电动机转矩常数；$K=2\times10^4\text{N/m}$；$B=20\text{N/m}\cdot\text{s}$；$r_2=2\times10^{-2}\text{m}$；$J_2=2\times10^{-5}\text{kg}\cdot\text{m}^2$；$B_2=2\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ 为黏性阻尼，空转；$F=6\text{N}$ 为恒力；$\dot{x}_1$ 为磁带速度，m/s（被控变量）。

(b) 求电动机电流与磁带位置之间的传递函数。

(c) 求(b)问中传递函数的零极点。

(d) 使用 Matlab 求在阶跃输入 i_a 下 x_1 的响应。

3.15 对于图 2.54 所示的系统，计算电机电压与角位置 θ_2 之间的传递函数。

3.16 计算如图 2.58 所示的两水箱系统的传递函数，其中水箱带有 A 和 C 两个孔。

3.17 对于二阶系统传递函数

$$G(s)=\frac{2}{s^2+s-2}$$

确定如下问题：

(a) 直流增益；

(b) 单位阶跃输入时系统响应的终值。

3.18 考虑如图 3.48 所示的连续辊轧机。假设可调滚轴的运动阻尼系数为 b，轧制材料施加给可调滚轴的作用力与材料的厚度变化成正比：$F_s=c(T-x)$。进一步假设直流电机的转矩常数为 K_t，反电动势常数为 K_e，齿条齿轮的有效半径为 R。

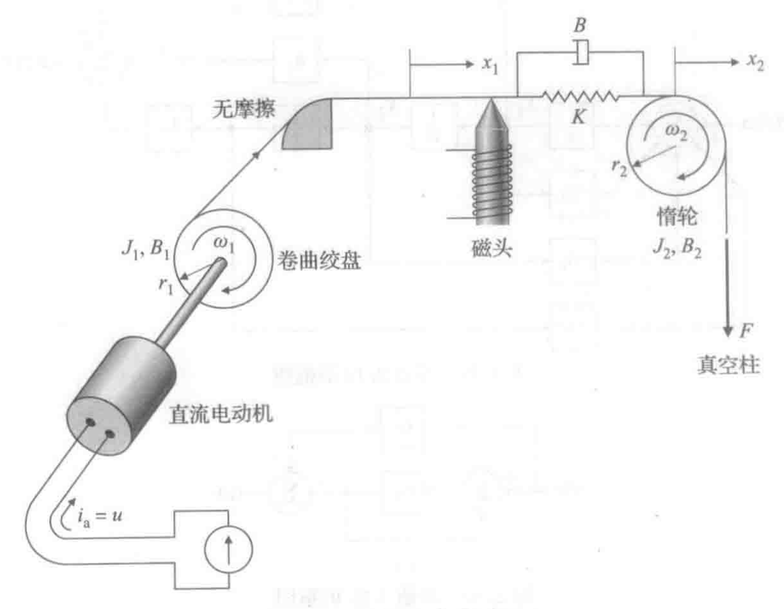


图 3.47 磁带驱动器原理图

(a) 系统输入是什么？输出是什么？

(b) 不忽略可调滚轴重力的影响，画出系统框图并详细指明以下量：$V_s(s)$，$I_o(s)$，$F(s)$（电动机施加在可调滚轴上的作用力）和 $X(s)$。

(c) 尽可能简化框图，并分别标识输出和输入。

3.2 节习题

3.19　考虑图 3.49 所示的框图。注意 a_i 和 b_i 是常数。计算该系统的传递函数。这种特殊结构称为“控制标准形”，将在第 7 章进一步讨论。

3.20　计算图 3.50 所示框图的传递函数。

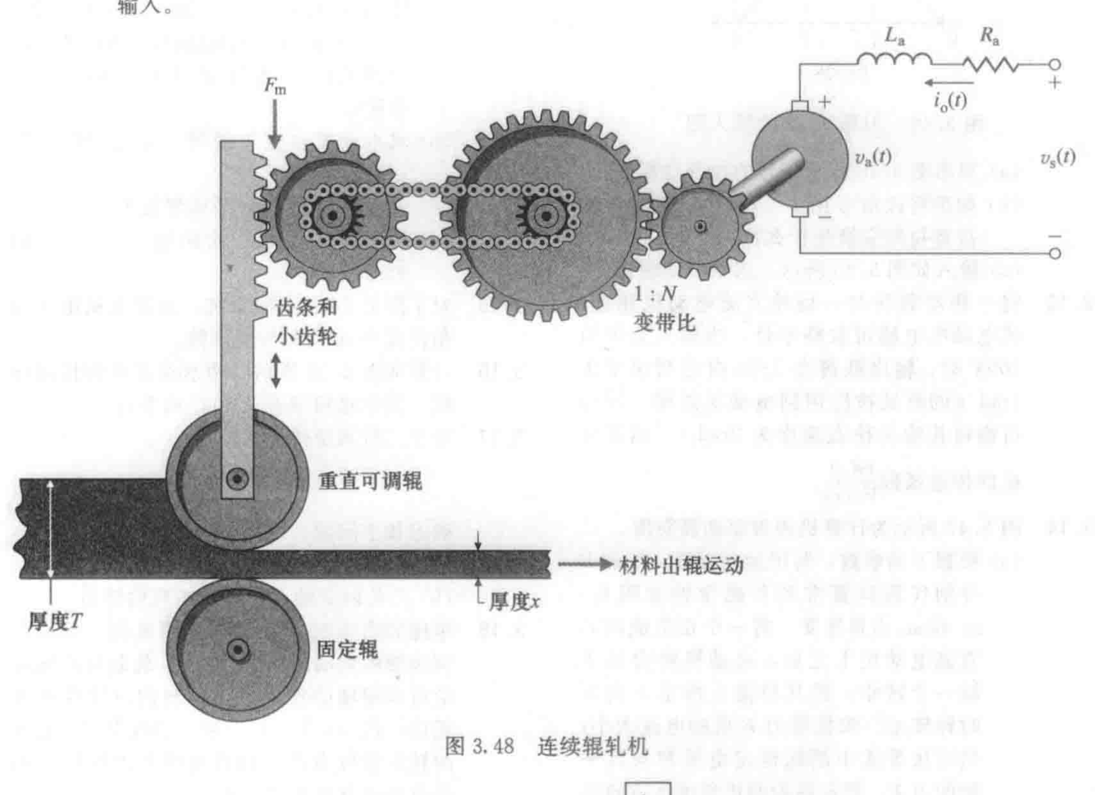


图 3.48　连续辊轧机

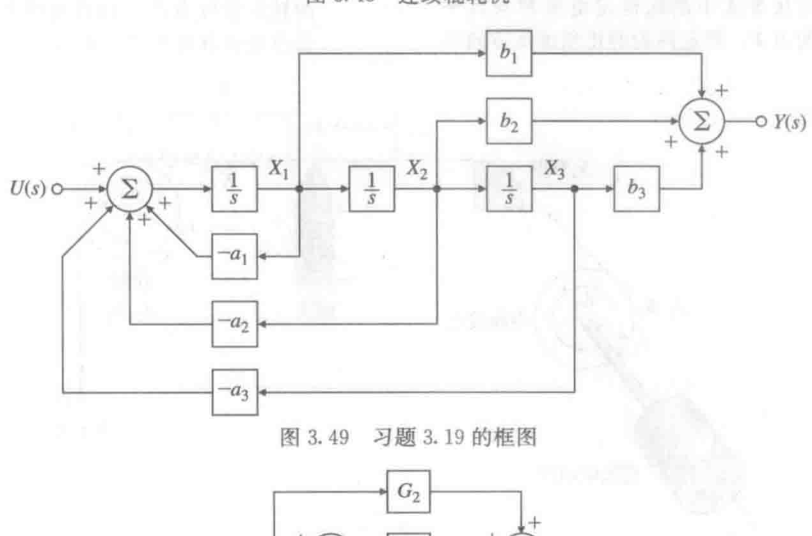
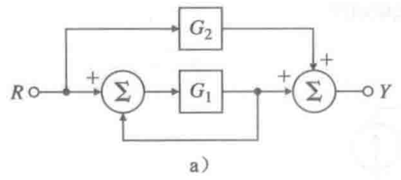


图 3.49　习题 3.19 的框图



a)

图 3.50　习题 3.20 的框图

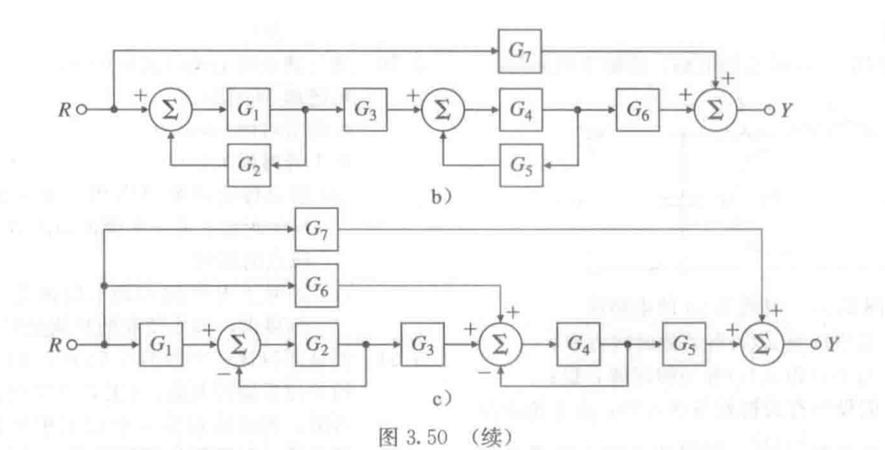


图 3.50 （续）

3.21 使用框图简化法求解图 3.51 所示框图的传递函数。图 3.51b 所示特殊结构称为“观测标准形”，将在第 7 章进一步讨论。

3.22 用框图代数变换式来确定图 3.52 中 $R(s)$ 和 $Y(s)$ 之间的传递函数。

△ 3.23 用梅森公式求解图 3.51 所示框图的传递函数。

△ 3.24 用梅森公式确定图 3.52 中 $R(s)$ 和 $Y(s)$ 之间的传递函数。

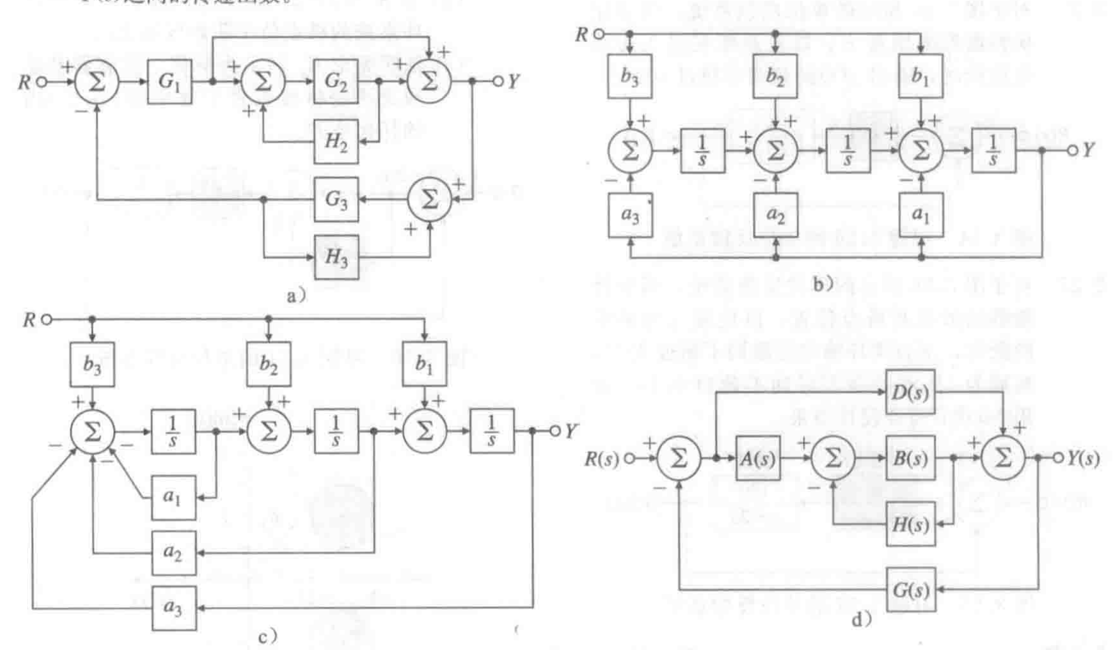


图 3.51 习题 3.21 的框图

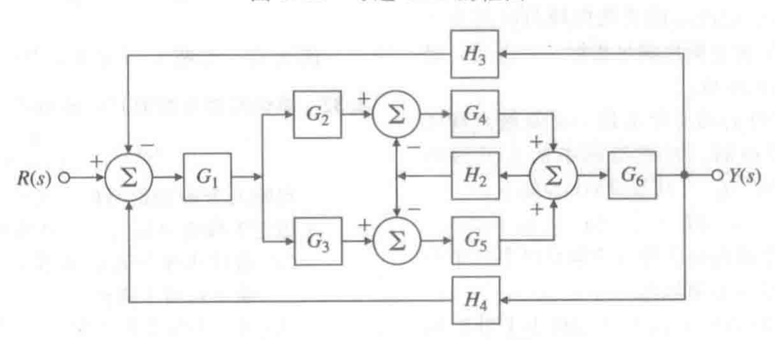


图 3.52 习题 3.22 的框图

3.3 节习题

3.25 对于图 3.53 所示的电路，求解下列问题：

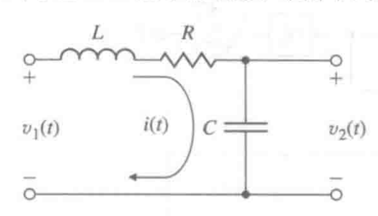


图 3.53 习题 3.25 的电路图

(a) 与 $i(t)$ 和 $v_1(t)$ 有关的时域方程；

(b) 与 $i(t)$ 和 $v_2(t)$ 有关的时域方程；

(c) 假设所有的初始条件为零，求系统的传递函数 $\frac{V_2(s)}{V_1(s)}$、阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n；

(d) 设 $v_1(t)$ 为单位阶跃函数，$L=10\text{mH}$，$C=4\mu\text{F}$，求使 $v_2(t)$ 的超调不超过 25% 的 R 值。

3.26 对于图 3.54 所示的单位反馈系统，列举比例控制器的增益 K，以使系统在输入为单位阶跃时，输出 $y(t)$ 的超调不超过 10%。

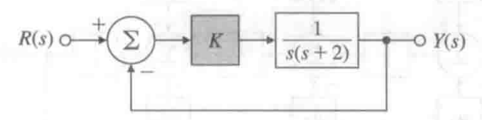


图 3.54 习题 3.26 的单位反馈系统

3.27 对于图 3.55 所示的单位反馈系统，列举补偿器的增益和极点位置，以使输入为单位阶跃时，所有闭环响应的超调不超过 25%，超调为 1% 时的调节时间不超过 0.1s。使用 Matlab 验证设计结果。

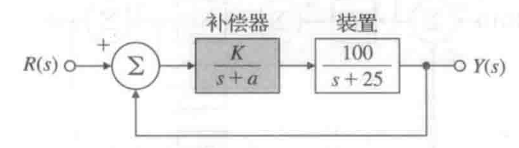


图 3.55 习题 3.27 的单位反馈系统

3.4 节

3.28 假设期望给定的二阶系统的峰值时间小于 t_p'。在 s 平面上画出满足指标 $t_p<t_p'$ 时，极值所对应的区域。

3.29 某伺服系统的动力学通过一对复极点和无有限零点控制。时域指标中的上升时间(t_r)，超调(M_p)，调节时间(t_s)如下：

$t_r\leqslant 0.6\text{s}$； $M_p\leqslant 17\%$； $t_s\leqslant 9.2\text{s}$。

(a) 在 s 平面内画出使系统满足以上三个条件的极点位置区域。

(b) 在绘制的图上标出具有最小上升时间同时也恰好满足调节时间的点(用记号×表示)。

3.30 某反馈系统的响应指标如下：

- 超调 $M_p\leqslant 16\%$；
- 调节时间 $t_s\leqslant 6.9\text{s}$；
- 上升时间 $t_r\leqslant 1.8\text{s}$。

(a) 假设传递函数可以用一个简单的二阶模型近似，在 s 平面内画出合适的闭环极点的区域。

(b) 如果上升时间和调节时间完全符合指标要求，那么预期的超调是多少？

3.31 假设要设计一个如图 3.56 所示的一阶系统的单位反馈控制器。(正如将要在第 4 章学习的，图示构造是一个比例积分控制器。)设计的控制器要使闭环极点位于图 3.57 所示的阴影区域。

(a) 图 3.57 所示阴影区域对应的 ω_n 和 ζ 值是多少(通过图进行简单估计就足够了)。

(b) 令 $K_\alpha=\alpha=2$，求 K 和 K_I 值，以使闭环系统的极点位于阴影区域之内。

(c) 证明无论 K_α 和 α 为何值，控制器都能很灵活地将极点置于复平面(左半)内的任何地方。

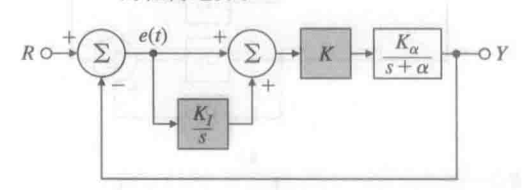


图 3.56 习题 3.31 的单位反馈系统

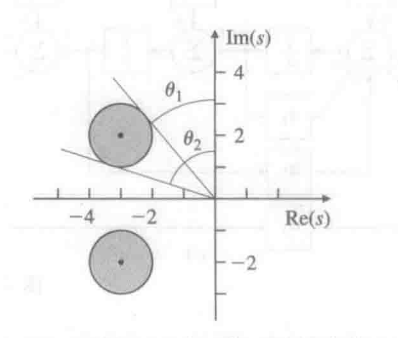


图 3.57 习题 3.31 中所期望的极点位置

3.32 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+2)}$$

当输入为阶跃信号时，所期望的系统响应指定为峰值时间 $t_p=1s$ 和超调 $M_p=5\%$。

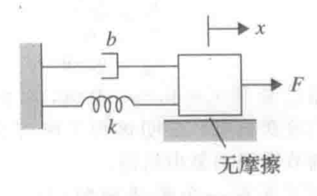
(a) 通过选择合适的 K 值，确定能否同时满足这两个指标。

(b) 在 s 平面中画出两个指标都满足的相关区域，并说明对于一些可能的 K 值，

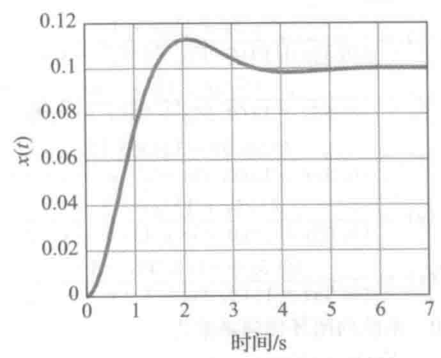
可能的根位置是什么。

(c) 放宽(a)问部分的指标，选择合适的 K 值，运用 Matlab 来验证这些新指标得到了满足。

3.33 如图 3.58a 所示的为一个简单的机械系统。其中参数 k 为弹簧劲度系数，b 为黏滞摩擦常数，m 为质量。其中 2N 的力以 $F=2*1(t)$ 的形式施加给物体，所得的阶跃响应如图 3.58b 所示。系统参数 k，b 和 m 的值是多少？



a）习题3.33的机械系统



b）习题3.33的阶跃响应

图 3.58

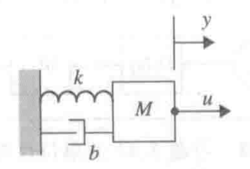


图 3.59 习题 3.34 的简易机械系统

3.34 如图 3.59 所示为一个机械系统。质量 $m=20\text{kg}$，并且控制力 u 与参考输入成比例：$u=Ar$。

(a) 求出从 R 到 Y 的传递函数。

(b) 确定参数 k，b，A 的值，使系统的上升时间 $t_r=1\text{s}$，超调 $M_p=16\%$，零点稳态误差为阶跃 r。

3.35 图 2.32 所示直流电动机的运动方程为式(2.62)～式(2.63)，即

$$J_m\ddot{\theta}_m+\left(b+\frac{K_tK_e}{R_a}\right)\dot{\theta}_m=\frac{K_t}{R_a}v_a$$

假设 $J_m=0.01\text{kg}\cdot\text{m}^2$；$b=0.001\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$；$K_e=0.02\text{V}\cdot\text{s}$；$K_t=0.02\text{N}\cdot\text{m/A}$；$R_a=10\Omega$。

(a) 求外加电压 v_a 和电动机角速度 $\dot{\theta}_m$ 之间的传递函数。

(b) 外加 $v_a=10\text{V}$ 的电压后，电动机的稳态速度是多少？

(c) 求外加电压 v_a 和轴角 θ_m 之间的传递函数。

(d) 设给(c)问中的系统加入一个反馈，使其成为一个位置伺服装置，外加电压为 $v_a=K(\theta_r-\theta_m)$，其中 K 为反馈增益，求 θ_r 和 θ_m 之间的传递函数。

(e) 如果期望超调 $M<20\%$，那么 K 所能取的最大值是多少？

(f) K 为何值时，上升时间小于 $4s$(忽略 M_p 的约束)？

(g) 使用 Matlab 绘制增益 $K=0.5$、1 和 2 时该位置伺服系统的阶跃响应。通过检查所绘制的图，求这三个阶跃响应的超调和上升时间。这些图与(e)和(f)问中计算的结果是否一致？

3.36 欲控制图 3.60 和图 3.61 所示的卫星跟踪天线的仰角。天线和驱动部分的转动惯量为 J，阻尼为 B；在一定程度上，这些是由轴承和空气摩擦引起的，但大部分还是来自直流驱动电动机的反电动势。运动方程为

$$J\ddot{\theta}+B\dot{\theta}=T_c$$

其中：T_c 为该驱动电动机的转矩。设 $J=600\,000\text{kg}\cdot\text{m}^2$ 和 $B=20000\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$。



图 3.60 卫星跟踪天线

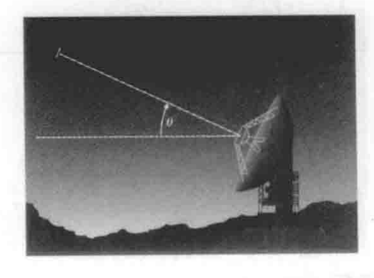


图 3.61 习题 3.36 的天线示意图

(a) 求外加转矩 T_c 和天线角度 θ 之间的传

递函数。

(b) 假设外加转矩已知，根据反馈定律可知，θ跟踪基准命令 θ_r：$T_c = K(\theta_r - \theta)$，其中：$K$ 为反馈增益。求 θ_r 和 θ 之间的传递函数。

(c) 若希望超调 $M_p < 10\%$，那么 K 所能取的最大值是多少？

(d) K 为何值时，上升时间小于 80s(忽略 M_p 的约束)？

(e) 用 Matlab 绘制当 $K = 200$，40，1000，2000 时天线系统的阶跃响应。通过检查所画的图，求上述四个阶跃响应的超调和上升时间。所画的图是否与(c)和(d)问中计算的一致？

3.37 证明二阶系统

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

的响应为

$$y(t) = y_0 \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \arccos\zeta)$$

证明，在欠阻尼情况($\zeta < 1$)下，响应振荡以预期速率即所谓的对数衰减率(见图 3.62)衰减。

$$\delta = \ln\frac{y_0}{y_1} = \ln e^{\sigma\tau_d} = \sigma\tau_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$= \ln\frac{\Delta y_1}{y_1} \approx \ln\frac{\Delta y_i}{y_i}$$

其中：

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

为阻尼自振周期。根据对数衰减率得到阻尼系数为

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

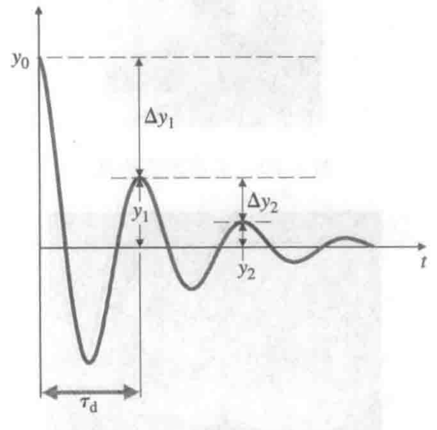


图 3.62 对数衰减率定义

3.5 节习题

3.38 在飞行器控制系统中，理想的俯仰响应(q_o)与俯仰指令(q_c)之间的传递函数描述为

$$\frac{Q_o(s)}{Q_c(s)} = \frac{\tau\omega_n^2(s + 1/\tau)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

实际的飞行器的响应比这个理想的传递函数更为复杂；然而，这种理想的模型只可在自动驾驶仪的设计中起指导作用。假设 t_r 为期望上升时间，那么，有

$$\omega_n = \frac{1.789}{t_r}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1.6}{t_r}$$

$$\zeta = 0.89$$

通过绘制 $t_r = 0.8$s，1.0s，1.2s，1.5s 时的阶跃响应，证明该理想响应具有较快的调节时间和最小超调。

3.39 将下面每一个传递函数近似为二阶传递函数。

$$G_1(s) = \frac{(0.5s+1)(s+1)}{(0.55s+1)(0.95s+1)(s^2+s+1)}$$

$$G_2(s) = \frac{(0.5s+1)(s+1)}{(0.55s+1)(0.95s+1)(s^2+0.2s+1)}$$

$$G_3(s) = \frac{(-0.5s+1)(s+1)}{(0.95s+1)(0.05s+1)(s^2+s+1)}$$

$$G_4(s) = \frac{(0.5s+1)(s+1)}{(0.55s+1)(0.05s+1)(s^2+s+1)}$$

$$G_5(s) = \frac{(0.5s+1)(0.02s+1)}{(0.55s+1)(0.95s+1)(s^2+s+1)}$$

3.40 系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{2700(s+25)}{(s+1)(s+45)(s+60)(s^2+8s+25)}$$

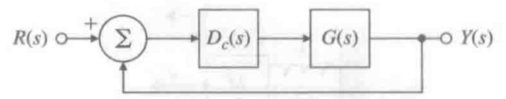


图 3.63 习题 3.41 的单位反馈系统

其中：R 是步长为 7 的阶跃函数。

(a) 给出一个各个响应和的输出时间关系曲线的表达式。

(b) 给出估计的阶跃响应的调节时间。

3.41 考虑图 3.63 所示的系统，其中，

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)}, \quad D_c(s) = \frac{K(s+z)}{s+p}$$

求 K、z 和 p 的值，使闭环系统在阶跃输入下的超调为 10%、调节时间为 1.5s(1% 判断标准)。

△3.42 绘制系统的阶跃响应，且系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s/2+1}{(s/40+1)[(s/4)^2+s/4+1]}$$

根据极点和零点的位置验证你的答案。(不求拉普拉斯反变换)然后将你的答案与通过

Matlab 计算所得的阶跃响应做比较。

3.43 闭环传递函数为

$$H(s)=\frac{\left[\left(\frac{s}{10}\right)^2+0.1\left(\frac{s}{10}\right)+1\right]}{\left[\left(\frac{s}{4}\right)^2+\left(\frac{s}{4}\right)+1\right]}\times\frac{\left[\frac{s}{2}+1\right]\left[\frac{s}{0.1}+1\right]}{\left[\left(\frac{s}{10}\right)^2+0.09\left(\frac{s}{10}\right)+1\right]\left[\frac{s}{0.02}+1\right]}$$

估算该系统的超调 M_p 和暂态调节时间。

3.44 传递函数 $G(s)$ 为

$$G(s)=\frac{\left[\left(\frac{s}{100}\right)^2+0.01\left(\frac{s}{100}\right)+1\right]}{\left[\left(\frac{s}{10}\right)^2+\left(\frac{s}{10}\right)+1\right]\left[\frac{s}{5}+1\right]}\times\frac{1}{\left[\left(\frac{s}{100}\right)^2+0.1\left(\frac{s}{100}\right)+1\right]}$$

如果该系统的输入为阶跃信号，估算上升时间，调节时间和超调是多少？并简单叙述一下理由。

3.45 三个闭环传递函数。分别为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=T_1(s)=\frac{2}{s^2+2s+2}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=T_2(s)=\frac{2(s+3)}{2(s^2+2s+2)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=T_3(s)=\frac{6}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

当输入为单位阶跃信号时，估算每个传递函数的上升时间，调节时间和超调。

3.46 下面给出了五个传递函数，分别为

$$G_1(s)=\frac{40}{s^2+4s+40}$$

$$G_2(s)=\frac{40}{(s+1)(s^2+4s+40)}$$

$$G_3(s)=\frac{120}{(s+3)(s^2+4s+40)}$$

$$G_4(s)=\frac{20(s+2)}{(s+1)(s^2+4s+40)}$$

$$G_5(s)=\frac{36040/401(s^2+s+401)}{(s^2+4s+40)(s^2+s+901)}$$

(a) 哪个传递函数满足超调 $M_p\leqslant5\%$？

(b) 哪个传递函数满足上升时间 $t_r\leqslant0.5\text{s}$？

(c) 哪个传递函数满足调节时间 $t_s\leqslant2.5\text{s}$？

3.47 考虑两个非最小相位系统，分别为

$$G_1(s)=\frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)} \tag{3.98}$$

$$G_2(s)=\frac{3(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \tag{3.99}$$

(a) 画出 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的单位阶跃响应，特别注意相应的暂态部分。

(b) 说明与零点位置相关的这两个响应的特性有何不同。

(c) 考虑一个稳定且严格恰当的系统(也就是说，m 个零点和 n 个极点，其中 $m<n$)。$y(t)$表示系统阶跃响应。如果该响应在开始阶段朝“错误”方向运动，那么阶跃响应会有负超调。证明当且仅当系统的传递函数在 RHP(右半平面)中有奇数个实数零点时，该稳定且严格恰当的系统具有负超调。

3.48 求与式(3.65)相对应的脉冲响应和阶跃响应之间的关系，其中：

(a) 具有重根。

(b) 都是实根。用双曲线(正弦，余弦)表示答案以便更好的表明系统响应的性质。

(c) 阻尼系数 ζ 值为负。

3.49 考虑如下带有附加极点的二阶系统：

$$H(s)=\frac{\omega_n^2 p}{(s+p)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

单位阶跃响应为

$$y(t)=1+Ae^{-pt}+Be^{-\sigma t}\sin(\omega_d t-\theta)$$

其中：

$$A=\frac{-\omega_n^2}{\omega_n^2-2\zeta\omega_n p+p^2}$$

$$B=\frac{p}{\sqrt{(p^2-2\zeta\omega_n p+\omega_n^2)(1-\zeta^2)}}$$

$$\theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}+\arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{p-\zeta\omega_n}$$

(a) 随 p 增大，$y(t)$中哪一项起主导作用？

(b) 对于较小的 p 值，求 A 和 B 的估计值。

(c) 随 p 增大，哪一项起主导作用？(变小就什么而言的？)

(d) 设 $\omega_n=1$ 和 $\zeta=0.7$，使用上述的 $y(t)$ 的详细表达式或者是 Matlab 命令 step，画出当 p 的取值范围从非常小到非常大时上述系统的阶跃响应。在哪个点上附加极点对系统响应的影响将不再存在？

3.50 考虑如下具有附加零点的二阶单位直流增益的系统：

$$H(s)=\frac{\omega_n^2(s+z)}{z(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

(a) 证明系统的单位阶跃响应为

$$y(t)=1-\frac{\sqrt{1+\frac{\omega_n^2}{z^2}-\frac{2\zeta\omega_n}{z}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\sigma t}\cos(\omega_d t+\beta_1)$$

其中：

$$\beta_1=\arctan\frac{-\zeta+\frac{\omega_n}{z}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(b) 求出系统阶跃响应的超调 M_p 的表达式。

(c) 给定超调 M_p 的值，如何求解 ζ 和 ω_n？

3.51 如图 3.64 所示的为自动驾驶仪设计的框图，用来保持飞行器的俯仰姿态角 θ。升降角 δ_e 和俯仰姿态角 θ 相关的传递函数为

$$\frac{\Theta(s)}{\delta_e(s)}=G(s)=\frac{50(s+1)(s+2)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)}$$

其中 θ 在一定程度上为俯仰姿态角，δ_e 在一定程度上为升降角。自动驾驶仪控制者使用俯仰姿态角误差 e 根据以下传递函数调整飞机升降：

$$\frac{\delta_e(s)}{E(s)}=D_c(s)=\frac{K(s+3)}{s+10}$$

用 Matlab 求 K 的值，使单位阶跃变化时系统在 θ_r 处的超调小于 10%，上升时间比 0.5s 快。然后检查不同的 K 值时系统的阶跃响应，评价一下对复杂系统的上升时间和超调测量的难度。

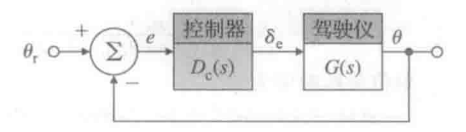


图 3.64 习题 3.51 自动驾驶仪的框图

3.6 节习题

3.52 在一个不稳定的飞行器的响应中，不稳定度的测量标准是在非零初始条件下，该飞行器的时间响应幅值达到稳定时的 2 倍时所需的时间(见图 3.65)。

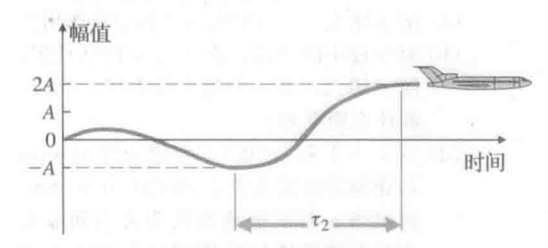


图 3.65 双倍幅值的时间

(a) 对于一阶系统而言，证明时间的 2 倍为

$$\tau_2=\frac{\ln 2}{p}$$

其中：p 为右半平面极点的位置。

(b) 对于一个二阶系统(右半平面有两个复极点)，证明：

$$\tau_2=\frac{\ln 2}{-\zeta\omega_n}$$

3.53 将单位反馈应用到下列开环系统中，使用劳斯稳定性判据确定所得的闭环系统是否稳定。

(a) $KG(s)=\dfrac{4(s+2)}{s(s^3+2s^2+3s+4)}$；

(b) $KG(s)=\dfrac{2(s+4)}{s^2(s+1)}$；

(c) $KG(s)=\dfrac{4(s^3+2s^2+s+1)}{s^2(s^3+2s^2-s-1)}$。

3.54 用劳斯稳定性判据确定下述方程中有多少根具有正实部。

(a) $s^4+8s^3+32s^2+80s+100=0$；

(b) $s^5+10s^4+30s^3+80s^2+344s+480=0$；

(c) $s^4+2s^3+7s^2-2s+8=0$；

(d) $s^3+s^2+20s+78=0$；

(e) $s^4+6s^2+25=0$。

3.55 求 K 的取值范围，以使下述多项式的根都位于左半平面：

$$s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+K=0$$

通过在 s 平面内绘制不同 K 值时多项式的根，使用 Matlab 来验证所求答案。

3.56 一个典型的磁带驱动器系统的传递函数为

$$KG(s)=\frac{K(s+4)}{s[(s+0.5)(s+1)(s^2+0.4s+4)]}$$

其中时间的单位是 ms。使用劳斯稳定性判据确定 K 的取值范围，以使系统在特征方程 $1+KG(s)=0$ 时稳定。

3.57 考虑如图 3.66 所示的闭环磁悬浮系统。确定系统参数(a，K，z，p，K_0)的条件，以保证闭环系统的稳定性。

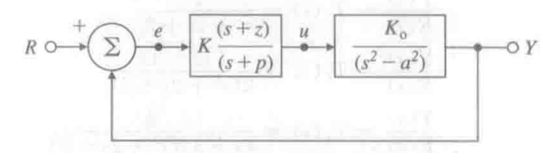


图 3.66 习题 3.57 的磁悬浮系统

3.58 考虑如图 3.67 所示的系统。

(a) 计算闭环特征方程。

(b) (T，A)取何值时可使系统稳定？提示：使用

$$e^{-Ts}\approx 1-Ts$$

或

$$e^{-Ts}\approx\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s}$$

作为纯延迟因素或许可以得到近似结果。作为一个选择方案，也可用计算机 Matlab (Simulink)软件来对系统进行仿真，或者是求不同的 T 和 A 值时系统特征方程的根。

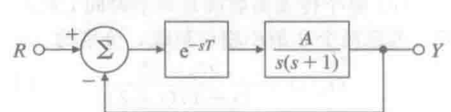


图 3.67 习题 3.58 的控制系统

3.59 修正劳斯判据，使其能应用于所有极点位于$-\alpha(\alpha>0)$左面的情况。将该修正后的判据应用到下述多项式中：

$$s^3+(6+K)s^2+(5+6K)s+5K=0$$

求使多项式所有极点的实部均小于1时的K的值。

3.60 假设已知闭环系统的特征多项式为

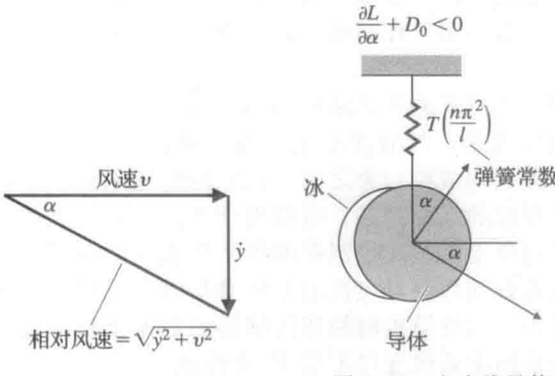
$$s^4+(11+K_2)s^3+(121+K_1)s^2+(K_1+K_1K_2+110K2+210)s+11K_1+100=0$$

求闭环系统稳定时增益K_1和K_2的约束条件，并在(K_1, K_2)平面画出允许区域。你可能更希望使用计算机解决这个问题。

3.61 在冬天暴风雪天气中，电线导体被冰覆盖，空中的电力线有时会低频高振幅垂直振荡，或快速振动。当有风存在时，这些冰受到空气升力和拉力作用，导致电力线有上下几米幅值的振荡。大幅快速的波动能引起导体间碰撞，并且由于其对电力线支架巨大的运动载荷而对支架造成结构性破坏。反过来说，这些会导致电力供应中断。假设导线为刚性电线，仅局限于做垂直运动，且用弹簧减振器悬挂着，如图3.68所示。该导线振动的简单模型为

$$m\ddot{y}+\frac{D(\alpha)\dot{y}-L(\alpha)v}{(\dot{y}^2+v^2)^{1/2}}+T\left(\frac{n\pi}{l}\right)y=0$$

其中：m为导体质量；y为导体垂直位移；D为空气拉力；L为空气升力；v为风速；α为空气动力迎角，$-\arctan(\dot{y}/v)$；T为导体张力；n为谐波频率数；l为导体长度。设$L(0)=0$和$D(0)=D_0$（一个常数）。在$y=\dot{y}=0$附近将方程线性化。使用劳斯稳定性判据证明当$\frac{\partial L}{\partial \alpha}+D_0<0$时，电线振动存在。



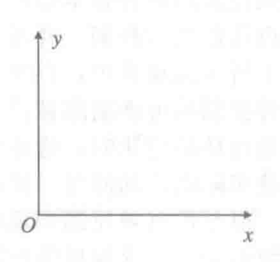


图3.68 电力线导体

157
~
179

第4章

反馈系统初步分析

反馈分析概述

下面3章将介绍控制器设计的三种方法。在此之前，对于我们描述的每个方法有必要给出一些有用的假设并导出常用的方程。通常，施加控制的动态系统是非线性的，且非常复杂。然而，在初步分析中，我们假设被控对象和控制器可以表示为线性时不变(LTI)的动态系统，并假设它们通常是单输入、单输出的，因此可以用简单的标量传递函数表示。正如第1章中所述，控制的基本问题是*稳定性*、*跟踪*、*调节*和*灵敏度*问题。本章的分析目标是重新讨论线性动态设定的条件，求解作用于控制器上的约束方程，以及确定控制器能达到的基本目标。

实现控制的两种基本结构是如图4.1所示的开环结构和如图4.2所示的闭环结构，闭环结构也称作反馈控制。开环控制的定义是，没有使输出影响控制效果的闭合信号通道。180 在图4.1所示的结构中，在参考信号施加到被控对象之前，控制器传递函数会修改参考信号。这种控制器可能消除被控对象不理想的系统动态，得到更合乎需要的控制器动态。另外，当运行环境变化时，施加到被控对象上的开环控制和改善系统响应的校正行为不依赖于对系统实际响应的测量。例如，飞机自动驾驶，飞机的某些参数随飞行高度和速度改变而变化，但是没有被反馈到飞机运行中。而反馈控制使用传感器测量输出和通过反馈间接调整系统的动态。尽管反馈控制可能使稳定系统变得不稳定(恶性循环)，但是对于每个目标来说，反馈比开环控制能给设计者带来更多的灵活性和更好的控制效果。

章节概述

本章首先研究简单的开环结构和基本的反馈结构。4.1节给出两种结构的一般形式方程，并依次对*稳定性*、*跟踪*、*调节*和灵敏度进行比较。4.2节更加详细地分析多项式输入响应的稳态误差。作为描述稳态性能的术语，当稳态误差是一个有限常数时，按照输入多项式的最大阶数对控制系统指定一个类型号。对于每一个类型都定义一个适当的误差常数，这便于设计者计算所考虑的误差的大小。

尽管麦克斯韦和劳斯提出了确定反馈系统稳定性的数学基础，但是早期的控制器设计主要采用基于经验的大量反复试验，由此出现了通用的控制器，即4.3节中的*比例积分微分*(PID)结构。这一装置共有三项：实现反馈回路的比例项；确保常值参考输入和干扰输入时稳态误差为零的积分项；能提高(或实现)系统稳定性和动态响应性能的微分项。在该节中将分别研究这三项并说明它们的作用。作为PID控制器设计的部分进展，一个主要的步骤是选择三个参数的过程，这一步骤也称为控制器整定。齐格勒(Ziegler)和尼科尔斯(Nichols)提出并发表了需要进行的一系列实验和待测量的特性，以及由此确定整定值的研究结果，本节主要讨论这些步骤。4.4节讨论基于对象逆模型的前馈控制的概念。在选181 修内容部分，4.5节简要介绍越来越广泛使用的数字控制器的实现问题。4.6节讨论时域响应对参数变化的灵敏度问题。最后4.7节是对本章内容的历史展望。

4.1 控制的基本方程

首先集中介绍在本书其余部分用到的一系列方程和传递函数。对于图4.1所示的开环

系统，如果在被控对象输入处有干扰作用，其输出则为

$$Y_{ol}=GD_{ol}R+GW \tag{4.1}$$

误差，即参考输入和系统输出间的差为

$$E_{ol}=R-Y_{ol} \tag{4.2}$$

$$=R-[GD_{ol}R+GW] \tag{4.3}$$

$$=[1-GD_{ol}]R-GW \tag{4.4}$$

图 4.1 参考输入为 R；控制为 U；干扰为 W；输出为 Y 的开环系统

此时，开环传递函数为

$$T_{ol}(s)=G(s)D_{ol}(s)$$

对于反馈控制，图 4.2 给出了基本的单位反馈结构。具有三个外部输入：参考输入 R，系统输出要跟踪其轨迹；干扰输入 W，控制要将其抵消，使其不再影响系统输出；传感器噪声 V，控制器应忽略其影响。对于图 4.2 所示的反馈框图，其系统输出和控制方程分别由三个输入响应的方程叠加表示为

$$Y_{cl}=\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}R+\frac{G}{1+GD_{cl}}W-\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}V \tag{4.5}$$

$$U=\frac{D_{cl}}{1+GD_{cl}}R-\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}W-\frac{D_{cl}}{1+GD_{cl}}V \tag{4.6}$$

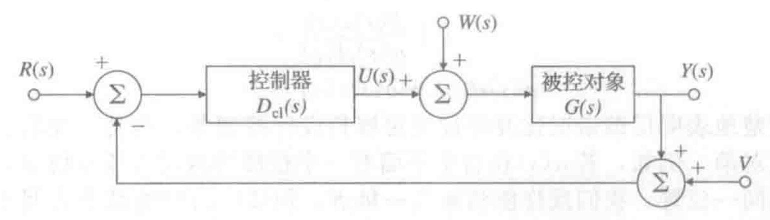


图 4.2 参考输入为 R；控制为 U；干扰为 W；输出为 Y；传感器噪声为 V 的闭环系统

182

或许比这些更重要的是误差方程，即

$$E_{cl}=R-Y_{cl}$$

$$E_{cl}=R-\left[\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}R+\frac{G}{1+GD_{cl}}W-\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}V\right] \tag{4.7}$$

$$=\frac{1}{1+GD_{cl}}R-\frac{G}{1+GD_{cl}}W+\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}V \tag{4.8}$$

我们可以把式(4.5)，式(4.6)和式(4.8)改写为紧凑形式，即

$$Y_{cl}=\mathcal{T}R+G\mathcal{S}W-\mathcal{T}V \tag{4.9}$$

$$U=D_{cl}\mathcal{S}R-\mathcal{T}W-D_{cl}\mathcal{S}V \tag{4.10}$$

$$E_{cl}=\mathcal{S}R-G\mathcal{S}W+\mathcal{T}V \tag{4.11}$$

其中：定义两个传递函数分别为

$$\mathcal{S}=\frac{1}{1+GD_{cl}} \tag{4.12}$$

和

$$\mathcal{T}=\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}} \tag{4.13}$$

此时，闭环传递函数为

$$T_{cl}=\mathcal{T}=\frac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}$$

这两个传递函数的重要性将在本节后面体现出来。运用这些方程，我们将探索开环、闭环情况下系统的四个基本控制目标：稳定性、跟踪、调节和灵敏度。

4.1.1 稳定性

正如第 3 章所讨论的，稳定性的条件可简述为：传递函数所有的极点必须在左半坐标平面(LHP)。在式(4.1)描述的开环系统中，即为GD_{ol}的极点。为表明稳定性这一要求体现在控制器上的约束，我们定义多项式$a(s)$、$b(s)$、$c(s)$和$d(s)$，使得$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}$和$D_{ol}(s)=\frac{c(s)}{d(s)}$，因此$GD_{ol}=\frac{bc}{ad}$。由这些定义，稳定性的条件是$a(s)$和$d(s)$在右半平面(RHP)都没有极点。经验不足的工程师可能认为当$a(s)$有一个极点在右半平面使被控对象不稳定时，把$c(s)$的零点和这个极点对消可以镇定被控对象。然而，这个不稳定极点依然存在，且微小的噪声或干扰将会导致输出增长直至饱和或系统故障。类似地，如果$b(s)$在右半平面的零点使被控对象响应变差，使用$d(s)$的极点抵消这个零点也会导致系统不稳定。开环结构不能用于镇定不稳定的被控对象，因此，如果被控对象不稳定，也就不能使用开环控制。

183

对于式(4.8)给出的反馈系统，系统极点是方程$1+GD_{cl}=0$的根。再利用上面所定义的多项式，系统的特征方程为

$$1+GD_{cl}=0 \tag{4.14}$$

$$1+\frac{b(s)c(s)}{a(s)d(s)}=0 \tag{4.15}$$

$$a(s)d(s)+b(s)c(s)=0 \tag{4.16}$$

此方程清楚地表明反馈情况比开环情况更容易设计控制器。然而，我们仍然要避免不稳定的零极点对消。例如，若$a(s)$在右半平面有一个根使得被控对象不稳定，把$c(s)$的一个零点配置在同一位置，我们或许能消除这一极点。但式(4.16)的结果表明不稳定的极点仍然是系统的极点，这一方法不起作用。不过，与开环情况不同，若$a(s)$在右半平面有一个极点，则仍可以设计反馈控制器使系统稳定。例如，在第 2 章中我们由倒立摆得到的传递函数简记为$G(s)=\frac{1}{s^2-1}$，即记$b(s)=1$，$a(s)=s^2-1=(s+1)(s-1)$。假如我们取$D_{cl}(s)=\frac{K(s+\gamma)}{s+\delta}$，则系统的特征方程为

$$(s+1)(s-1)(s+\delta)+K(s+\gamma)=0 \tag{4.17}$$

这是麦克斯韦研究调速器时遇到的问题：参数在满足什么条件时，这一方程所有的根将位于左半平面(LHP)？劳斯解决了这一问题。在本例中，一个简单的方法是取$\gamma=1$，并且抵消(稳定的)公因子。注意到，在此例中抵消是可以的，因为$(s+1)$是稳定极点，很容易求解抵消后的二阶方程，并把剩下的两个极点配置到任意期望的位置。

练习：若希望将特征方程变为$s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$，试根据$\zeta$和$\omega_n$求出$K$和$\delta$。

4.1.2 跟踪

跟踪问题是使系统输出尽可能近地跟上参考输入。在开环实例情况下，若被控对象是稳定的，在右半平面没有零极点，则原则上可以选择控制器来对消被控对象的传递函数，且能替换成工程师所期望的任意一个传递函数。这看起来很方便，但是会带来三个弊端：首先，控制器的物理实现要求控制器有合适的传递函数，即传递函数的零点数目不能多于极点数目。第二，工程师不能过于贪心去要求一个不切实际的快速响应设计。整个分析都是基于被控对象是线性的假设条件，被控对象的快速响应要求有较大的系统输入，若要求太大，则系统输入就会导致系统饱和。再次表述，工程师有职责知道被控对象的极限，而利用其信息合理设置期望的整体传递函数。第三，尽管原则上可以对消任意左半平面的极点，但是下一节有关灵敏度方面要面对这样一个事实：被控对象的传递函数随时会发生变化，对消左半平面内靠近虚轴的极点，极有可能会导致灾难乘虚而入，即当极点移动一

184

点，系统就会产生无法接受的暂态响应。

练习：已知被控对象的传递函数为$G(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+9}$，控制器的传递函数为$D_{cl}(s)=\dfrac{c_2s^2+c_1s+c_0}{s(s+d_1)}$，采用单位反馈使系统闭环。试求控制器的参数，使得闭环系统的特征方程为$(s+6)(s+3)(s^2+3s+9)=0$。[⊖]

185

{答案：$c_2=18$，$c_1=54$，$c_0=162$，$d_1=9$}。

练习：试证明如果上题中系统的参考输入是一个幅值为A的阶跃输入，则系统稳态误差将为0。

4.1.3 调节

当系统参考输入为常数且干扰存在时，调节问题就是保持较小的系统误差。从开环框图可以看出，对于任一个干扰输入W或者V，开环控制器对系统响应根本没有作用，所以这种控制结构不能起到调节作用。我们来看反馈情况，从式(4.8)可以看出，处理W和V在控制器设计中产生了冲突。例如：被控对象的干扰对系统误差起作用的项是$\dfrac{G}{1+GD_{cl}}W$。要选择D_{cl}使这一项较小，我们应使D_{cl}尽可能大，若可行则可取无穷大。另一方面，传感器噪声的误差项是$\dfrac{GD_{cl}}{1+GD_{cl}}V$。不幸的是这种情况下，如果对$D_{cl}$取较大值，传递函数趋向于单位1，传感器噪声根本不变小！该怎么办呢？可以看出，两项中的每一项都是频率的函数，因此，它们各项的值在取某些频率时会较大，取某些频率时会较小。我们还注意到大多数被控对象的干扰都出现在频率很低时。事实上，最常见的情况是，偏差都是在频率为零时出现。另一方面，一个好的传感器要求没有偏差，在整个低频范围内只有非常小的噪声。于是，利用这一信息，我们设计控制器的传递函数在低频时较大，从而降低W的影响；在高频时较小，能够降低传感器高频噪声。在每种情况下控制工程师必须确定频率范围的最佳位置，使穿越频率从放大到衰减。

练习：试证如果W是一个常数偏差，并且D_{cl}在$s=0$处有一个极点，那么由此偏差带来的误差将为0。而当G在原点有一个极点时，由偏差带来的误差将不为0。

4.1.4 灵敏度

假定被控对象在运行过程中某一特定频率的增益在运行中由设定值G变成$G+\delta G$。这个变化率用一个分数或百分数表示为$\delta G/G$。为了分析，我们设定频率为0，并让开环控制器增益设定值为$D_{ol}(0)$。因此，在开环情况下，系统标称总增益是$T_{ol}=GD_{ol}$，加上被控对象的摄动增益，整个增益为

$$T_{ol}+\delta T_{ol}=D_{ol}(G+\delta G)=D_{ol}G+D_{ol}\delta G=T_{ol}+D_{ol}\delta G$$

因此，增益的变化是$\delta T_{ol}=D_{ol}\delta G$。传递函数$T_{ol}$相对于对象增益$G$的灵敏度$S_G^T$定义为$T_{ol}$的变化率，即$\dfrac{\delta T_{ol}}{T_{ol}}$相对于$G$的变化率的比值。形式表示为

$$S_G^T=\frac{\dfrac{\delta T_{ol}}{T_{ol}}}{\dfrac{\delta G}{G}} \tag{4.18}$$

$$=\frac{G}{T_{ol}}\frac{\delta T_{ol}}{\delta G} \tag{4.19}$$

以方程的形式代入后，我们得到

⊖ 这一过程称为“极点配置”，我们将在第7章研究这一方法。

$$\frac{\delta T_{\mathrm{ol}}}{T_{\mathrm{ol}}}=\frac{D_{\mathrm{ol}}\delta G}{D_{\mathrm{ol}}G}=\frac{\delta G}{G} \tag{4.20}$$

这意味着如果 G 产生 10% 的误差，则相应的 T_{ol} 也产生 10% 的误差。因此，在开环情况下，有 $\mathcal{S}=1$。

由式(4.5)，在反馈情况下，G 同样地变化，则新的稳态反馈增益为

$$T_{\mathrm{cl}}+\delta T_{\mathrm{cl}}=\frac{(G+\delta G)D_{\mathrm{cl}}}{1+(G+\delta G)D_{\mathrm{cl}}}$$

其中，T_{cl} 是闭环增益。

我们直接采用微分法计算闭环增益的灵敏度。闭环稳态增益为

$$T_{\mathrm{cl}}=\frac{GD_{\mathrm{cl}}}{1+GD_{\mathrm{cl}}}$$

一阶变化正比于该方程的导数，即

$$\delta T_{\mathrm{cl}}=\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{cl}}}{\mathrm{d}G}\delta G$$

式(4.18)中灵敏度的一般表达式为

$$\mathcal{S}_G^{T_{\mathrm{cl}}}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}T_{\mathrm{cl}}\text{ 相对于 }G\text{ 的灵敏度}$$

186

$$\mathcal{S}_G^{T_{\mathrm{cl}}}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{G}{T_{\mathrm{cl}}}\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{cl}}}{\mathrm{d}G} \tag{4.21}$$

于是

$$\mathcal{S}_G^{T_{\mathrm{cl}}}=\frac{G}{GD_{\mathrm{cl}}/(1+GD_{\mathrm{cl}})}\frac{(1+GD_{\mathrm{cl}})D_{\mathrm{cl}}-D_{\mathrm{cl}}(GD_{\mathrm{cl}})}{(1+GD_{\mathrm{cl}})^2}=\frac{1}{1+GD_{\mathrm{cl}}} \tag{4.22}$$

这一结果显示出反馈的主要优势[㊀]：

在反馈控制中，与开环控制增益的误差相比，闭环传递函数增益的误差对于对象增益的变化并不敏感，是开环的 $\mathcal{S}=\frac{1}{1+GD_{\mathrm{cl}}}$ 倍。

如果增益满足 $1+GD_{\mathrm{cl}}=100$，且被控对象增益 G 变化 10%，则仅导致稳态增益变化 0.1%。当闭环回路增益为 100 时，开环控制器对于增益变化的灵敏度是它的 100 倍。具有单位反馈情况的例子很常见，我们可以参照式(4.22)的结果，简记灵敏度为不带上标和下标的 S。因此，定义反馈系统的*灵敏度函数*为

$$\mathcal{S}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{1}{1+GD_{\mathrm{cl}}} \tag{4.23}$$

第 6 章动态反馈控制器设计表现了其用途。*补偿灵敏度函数*被定义为(闭环传递函数另一种表述)

$$\mathcal{T}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\frac{GD_{\mathrm{cl}}}{1+GD_{\mathrm{cl}}}=1-\mathcal{S} \tag{4.24}$$

这两个传递函数对反馈控制的设计非常重要，它们显示出反馈系统的基本关系(将在第 6 章中进一步研究)，即

$$\mathcal{S}+\mathcal{T}=1 \tag{4.25}$$

目前为止，我们所讨论的关于稳态误差的计算，都是在参考输入或干扰输入是常值的前提下得到的。当参考输入或干扰信号是正弦信号时，我们也可以得到极为相似的结论。这一点很重要，例如，在电力系统中，经常会出现由于电力线的干扰而产生的 60Hz 干扰信号。由于更加复杂的信号都是由一定频率范围内的不同频率的正弦信号组成的，并且可使用频率叠加来分析，这是此概念重要的另一个原因。又如，众所周知，人类听觉被限制在 60Hz 到 15 000Hz 频率范围内，因而为声音高保真而设计的反馈放大器、扩音器系统必

187

㊀ 伯德研究了灵敏度理论还有反馈的许多其他特性，定义灵敏度为 $\mathcal{S}=1+GD$，是我们所选择灵敏度的逆。

须能对这一频率范围内的正弦(单纯声调)信号实现准确跟踪。如果我们令图 4.2 所示反馈系统控制器的传递函数为 $D_{cl}(s)$，被控对象的传递函数为 $G(s)$，那么整个系统对频率为 ω_o 的正弦信号的稳态开环增益为 $|G(j\omega_o)D_{cl}(j\omega_o)|$，从而可知反馈系统的误差将为

$$|E(j\omega_o)| = |R(j\omega_o)|\left|\frac{1}{1+G(j\omega_o)D_{cl}(j\omega_o)}\right| \tag{4.26}$$

为了使反馈系统误差在 ω_o 频率输入时降到 1%，就必须使 $|1+GD_{cl}|\geqslant 100$，或 $|G(j\omega_o)D_{cl}(j\omega_o)|\geqslant 100$。因此对一个好的高保真放大器来说，在频率为 $2\pi\times 60\leqslant\omega\leqslant 2\pi\times 15\,000$ 的范围内，必须都能保持很高的回路增益。我们将在第 6 章中深入分析基于频率响应方法的设计。

滤波实例

对于含有跟踪参考输入 $R(s)$ 的非单位前置滤波器 $F(s)$，和非单位传感器动态 $H(s)$ 的情况，系统的输出方程和各种灵敏度函数需要重新推导。具体内容在附录 W4.1.4.1 中，可登录 www.fpe7e.com 进行参考及查阅。

4.2 多项式输入的稳态误差控制：系统类型

在研究调节问题时，我们所研究的是，输入为常值参考信号和常值干扰的情况。甚至在一般的跟踪问题中，参考输入是长时间范围的常数，或通常用一个阶次较低的时间多项式来进行适当的近似。例如，当天线跟踪卫星的仰角时，卫星靠近正上方时，卫星角度与时间关系曲线为 S 形的曲线，如图 4.3 所示。在与伺服机构的响应速度相关的重要时段内，该信号可以用一个时间的线性函数来近似(称为斜坡函数或速度输入)。又如电梯的位置控制，一个斜坡参考输入使电梯在未到达下一楼层时按照匀速运动。很少情况下，可以将输入信号用长时间的常加速度信号来近似。出于对这些情况的考虑，引导我们研究多项式输入下稳定系统的稳态误差。

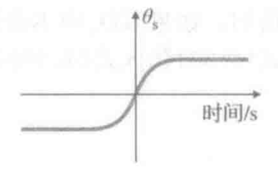


图 4.3 卫星跟踪信号

188

作为多项式输入的稳态误差研究的一部分，我们提出一个术语来表示这些结果。例如，根据系统能够达到理想跟踪的多项式阶次，我们可以划分系统类型。例如，一个系统能跟踪一个阶次为 1 的多项式，并且稳态误差为常数，则称为 1 型的。另外，为了量化跟踪误差大小，定义了几个*误差常数*。下面的所有分析都假定系统是稳定的，否则分析毫无意义。

4.2.1 跟踪的系统类型

在如图 4.2 所示的单位反馈系统中，系统误差可以由式(4.8)来描述。如果我们仅考虑参考输入且设定 $W=V=0$，那么误差方程简化为

$$E=\frac{1}{1+GD_{cl}}R=\mathcal{S}R,\quad \mathcal{S}=\frac{1}{1+GD_{cl}} \tag{4.27}$$

考虑到多项式输入，我们令 $r(t)=t^k/k!\ 1(t)$，其拉普拉斯变换式为 $R=\frac{1}{s^{k+1}}$。在不考虑实际信号的单位时，用机械系统的基本术语来描述，即 $k=0$ 的阶跃输入为位置输入，$k=1$的斜坡输入为速度输入，当 $k=2$ 时为加速度信号输入，对误差公式分别应用终值定理得

$$\lim_{t\to+\infty}e(t)=e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s) \tag{4.28}$$

$$=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+GD_{cl}}R(s) \tag{4.29}$$

$$=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{1+GD_{cl}}\frac{1}{s^{k+1}} \tag{4.30}$$

我们首先考虑这样一个系统，其传递函数 GD_{cl} 在原点处无极点，也就是没有积分项，且系统的输入为单位阶跃输入 $R(s)=1/s$，因此 $r(t)$ 是一个阶次为零的多项式。此时，方程(4.30)简化为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+GD_{cl}}\frac{1}{s} \tag{4.31}$$

$$\frac{e_{ss}}{r_{ss}}=\frac{e_{ss}}{1}=e_{ss}=\frac{1}{1+GD_{cl}(0)} \tag{4.32}$$

其中：$r_{ss}=\lim_{t\to+\infty} r(t)=1$。

根据系统类型的定义可知，该系统为0型系统，此时，令 $GD_{cl}(0)\overset{\text{def}}{=\!=}K_p$ 为位置误差常数。注意上述方程为相对误差，如果参考输入为阶次大于1的多项式，导致误差将会无界增长。0型系统能够完全跟踪最高阶次为0的多项式输入信号。如果 $GD_{cl}(s)$ 在原点处有一个极点，继续用这一方法考虑阶次为1的多项式输入信号，但可以用一个常用的设定对式(4.30)直接进行估计。对于这种情况，有必要对当 s 趋于0时控制器和被控对象的反应进行描述。为此，将极点(s)不在原点的项合并为函数 $GD_{clo}(s)$，该项在 $s=0$ 时为有限值，因此定义常值 $GD_{clo}(0)=K_n$，且闭环传递函数写为

189

$$GD_{cl}(s)=\frac{GD_{clo}(s)}{s^n} \tag{4.33}$$

例如，如果 GD_{cl} 中不含积分项，则 $n=0$。如果含有一个积分项，则 $n=1$，依此类推。将式(4.33)代入式(4.30)中可得

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+\dfrac{GD_{clo}(s)}{s^n}}\frac{1}{s^{k+1}} \tag{4.34}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s^n}{s^n+K_n}\frac{1}{s^k} \tag{4.35}$$

由此方程可知：如果 $n>k$，则 $e=0$；如果 $n<k$，则 $e\to+\infty$；如果 $n=k=0$，则 $e_{ss}=\dfrac{1}{1+K_o}$；如果 $n=k\neq 0$，则 $e_{ss}=1/K_n$。如上所述，如果 $n=k=0$，其输入为0阶多项式，即阶跃信号或位置信号，常数 K_o 称作位置常数，记为 K_p，系统被定义为0型系统。当 $n=k=1$ 时，输入为1阶多项式即斜坡或速度输入信号，常数 K_1 为速度常数，记为 K_v，系统被定义为1型(读作"一型")。用相似的方法，可以定义2型甚至更高型的系统。图4.4清晰地给出了一个1型系统在斜坡参考输入下的响应情况，且明确标出了输入与输出之间的误差值为 $\dfrac{1}{K_v}$。

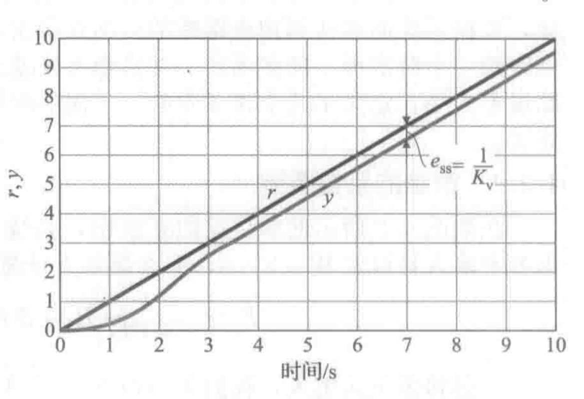


图4.4　斜坡响应与 K_v 之间的关系

190

应用式(4.33)，这些结果可以概括为

$$K_p=\lim_{s\to 0} GD_{cl}(s),\quad n=0 \tag{4.36}$$

$$K_v=\lim_{s\to 0} sGD_{cl}(s),\quad n=1 \tag{4.37}$$

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2 GD_{cl}(s),\ n=2 \tag{4.38}$$

稳态误差作为多项式输入阶以及系统类型的函数，选择合适的公式可计算系统稳态误

差，如表 4.1 所示。

表 4.1　误差关于系统类型的函数

型号输入	阶跃信号(位置信号)	斜坡信号(速度信号)	抛物线信号(加速度信号)
0 型	$\frac{1}{1+K_p}$	$+\infty$	$+\infty$
1 型	0	$\frac{1}{K_v}$	$+\infty$
2 型	0	0	$\frac{1}{K_a}$

例 4.1　速度控制的系统类型

确定系统类型及由 $D(s)=k_P$ 给出的比例反馈速度控制系统的相对误差常数。被控对象的传递函数是 $G=\dfrac{A}{\tau s+1}$。

解答。在本例中，$GD_{cl}=\dfrac{k_P A}{\tau s+1}$，应用式(4.36)可以看出，在 $s=0$ 处没有极点，$n=0$。因此，该系统是 0 型系统，其误差常数是位置常数，值为 $K_p=k_P A$。◀

例 4.2　应用积分控制的系统类型

对于带有比例积分控制为 $D_c=k_P+k_I/s$ 的速度控制的例子，试确定系统类型和相对误差常数。被控对象的传递函数是 $G=\dfrac{A}{\tau s+1}$。

解答。在本例中，回路传递函数是 $GD_{cl}(s)=\dfrac{A(k_P s+k_I)}{s(\tau s+1)}$，作为一个在 $s=0$ 处具有单个极点的单位反馈系统，可以立即看出，系统是 1 型系统。速度常数由式(4.37)表示为 $K_v=\lim\limits_{s\to 0} sGD_{cl}(s)=Ak_I$。◀　191

系统类型的定义有利于更快地确定系统跟踪多项式输入的能力。在单位反馈结构中，如果 1 型系统参数发生变化，却不移动系统在原点处的极点，那么速度常数将发生改变，但系统在常值输入时的稳态误差仍为零，且系统类型不发生改变。同样的情况也适用于二阶或更高阶的系统。因此，可以说在单位反馈结构中，系统类型对于参数变化具有鲁棒性。鲁棒性是在各种控制结构中选择单位反馈结构的重要原因。

另一种误差常数的表达式形式可以用闭环传递函数$\mathcal{T}(s)$直接地表示出来。如图 4.5 所示，传递函数中含有一个传感器传递函数，即

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{GD_c}{1+GD_cH} \tag{4.39}$$

系统误差为

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)-\mathcal{T}(s)R(s) \tag{4.40}$$

因此，参考输入到误差的传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)}=1-\mathcal{T}(s) \tag{4.41}$$

并且，系统误差变换为

$$E(s)=[1-\mathcal{T}(s)]R(s) \tag{4.42}$$

假设系统满足终值定理的条件，即 $sE(s)$的所有极点都位于左半平面。这种情况下，通过应用终值定理给出系统稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to+\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s[1-\mathcal{T}(s)]R(s) \tag{4.43}$$

如果参考输入是阶次为 k 的多项式，误差变换为

$$E(s)=\frac{1}{s^{k+1}}[1-\mathcal{T}(s)] \tag{4.44}$$

再由终值定理得稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\frac{1-\mathcal{T}(s)}{s^{k+1}}=\lim_{s\to 0}\frac{1-\mathcal{T}(s)}{s^{k}} \tag{4.45}$$

如上所述，式(4.45)的解可以是零、非零的有限值或者是无穷。当式(4.45)的解为非零常数时，上述系统是 k 型系统。在 1 型或更高类型的系统中，其闭环直流增益等于 1，即此时，$\mathcal{T}(0)=1$。

例 4.3 带转速计反馈的伺服系统的系统类型

考虑一个电动机位置控制问题，电动机轴上的测速计通过反馈测速计电压（正比于轴转速）构成一个非单位反馈系统，如图 4.5 所示，其参数为

$$G(s)=\frac{1}{s(\tau s+1)}$$
$$D_c(s)=k_P$$
$$H(s)=1+k_t s$$

试确定系统类型及与参考输入相关的误差常数。

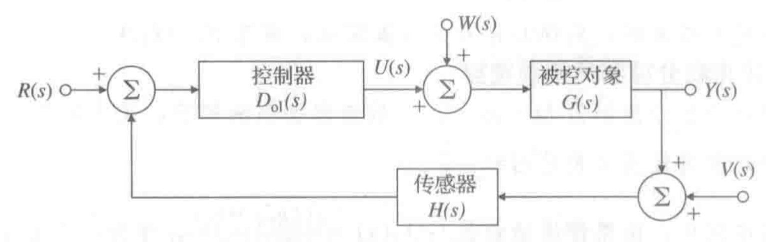


图 4.5　参考输入为 R；控制输入为 U；输出为 Y；传感器噪声为 V 的具有传感器动态的闭环系统

解答。系统误差为

$$\begin{aligned}E(s)&=R(s)-Y(s)\\&=R(s)-\mathcal{T}(s)R(s)\\&=R(s)-\frac{D_c(s)G(s)}{1+H(s)D_c(s)G(s)}R(s)\\&=\frac{1+(H(s)-1)D_c(s)G(s)}{1+H(s)D_c(s)G(s)}R(s)\end{aligned}$$

由式(4.45)得出的系统稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sR(s)[1-\mathcal{T}(s)]$$

对一个多项式参考输入 $R(s)=1/s^{k+1}$，因此

$$\begin{aligned}e_{ss}&=\lim_{s\to 0}\frac{[1-\mathcal{T}(s)]}{s^k}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^k}\frac{s(\tau s+1)+(1+k_t s-1)k_P}{s(\tau s+1)+(1+k_t s)k_P}\\&=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1+k_t k_P}{k_P}, & k=1\end{cases}\end{aligned}$$

所以，系统为 1 型，速度常数是 $K_v=\dfrac{k_P}{1+k_t k_P}$。

注意若 $k_t>0$，为提高稳定性或动态响应，速度常数比单位反馈时的速度常数 k_P 要小。结论是如果用转速计反馈来提升动态响应效果，稳态误差通常会增加，即在提高稳定性和减小稳态误差两方面进行折中。◀

192～193

4.2.2　调节和干扰抑制的系统类型

与根据参考输入定义系统类型一样，还可以根据系统对多项式干扰输入的抑制能力定

义系统类型。从干扰输入 W(s)到误差 E(s)的传递函数为

$$\frac{E(s)}{W(s)} = -\frac{Y(s)}{W(s)} = T_{\mathrm{w}}(s) \tag{4.46}$$

因为，如果参考输入为 0，系统输出即为干扰误差。

与根据参考输入定义的系统类型一样，若系统对阶跃干扰输入信号产生非 0 稳态误差，则系统为 0 型系统，若对斜坡干扰输入产生非 0 稳态误差，则系统为 1 型系统，依此类推。通常，我们可以根据式(4.35)所描述方法来假定常数 n 以及函数 $T_{\mathrm{o,w}}(s)$，其中 $T_{\mathrm{o,w}}(0)=1/K_{\mathrm{n,w}}$，则干扰误差的传递函数可写为

$$T_{\mathrm{w}}(s) = s^n T_{\mathrm{o,w}}(s) \tag{4.47}$$

那么，阶次为 k 的多项式干扰输入的稳态误差为

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{ss}} &= \lim_{s\to 0}\left[sT_{\mathrm{w}}(s)\frac{1}{s^{k+1}}\right] \\ &= \lim_{s\to 0}\left[T_{\mathrm{o,w}}(s)\frac{s^n}{s^k}\right] \end{aligned} \tag{4.48}$$

从式(4.48)可知，若 $n>k$，则误差为 0。若 $n<k$，则误差无界。若 $n=k$，系统类型为 k 型，其稳态误差为 $1/K_{\mathrm{n,w}}$。

例 4.4 直流电动机位置控制的系统类型

考虑如图 4.6 所示单位反馈直流电动机的简化系统模型，其中，干扰转矩为 $W(s)$。在例 2.11 中已经考虑过这一问题。

(1) 控制器为

$$D_{\mathrm{c}}(s) = k_{\mathrm{P}} \tag{4.49}$$

试确定系统类型及干扰输入作用下的稳态误差。

(2) 控制器传递函数为

$$D_{\mathrm{c}}(s) = k_{\mathrm{P}} + \frac{k_{\mathrm{I}}}{s} \tag{4.50}$$

试确定系统类型及干扰输入作用下的系统稳态误差。

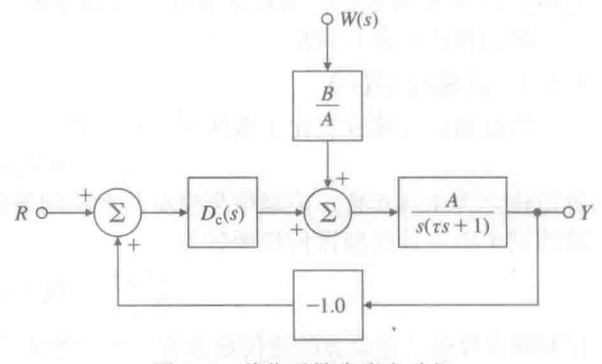


图 4.6 单位反馈直流电动机

194

解答。

(1) 从 W 到 E(其中 $R=0$)的闭环传递函数为

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{w}}(s) &= -\frac{B}{s(\tau s+1)+Ak_{\mathrm{P}}} \\ &= s^0 T_{\mathrm{o,w}} \\ n &= 0 \\ K_{\mathrm{o,w}} &= -\frac{Ak_{\mathrm{P}}}{B} \end{aligned}$$

由式(4.48)可知系统为 0 型系统，系统对单位阶跃转矩输入的稳态误差为 $e_{\mathrm{ss}}=-B/Ak_{\mathrm{P}}$。由前一节可知，当系统类型由参考输入定义时，该系统为 1 型系统。由此我们可以看出，同一系统由不同输入决定的系统类型是不同的。

(2) 对于这一控制器，其干扰误差的传递函数为

$$T_{\mathrm{w}}(s) = -\frac{Bs}{s^2(\tau s+1)+(k_{\mathrm{P}}s+k_{\mathrm{I}})A} \tag{4.51}$$

$$n = 1 \tag{4.52}$$

$$K_{n,w} = -\frac{Ak_I}{B} \tag{4.53}$$

因此系统是 1 型，对单位斜坡干扰输入的稳态误差为

$$e_{ss} = -\frac{B}{Ak_I} \tag{4.54}$$ ◀

特鲁赛尔公式

特鲁赛尔(*Truxal*)(1955 年)根据闭环的零极点推导出了 1 型系统的速度常量公式。可登录 www.fpe7e.com，参见附录 W4.2.2.1。

195

4.3 三项控制器：PID 控制

在下面几章中，我们将基于根轨迹、频率响应和状态空间描述方程，研究三种基本分析和基于图形的设计方法。这里我们描述一种具有古老背景的、基于经验和试错法的控制方法。由简单的比例反馈开始，早期工程师用积分控制消除稳态误差，之后发现很多情况下系统动态响应很差，所以增加了一个基于微分的“预测”项。其结果称作三项或 PID 控制器，其传递函数为

$$D_c(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s \tag{4.55}$$

其中：k_P 为比例项；k_I 为积分项；k_D 为微分项。

我们将逐个进行讨论。

4.3.1 比例控制(P)

当反馈信号线性正比于系统误差时，有

$$u(t) = k_P e(t) \tag{4.56}$$

我们称之为比例反馈。控制信号完全与系统的瞬时误差有关。4.1 节所举的速度反馈控制器的例子中，其控制器传递函数为

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_{cl}(s) = k_P \tag{4.57}$$

控制器方程是没有动态的纯代数方程，我们称 k_P 为比例增益。可以把比例控制器看成带有上下调节“把手”的放大器。如果被控对象是二阶系统，例如不可忽略电感的电动机，[㊀]则被控对象传递函数为

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + a_1 s + a_2} \tag{4.58}$$

此时，带比例控制的闭环系统的特征方程为

$$1 + k_P G(s) = 0 \tag{4.59}$$

可以得到

$$s^2 + a_1 s + a_2 + k_P A = 0 \tag{4.60}$$

在该方程中，设计者可以通过选择 k_P 来控制常数项($a_2 + k_P A$)，这样可以确定自然频率，但是不能控制阻尼项 a_1，因为它与 k_P 无关，系统是 0 型系统，如果把 k_P 取得足够大以得到充分小的稳态误差，那么阻尼项太小，就会使得单纯用比例控制不能获得令人满意的暂态响应。为表明比例控制的这些特征，假设比例控制被控对象的传递函数为 $G(s)$，如图 4.2所示，并令 $a_1 = 1.4$，$a_2 = 1$，$A = 1$。比例控制器由式(4.57)给出。图 4.7 所示的为传递函数

196

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{k_P G(s)}{1 + k_P G(s)} \tag{4.61}$$

㊀ 参见 2.3 节。

在单位阶跃输入 $r=1(t)$ 下的闭环系统响应，k_P 分别取值为 1.5 和 6。系统的输出 y 表明当比例反馈增益变大时系统状态稳态跟踪误差变小。另外，系统响应还表明当增益增加时阻尼减小，响应速度变快。应用终值定理也表明随着增益 k_P 变大，稳态误差将变小，同时控制输入 $u(t)$ 达到非零稳态值。

系统输出和控制信号与干扰的关系分别为

$$\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{G(s)}{1+k_PG(s)},\quad \frac{U(s)}{W(s)}=-\frac{k_PG(s)}{1+k_PG(s)}$$

比较系统干扰响应和输入响应间的闭环传递函数，可以看出阶跃干扰输入信号 W 可产生一个稳态跟踪误差，系统控制值与如图 4.7 所示参考输入的情形相似。干扰输入产生的稳态误差随增益 k_P 的增大而减小，并且系统阻尼比将变小。

当系统阶次高于二阶时，情况会更复杂。当比例增益增加时，某些极点的阻尼比会变大，而另一些会变小，同时增大比例增益能增加响应速度，但是会带来较大的超调和较小的整体阻尼比。对于更高阶系统，过大的比例增益会导致系统不稳定。带比例控制的所有 0 型系统对常数参考输入都将产生非零的稳态误差，不能完全消除常值干扰输入。在不使用过大比例增益的情况下，提高控制稳态精度的方法是引入积分控制，这将在下面进行讨论。

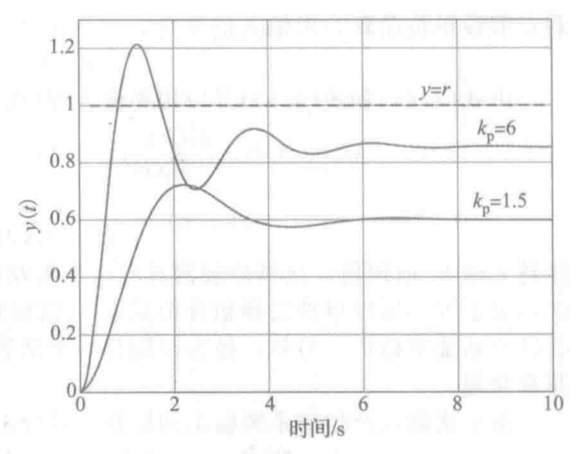


图 4.7　在不同比例反馈增益下，系统稳态跟踪误差及系统的阻尼特性的变化规律

4.3.2　积分控制(I)

当反馈控制信号线性正比于系统误差的积分时，我们称之为*积分反馈*。积分控制的目的是减小稳态跟踪误差和干扰的稳态输出响应。控制律形如

$$u(t)=k_I\int_{t_0}^{t}e(\tau)d\tau \tag{4.62}$$

其中：k_I 为积分增益。

这表示每一时刻的控制信号是过去所有时刻跟踪误差的累加；因此系统控制依赖于系统误差的“历史记录”。图 4.8 表明，任意时刻的控制信号正比于系统误差曲线下的面积(此处表示为 t_1 时刻)。控制器的传递函数为

$$\frac{U(s)}{E(s)}=D_{cl}(s)=\frac{k_I}{s} \tag{4.63}$$

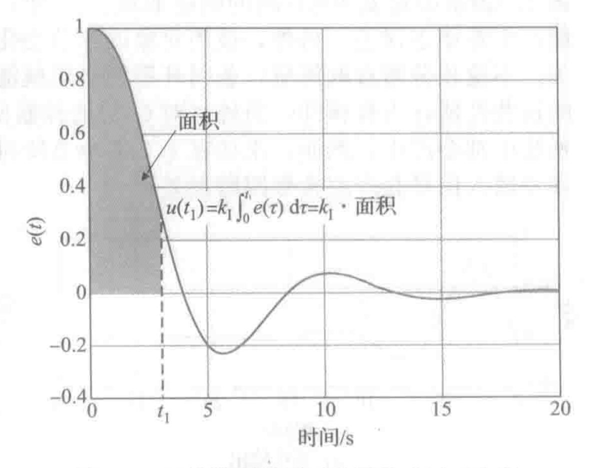


图 4.8　积分控制基于系统误差的历史数据

它是动态的，并且，我们看到，它有一个无限大的直流增益(即当 $s=0$ 时)。因此，我们期望该控制器在稳态时具有优异的性能。下面的例子证实了这一点。该反馈的主要优点是用有限控制增益能产生零稳态误差，因为 $u(t)$ 是过去所有误差值的函数而不像比例控制中 $u(t)$ 仅是当前值的函数。这种特性意味着：可以零误差地消去常值干扰，这是因为产生一个抵消常值干扰的控制信号，不再要求 $e(t)$ 有限。

假设积分控制的被控对象传递函数为 $G(s)$，它与 4.3.1 小节所用电动机具有相同传递函数，如图 4.2 所示，只用积分控制即可镇定该简单系统。应用式(4.63)表示的控制器，从图 4.2我们可以看出，跟踪误差、控制信号，可由参考输入引起的系统输出分别表示为

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\frac{k_I}{s}G(s)}=\frac{s}{s+k_IG(s)},\quad \frac{U(s)}{R(s)}=\frac{\frac{k_I}{s}}{1+\frac{k_I}{s}G(s)}=\frac{k_I}{s+k_IG(s)} \tag{4.64}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{\frac{k_I}{s}G(s)}{1+\frac{k_I}{s}G(s)}=\frac{k_IG(s)}{s+k_IG(s)} \tag{4.65}$$

现在假设单位阶跃参考输入信号为 $r(t)=1(t)$，其拉普拉斯变换式为

$$R(s)=1/s$$

由式(4.64)和式(4.65)并应用终值定理(注意 $G(0)=1$)，可得

$$y(+\infty)=\frac{k_IG(0)}{0+k_IG(0)}=1,\quad e(+\infty)=\frac{0}{0+k_IG(0)}=0 \tag{4.66}$$

$$u(+\infty)=\frac{k_I}{0+k_IG(0)}=G(0)^{-1}=1 \tag{4.67}$$

注意无论 k_P 取何值，比例控制器总有一个跟踪误差，然而无论 k_I 取何值都可使稳态跟踪误差等于零。所以单独选择积分增益 k_I 可以得到一个良好的动态响应；可是增益值过大，会导致系统不稳定。另外，稳态控制是一个常数，它等于被控对象直流增益的逆，直观上非常合理。

由干扰输入产生的系统输出和控制信号分别为

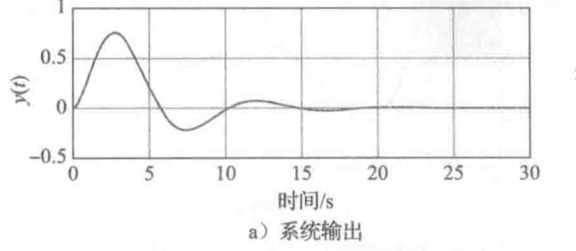
197~199

$$\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{sG(s)}{s+k_IG(s)},\quad \frac{U(s)}{W(s)}=-\frac{k_IG(s)}{s+k_IG(s)} \tag{4.68}$$

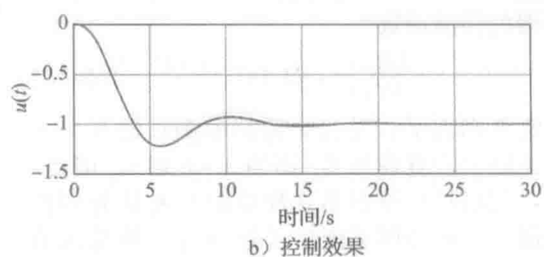
假设单位阶跃的干扰输入为 $w(t)=1(t)$，$W(s)=1/s$，对式(4.68)应用终值定理可得

$$y(+\infty)=\frac{0\times G(0)}{0+k_IG(0)}=0,\quad u(+\infty)=-\frac{k_IG(0)}{0+k_IG(0)}=-1 \tag{4.69}$$

这两个方程表明了输出中的零稳态误差以及控制信号的最终数值能完全抵消干扰输入。图 4.9表示的是 $k_I=0.5$ 时的响应曲线。该例子说明，积分反馈在跟踪和干扰抑制方面均能产生零稳态误差。另外，被控对象的参数变化是可容许的，即上面的结果与系统参数无关。不论积分增益取何值，若闭环系统稳定就能保持渐近跟踪和干扰抑制性能。积分控制的这些性能称为鲁棒性。另外，对 $G(s)$的控制使闭环系统成为 1 型系统，这些特点在 1 型系统中都会产生。然而，正如在 4.2.2 小节所讨论到的，此例积分控制的 1 型系统对斜坡参考输入信号会产生常数跟踪误差。



a）系统输出



b）控制效果

图 4.9　积分控制对常数干扰的抑制性能

由于积分控制的这些显著特性，当然值得在实现复杂程度上付出额外代价。执行器会产生饱和现象(这几乎经常发生)，在应用积分控制时需要专门注意这一点。控制器需要加

一些抗饱和特性来处理执行器饱和(参见第 9 章)。

200

4.3.3 微分(D)控制

经典控制器的最后一项是微分反馈，也称作速率反馈。微分反馈的目标是提高闭环系统稳定性，加快暂态响应及减小超调。因此，当希望提高稳定性时，需要应用微分反馈。在微分反馈中，控制律为

$$u(t) = k_D \dot{e}(t) \tag{4.70}$$

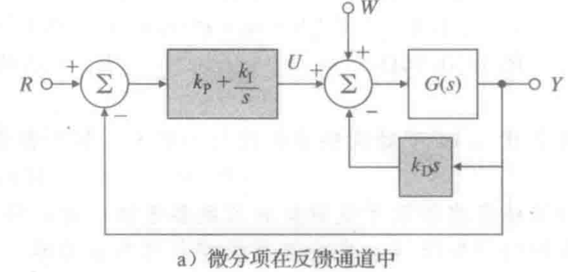
其中：k_D 是微分增益，即控制信号正比于系统误差变化的速率(或导数)。

图 4.2 所示的闭环传递函数变为

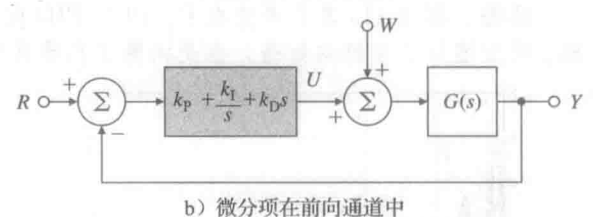
$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_{cl}(s) = k_D s \tag{4.71}$$

我们几乎不单独使用微分控制，它通常和比例控制一起使用。主要原因是微分不提供期望的最终状态信息。此外，若 $e(t)$变为常数，微分控制器的输出将为 0，此时需要由比例控制或积分控制提供控制信号。微分控制的主要特点是它能反映误差信号的变化趋势并采取控制措施。所以说，它具有预测功能。微分控制的缺点是，它会放大噪声，我们将在第 6 章中深入讨论这一问题。

微分项的一个重要作用是，它能对突变的信号做出一个快速响应。所以我们把微分项引入到反馈通道中，用它消除阶跃参考输入的过大响应，如图 4.10a 所示。微分项可作为标准控制器的一项，或用于描述电动机轴上的测速计。式(4.55)表示的微分项在前向通道的系统(如图 4.10b 所示)与图 4.10a 所示系统具有相同的闭环特征方程。需要注意，两个例子中，从参考输入到输出的零点是不同的。微分项在反馈通道中的情况下，参考输入是未被求导的，所以微分项可以避免突然变化带来的不良响应。



a) 微分项在反馈通道中



b) 微分项在前向通道中

图 4.10 PID 控制器框图

4.3.4 比例积分控制(PI)

在比例控制器中，增加积分项以得到较小的稳态误差，称为比例积分控制(PI)。其时域控制方程为

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0}^{t} e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.72}$$

图 4.2 所示的控制器传递函数 $D_{cl}(s)$变成

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_{cl}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} \tag{4.73}$$

实际使用的大多数控制器，若具有积分项，就会有比例项。这种结合通常能得到比只用积分控制更快的系统响应。引入积分项使系统变成 1 型系统，它能完全抑制常值干扰误差。当系统是二阶系统或更高阶的系统时，如果想得到任意的动态，则需要使用 PID 控制。

4.3.5 PID 控制

把三项放在一起得到比例积分微分(PID)控制器，它在时域里的控制方程为

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0}^{t} e(\tau)\mathrm{d}\tau + k_D \dot{e}(t) \tag{4.74}$$

则图 4.2 所示的控制器传递函数变为

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_{cl}(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s \tag{4.75}$$

为说明 PID 控制的效果，考虑式(4.58)所示的二阶被控对象的速度控制。在该例中由$1+GD_{cl}=0$ 得到的特征方程为

$$s^2 + a_1 s + a_2 + A\left(k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s\right) = 0$$

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + A(k_P s + k_I + k_D s^2) = 0 \tag{4.76}$$

201 ~ 202

合并同类项整理得

$$s^3 + (a_1 + Ak_D)s^2 + (a_2 + Ak_P)s + Ak_I = 0 \tag{4.77}$$

在这个方程中，它的三个根决定系统动态响应的特征，在理论上任意选择方程的三个自由参数 k_P，k_I 和 k_D，可任意确定方程的根。若不含微分项，则方程只有两个自由参数，却有三个根，特征方程根的选择将会受到限制。下面用一个数值例子具体地说明这种影响结果。

例 4.5 电动机速度的 PID 控制

考虑直流电动机速度控制，给定参数如下[⊖]。

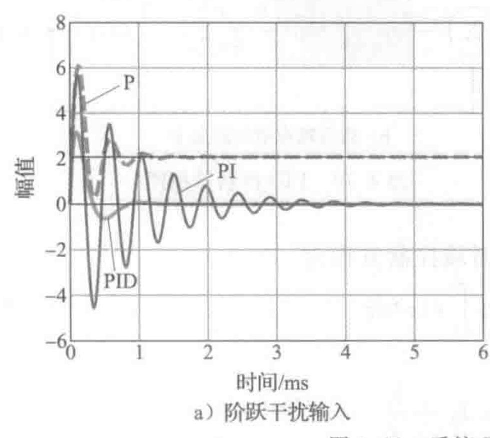
$$J_m = 1.13\times 10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2/\text{rad},\ b = 0.028\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad},\ L_a = 10^{-1}\text{H},$$
$$R_a = 0.45\Omega,\qquad K_t = 0.067\text{N}\cdot\text{m/amp},\ K_e = 0.067\text{V}\cdot\text{s/rad} \tag{4.78}$$

第 2 章 2.14 节对这些参数进行了定义。控制器参数为

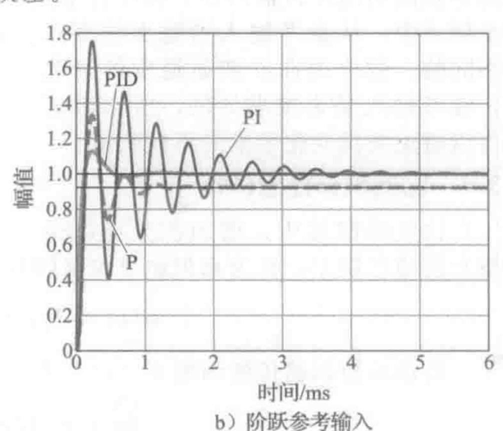
$$k_P = 3,\quad k_I = 15\text{s},\quad k_D = 0.3\text{s} \tag{4.79}$$

当系统存在阶跃干扰转矩和阶跃参考输入时，分别使用三个控制器：P，PI 和 PID 来研究系统的阶跃响应。令未使用的控制器参数为零。

解答。图 4.11a 表示系统在 P、PI 和 PID 反馈控制的下阶跃干扰输入响应。注意加入积分项后增加了系统的振荡，但是消除了稳态误差。



a）阶跃干扰输入



b）阶跃参考输入

203

图 4.11 系统 P、PI、PID 控制的响应

当保持零稳态误差时，增加微分项后减小了振荡。图 4.11b 显示在 P，PI，PID 控制下阶跃参考响应显示出相似的结果。阶跃响应可以通过构造分子和分母的系数矢量（按 s 的阶次降序排列），应用 Matlab 中的阶跃函数进行计算。◄

例 4.6 直流电动机位置控制中的比例积分控制

考虑如图 4.6 所示的单位反馈直流电动机的简化模型，其中干扰转矩为 $W(s)$。令传感器传递函数是$-h$ 而不是-1。

⊖ 这些值已经通过将真实的 L_a 和 L_m 分别乘以 1000 来以毫秒测量时间。

(1) 使用比例控制器，传递函数为

$$D_c(s) = k_P \tag{4.80}$$

试确定系统类型和干扰输入下的稳态误差。

(2) 使用比例积分控制器，传递函数为

$$D_c(s) = k_P + \frac{k_I}{s} \tag{4.81}$$

试确定系统类型和干扰输入下的稳态误差。

解答。

(1) 从 W 到 E(其中 $R=0$)的闭环传递函数为

$$T_w(s) = -\frac{B}{s(\tau s+1)+Ak_P h}$$

$$= s^0 T_{o,w}$$

$$n = 0$$

$$K_{o,w} = -\frac{Ak_P h}{B}$$

应用式(4.48)可得系统是 0 型系统，单位阶跃转矩输入的稳态误差是 $e_{ss}=-B/Ak_P$。由前几节内容可知系统对于参考输入是 1 型系统，并且同一系统在不同输入下，系统类型可以不同。然而，在本例中，系统对于参考输入是 0 型系统。

(2) 若控制器是 PI 控制器，干扰误差的传递函数为

$$T_w(s) = -\frac{Bs}{s^2(\tau s+1)+(k_P s+k_I)Ah} \tag{4.82}$$

$$n = 1 \tag{4.83}$$

$$K_{n,w} = -\frac{Ak_I h}{B} \tag{4.84}$$

204

因此，在本例中，系统是 1 型系统，单位斜坡干扰输入下的稳态误差为

$$e_{ss} = -\frac{B}{Ak_I h} \tag{4.85}$$ ◀

例 4.7 卫星姿态控制

考虑如图 4.12a 所示的卫星姿态控制系统模型，其中：J 是转动惯量；W 是干扰转矩；K 是传感器和参考增益；$D_c(s)$是补偿器。

输入滤波器和单位反馈传感器具有相同增益系数，PD 控制作用下的系统和 PID 控制作用下系统分别由图 4.12b 和图 4.12c 给出，假设在控制作用下系统是稳定的，试确定系统类型和干扰输入作用下系统的误差响应。

(1) 图 4.12b 比例微分控制，控制器传递函数 $D_c(s)=k_P+k_D s$。

(2) 图 4.12c 比例积分微分控制，控制器传递函数 $D_c(s)=k_P+k_I/s+k_D s$ ㊀。

解答。

(1) 由图 4.12b 可知，被控对象在原点有两个极点，系统关于参考输入是 2 型系统。干扰对误差的传递函数为

$$T_w(s) = \frac{1}{Js^2+k_D s+k_P} \tag{4.86}$$

$$= T_{o,w}(s) \tag{4.87}$$

其中：$n=0$，$K_{o,w}=k_P$。系统是 0 型系统，单位阶跃干扰输入的误差为 $1/k_P$。

(2) 对 PID 控制，前向增益在原点有三个极点，所以系统对于参考输入是 3 型系统，

㊀ 注意这些控制器传递函数的零点数大于极点数因此不是实际系统。实际应用中导数项将产生一个高频极点，在此类例子中为简单起见忽略了这个极点。

而干扰输入的传递函数为

$$T_w(s)=\frac{s}{Js^3+k_Ds^2+k_Ps+k_I} \tag{4.88}$$

$$n=1 \tag{4.89}$$

205

$$T_{o,w}(s)=\frac{1}{Js^3+k_Ds^2+k_Ps+k_I} \tag{4.90}$$

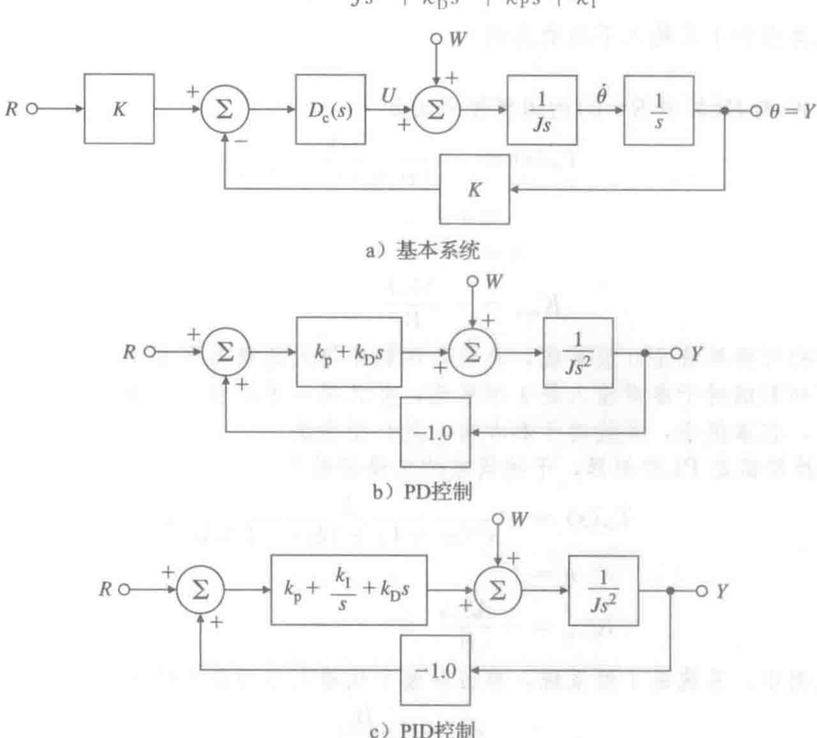


图 4.12 卫星姿态控制模型

系统是1型系统，误差系数为 k_I；因此，单位斜坡干扰输入的误差为 $1/k_I$。◀

4.3.6 PID 控制器的齐格勒-尼科尔斯整定

当PID控制器被提出时，选择一些项的值(称为“整定”控制器)往往用试凑法。为了提高被控对象运行的可操作性，控制工程师不断寻找更加系统化的整定方法。卡伦德（Callender）等人(1936)提出了一种被广泛应用的PID控制器的设计方法，该方法适用的前提条件是被控对象的参数可以通过大量实验估计出来。齐格勒和尼科尔斯(1942年，1943年)推广了这种方法，他们认为大部分控制系统对单位阶跃的响应都表现为如图4.13所示的过程响应曲线。

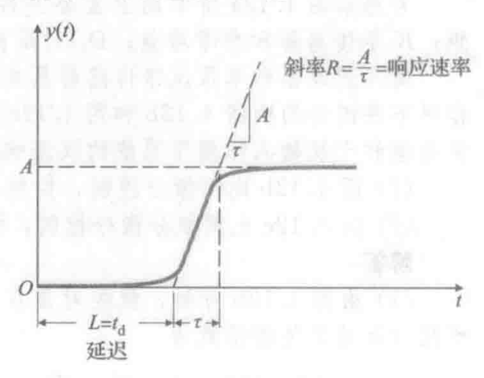


图 4.13 过程响应曲线

该曲线可以由实验中的阶跃响应数据获得。诸多系统都具有S形的响应曲线的特点，可以用具有下面传递函数的系统的阶跃响应来近似：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{Ae^{-st_d}}{\tau s+1} \tag{4.91}$$

这是一个延迟时间为 t_d 秒的一阶系统。式(4.91)中的各个常数可以通过系统对单位阶跃的响应曲线获得。做法如下：在响应曲线的拐点处做切线，切线的斜率为 $R=A/\tau$，切线与

横轴的交点为延迟时间 $L=t_d$，曲线终值为 A 的值[⊖]。

齐格勒和尼科尔斯提出了两种用于整定该上述模型 PID 控制器参数的方法。第一种设计方法是通过改变控制器参数使闭环控制系统对单位阶跃响应的暂态特性衰减率接近 0.25。这意味着系统阶跃响应经过一个振荡周期后幅值衰减为后来的1/4，如图 4.14 所示。1/4 的衰减意味着 $\zeta=0.21$，尽管对于许多应用情况来说，这个值偏小，但是这是考虑了过程控制的快速响应和足够的稳定边界，做出的一个合理折中。他们在模拟计算机上仿真了系统的描述方程，并且调整控制器的参数使系统的动态响应在一个周期内衰减率为 1/4。齐格勒和尼科尔斯所提出的控制器参数为

$$D_c(s)=k_P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right) \quad (4.92)$$

调节参数的取值如表 4.2 所示。

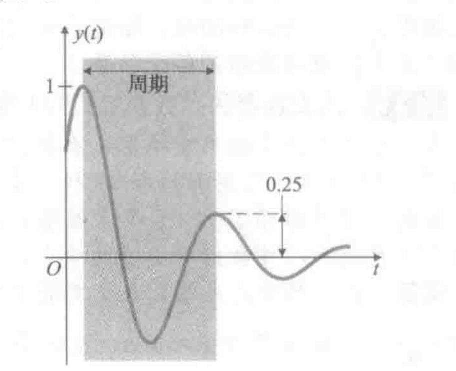


图 4.14 1/4 衰减率

表 4.2 对调节器 $D_c(s)=k_P(1+1/T_I s+T_D s)$ 的齐格勒-尼科尔斯整定，衰减率为 0.25

控制器类型	最优增益
P	$k_P=1/(RL)$
PI	$k_P=0.9/(RL)$ $T_I=L/0.3$
PID	$k_P=1.2/(RL)$ $T_I=2L$ $T_D=0.5L$

极限灵敏度法通过改变系统参数使系统处于临界稳定状态，并通过系统振荡响应的幅值和频率来估计参数值，它不是采用阶跃响应的方法。

具体做法如下，通过增加比例项增益使系统变为临界稳定，振荡的幅值由执行元件的饱和特性决定。将系统此时的增益定义为 K_u(称为极限增益)，振荡周期定义为 P_u(称为极限周期)。这两个值可由图 4.15 和图 4.16 确定。P_u 可在振荡幅值尽可能小的情况下测量出来。整定参数的选择如表 4.3 所示。

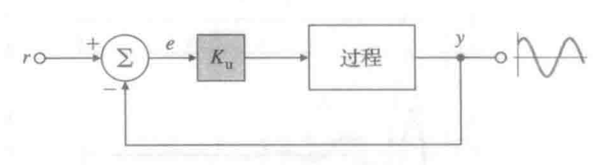


图 4.15 极限增益和周期的确定

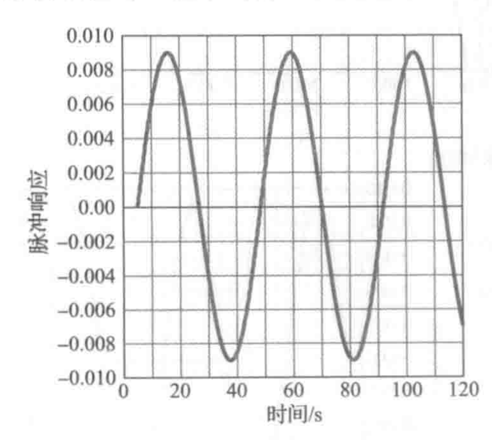


图 4.16 中立稳定系统

表 4.3 基于极限灵敏度法的齐格勒-尼科尔斯调节器 $D_c(s)=k_P(1+1/T_I s+T_D s)$ 的整定

控制器类型	最优增益
P	$k_P=0.5K_u$
PI	$k_P=0.45K_u$ $T_I=\frac{P_u}{1.2}$
PID	$k_P=1.6K_u$ $T_I=0.5P_u$ $T_D=0.125P_u$

大量的实验表明，齐格勒-尼科尔斯提出的控制器参数整定方法对于大多数闭环系统

⊖ K. J. Åström 和其他人指出时间常数 τ 也能从曲线中估计出来，并提出一种包含该参数的更有效的整定参数方法。

都能获得可以接受的闭环响应特性。从后面的例子中可知，用阶跃响应方法得到的增益一般比极限灵敏度法得到的高。要使系统的控制效果更好，就必须以上述方法确定的系统参数为初始条件重复地微调各个参数。

例 4.8 热交换器的参数整定：1/4 衰减率

考虑第 2 章讨论的热交换器，系统的过程响应曲线如图 4.17 所示。应用齐格勒-尼科尔斯方法确定该系统的比例调节器增益和 PI 调节器增益，以得到系统的 1/4 衰减率，并画出相应阶跃响应曲线。

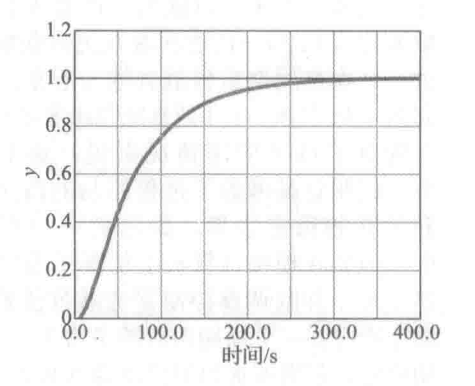


图 4.17 过程的响应曲线

解答。由过程响应曲线，我们测量得到最大斜率为 $R\approx\frac{1}{90}$，时间延迟为 $L\approx 13\text{s}$。根据表 4.2 的齐格勒-尼科尔斯准则，增益为

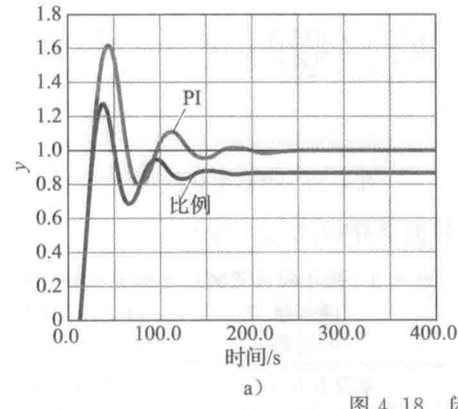
$$\text{比例}: k_P=\frac{1}{RL}=\frac{90}{13}=6.92$$

$$\text{比例积分}: k_P=\frac{0.9}{RL}=6.22$$

$$T_I=\frac{L}{0.3}=\frac{13}{0.3}=43.3$$

图 4.18a 表明了闭环系统在这两种调节器作用下的阶跃响应。

需要注意的是，比例调节器导致了稳态误差，而比例积分调节器可以精确地跟踪阶跃信号。两种调节器都有剧烈的振荡和较大的超调。如果我们将 k_P 的值减为原来的一半，则超调和振荡都能明显减小，如图 4.18b 所示。◀



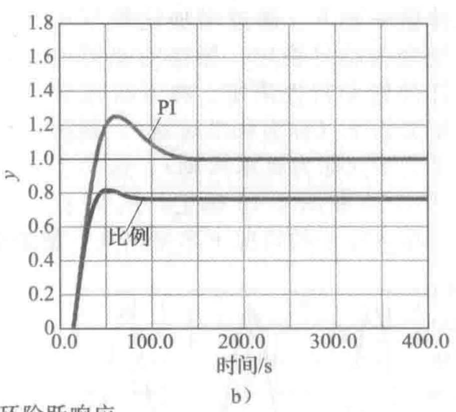


图 4.18 闭环阶跃响应

例 4.9 热交换器的参数整定：振荡特性

对上面例子中研究的热交换器应用比例反馈控制，增大比例增益直到系统对短脉冲输入产生等幅振荡，如图 4.19所示。测量得出极限增益为 $K_u=15.3$，周期为 $P_u=42\text{s}$。

根据极限灵敏度法的齐格勒-尼科尔斯准则，试确定比例调节器和 PI 调节器，并画出相应阶跃响应曲线。

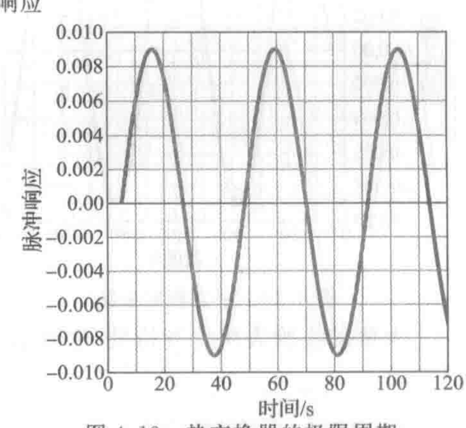


图 4.19 热交换器的极限周期

解答。由表 4.3 可得调节器参数为

比例：$k_P=0.5K_u$， $k_P=7.65$

比例积分：$k_P=0.45K_u$， $k_P=6.885$

$$T_{\mathrm{I}}=\frac{1}{1.2}P_{\mathrm{u}}=35$$

闭环系统的阶跃响应如图4.20a所示。

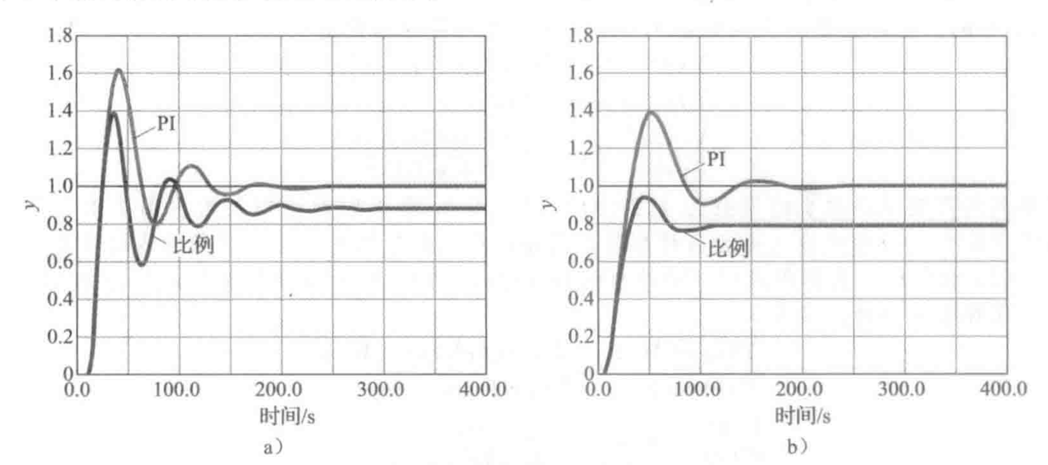


图4.20　闭环系统的阶跃响应

注意该系统的阶跃响应与例4.8中的响应曲线相似。如果把 k_{P} 减为原来的一半，那么超调能明显减小，如图4.20b所示。

这表明了整定准则给出了一个好的开端，但仍需要不断进行更精准的整定。 ◀

4.4　被控对象模型逆的前馈控制

4.3节表明比例控制通常会对干扰或参考输入产生稳态误差。引入积分控制后能消除稳态干扰或常数参考输入带来的误差。然而积分控制往往会降低系统阻尼和稳定性。用前馈控制的方法可缓解这种矛盾，消除由参考输入引起的稳态误差。这可能是因为命令输入是已知量，能够由控制器直接确定。因此我们可计算出产生期望输出需要的控制输入。干扰并不总是可测的，但只要是能够测量，都能用于前馈控制。解决的方法是，确定被控对象传递函数模型直流增益的逆，将其合并到如图4.21所示的控制器中。

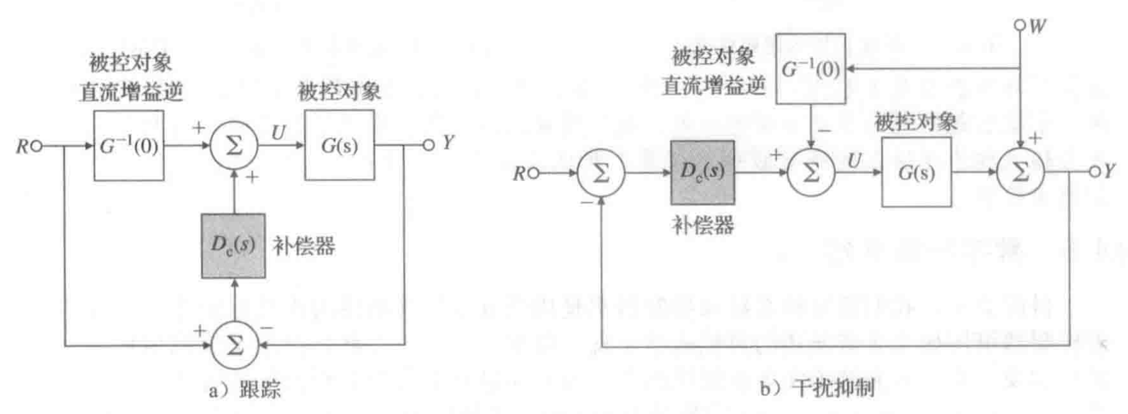


图4.21　前馈控制结构

这样前馈就会提供期望参考输入所需的控制效果，反馈关注的是实际被控对象与受任意干扰影响的被控对象模型之间的差值。

例4.10　直流电动机的前馈控制

考虑4.3节直流电动机速度控制系统（如式(4.58)所示），它的比例控制器增益 k_{P} 有两个不同值分别为1.5和6。(1) 试用前馈控制消除阶跃参考输入引起的稳态跟踪误差。

206～212

(2) 试用前馈控制消除系统输出由常数输出干扰信号产生的影响。

解答。

(1) 本例中，被控对象直流电机增益的逆 $G^{-1}(0)=1$。根据式(4.58)给出的 $G(s)$ 和 $D_c(s)=k_P$。闭环系统的实现如图 4.21a 所示。闭环传递函数为

$$Y(s)=G(s)[k_P E(s)+R(s)]$$
$$E(s)=R(s)-Y(s)$$
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{(1+k_P)G(s)}{1+k_P G(s)}$$

注意到闭环直流电动机的增益为 $1(\mathcal{T}(0)=1)$。图 4.22 表明前馈控制的作用是对不同 k_P 取值消除由阶跃参考输入引起的稳态跟踪误差，增加前馈控制，得到零稳态跟踪误差。

(2) 相似地，我们用式(4.58)给出的 $G(s)$ 和 $D_c(s)=k_P$ 构成闭环系统，如图 4.21b 所示。闭环系统的传递函数为

$$Y(s)=W(s)+G(s)[k_P E(s)-W(s)]$$
$$E(s)=R(s)-Y(s),R(s)=0$$
$$\frac{Y(s)}{W(s)}=\mathcal{T}_w(s)=\frac{1-G(s)}{1+k_P G(s)}$$

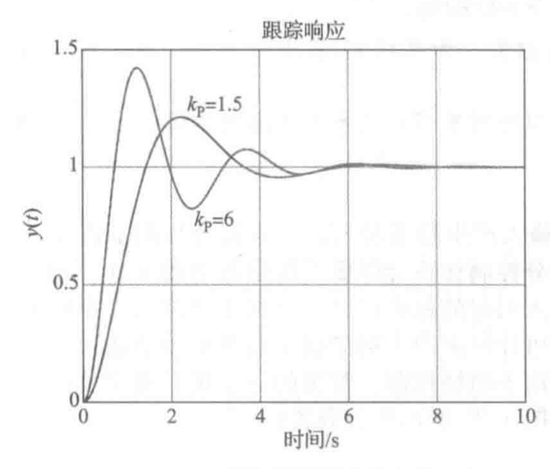


图 4.22 附加前馈的跟踪性能

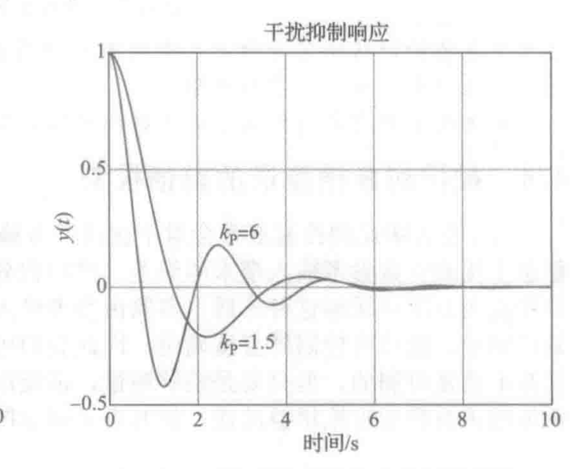


图 4.23 附加前馈的常数干扰抑制性能

注意闭环直流增益为零($\mathcal{T}_w(s)=0$)。图 4.23 说明了前馈控制在两个不同 k_P 值消除由恒定输出干扰引起的稳态误差方面的效果。我们观察到通过使用直流增益的逆，前馈只能控制参考输入和干扰输入的稳态影响。在整个频域范围内，通过对 $G(s)$ 取逆，可使用更复杂的前馈控制。◀

△4.5 数字控制介绍

213~214

目前为止，我们研究的系统和控制器都是用微分方程来描述的连续时间系统。这意味着控制器可用如 2.2 节所述的模拟电路实现。事实上，如今大部分控制系统都用数字计算机来实现。它们不能精确实现连续控制器，而是通过所谓差分方程的代数方程来近似连续控制的。网站 www.fpe7e.com 的附录 W4.5 简述了如何把连续的 $D_c(s)$ 转换成差分方程，并能直接编码输入到计算机。更加详细结果请参阅本书第 8 章或由 Franklin(富兰克林)、Powell(鲍威尔)和 Workman(沃尔克曼)编写的《动态系统的数字控制》(1998 年第 3 版)。

△4.6 时域响应对参数变化的灵敏度

由于许多控制指标与阶跃响应有关，那么就有必要探究时域响应对参数变化的灵敏度。详细请参见 www.fpe7e.com 附录 W4.6。

4.7 历史展望

控制领域有两个分支：理论和实践。控制理论基本上应用数学知识解决控制问题，而这里的控制实践是在设备装置中实际且有效地应用反馈控制实现的。纵观历史，实际应用首先产生于控制的反复实验。尽管应用数学往往是已知的，但是理论描述控制如何工作并提出改进方案通常是应用之后的事。例如，瓦特公司在 1788 年开始把飞球调速器用于蒸汽机的制造中，但直到 1840 年 G. B. 艾里(G. B. Airy)才描述了类似设备的不稳定性，J. C. 麦克斯韦(1868 年)在《论调速器》一书中系统地描述了这一问题。后来直到 1877 年，几乎是在蒸汽机控制被介绍的 100 年之后，E. J. 劳斯才给出了稳定性的条件。这种情况即为“理论与实践之间的鸿沟”，直到今天它仍是激发理论与实践的创造力的源头。

从生产啤酒到制造天然气，调节都是过程工业的中心。在这些过程工业中，有许多变量需要保持常值。典型的例子有温度、压力、容积、流量、成分和化学特性如 pH 值等。然而一个变量在被反馈调节之前必须被测量，即在有控制之前先有传感器。1851 年，乔治·泰勒(George Taylor)和大卫·肯德尔(David Kendall)创立公司为天气预报制造温度计和气压计，即为现在的纽约州罗切斯特的 Taylor 仪器公司。1855 年，他们为一些行业制造温度计，包括以前用人工控制的酿造行业。其他早期进入仪器领域的公司有 1889 年威廉·布里斯托(William Bristol)在康涅狄格州诺格塔克创立的布里斯托尔公司和 1908 年威廉(William)的父亲和他两个兄弟在马塞诸塞州福克斯波罗创立的福克斯波罗公司。例如底特律爱迪生(Edison)公司的亨利·福特(Henry Ford)用布里斯托尔公司的某一仪器来测量(和预估控制)蒸汽压力。布里斯托尔公司率先在遥感勘测方面把仪器放置在远离过程控制的地方，使系统管理者能够实时监控几个变量。随着仪器变得越来越复杂，出现了电驱动阀门，他们通常使用第 1 章的家庭炉灶的简单开关进行反馈控制。一些仪器公司协商变量标准使被控对象能够综合应用不同公司的仪器和控制器。1920 年，福克斯波罗公司发明了具有重置或积分作用的气动控制器。最终这些公司都引进了全 PID 控制的仪器和控制器。1942 年泰勒仪器公司的齐格勒和尼科尔斯提出了基于实验数据的整定 PID 控制器参数方法，有力地促进了控制的应用和发展。

215

跟踪问题的典型应用是陆地和海上的高射炮。使用雷达跟踪目标，并用控制器预测飞机的路径，高射炮能提前瞄准，使发射的炮弹恰好击中到达的目标。第二次世界大战期间麻省理工学院建立的辐射实验室研究这类雷达，其中一种产品为 SCR-584。有趣的是这一科研项目的主要贡献者之一正是早期从事 PID 控制器整定的尼科尔斯。当辐射实验室的实验记录发表的时候，尼科尔斯被选为控制部分第 25 卷的编辑之一。

1921 年，H. S. 布莱克(H. S. Black)加入贝尔实验室从事电子放大器的设计，该放大器将用于电话公司长途线路中的增音器。他面临的主要问题是真空管部件的增益在一段时间内会发生漂移，需要在音频范围内设计维持一个极其精确的增益来消除这种漂移。在随后的几年里，他尝试了许多方法包括防止电子管失真的前馈技术。而这一实验结果，因为过于灵敏而不能达到实用要求。最终，1927 年 8 月[⊖]，在史坦顿岛到曼哈顿的渡船上，他意识到负反馈或许有用，并在身边唯一一页纽约时报页面上写下了方程。1928 年，他申请了专利，但直到 1937 年 12 月才发布这一方法。[⊜] H. W. 伯德提出了灵敏度理论和许多其他反馈理论。

216

⊖ 当时布莱克 29 岁。

⊜ 据说布莱克的许多贝尔实验室的同事不相信当反馈信号是输入信号的 100 倍时仍然能保持系统稳定。正如第 6 章将会讨论的，H. Nyquist 也在实验室解决了这种难题。

小结

- 度量控制系统性能的最重要的指标是对所有输入信号的系统误差。
- 与开环控制相比，反馈控制可以镇定一个不稳定的系统，减小被控对象的干扰误差，改进参考输入信号的跟踪性能，降低系统传递函数对参数变化的灵敏度。
- 传感器噪声会导致在减小干扰对被控对象引起的误差与降低传感器噪声带来误差之间的冲突。
- 一个系统称为 k 型系统是指当多项式输入信号的阶次小于 k 时系统的稳态误差为零。一个稳定的单位反馈系统对于参考输入是 k 型的，如果开环增益 $G(s)D_c(s)$ 在原点处有 k 个极点，开环增益可以写为

$$G(s)D_c(s)=\frac{A(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{s^k(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

并且误差常数为

$$K_k=\lim_{s\to 0}s^kG(s)D_c(s)=\frac{Az_1z_2\cdots}{p_1p_2\cdots}\quad(4.93)$$

- 表 4.1 为由参考输入信号决定的 0 型、1 型、2 型的单位反馈系统稳态误差表。

217

- 通过计算多项式干扰输入信号的系统误差可对系统划分类型，以反映系统的干扰抑制水平。如果所有阶次小于 k 的多项式干扰信号的系统误差为零，阶次等于 k 的误差不为零，则系统称为 k 型系统。
- 提高比例反馈增益可以降低稳态误差，但高增益会使系统不稳定。积分控制具有消除稳态误差的鲁棒性，但会降低系统稳定性。微分控制可以提高阻尼增加系统的稳定性。这三种控制结合形成了经典的三项 PID 控制器。
- 标准 PID 控制器可以用以下方程描述：

$$U(s)=\left(k_P+\frac{k_I}{s}+k_Ds\right)E(s)\text{ 或}$$

$$U(s)=k_P\left(1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right)E(s)=D_c(s)E(s)$$

后一种形式被广泛用于过程控制工业中，在许多控制系统中也用来描述基本控制器。
- 表 4.2 和表 4.3 给出了整定 PID 控制器的有用指导原则。
- 能够用 Matlab 命令 c2d 来计算离散化等效。

复习题

4.1 给出反馈控制的三个优点。

4.2 给出反馈控制的两个缺点。

4.3 已知温度控制系统在常值跟踪输入信号作用下输出误差为零；当跟踪输入信号以 40℃/s 的上升速率随时间线性变化时，系统的输出稳态误差为 0.5℃。试计算该控制系统的类型和误差常数（K_P 或 K_v 或 K_a）。

4.4 K_P，K_v 和 K_a 的单位是什么？

4.5 如何用参考输入来定义系统的类型。

4.6 如何用干扰输入来定义系统的类型。

4.7 为什么系统类型取决于外部信号作用于系统的位置？

4.8 引入积分控制的主要目的是什么？

4.9 加入微分控制的主要目的是什么？

4.10 为什么设计者通常将微分项放在反馈回路中而不放在误差通道中？

4.11 PID 控制器整定准则的优点是什么？

4.12 给出使用数字控制器而不使用模拟控制器的两个理由。

4.13 给出使用数字控制器的两个弊端。

4.14 若用高为 $e(kT_s)$ 和底为 T_s 的矩形面积公式近似代替附录 W4.5 中式(8)的积分，请给出离散算子 z 和拉普拉斯变换算子 s 的关系式。

习题

4.1 节习题

4.1 若 $\mathcal{S}$ 是单位反馈系统对被控对象传递函数变化的灵敏度，$\mathcal{T}$ 是从参考输入到输出的传递函数，证明 $\mathcal{S}+\mathcal{T}=1$。

4.2 定义传递函数 G 对其中一个参数 k 的灵敏度为 G 的变化率与 k 的变化率之比。

$$\mathcal{S}_k^G=\frac{\mathrm{d}G/G}{\mathrm{d}k/k}=\frac{\mathrm{dln}G}{\mathrm{dln}k}=\frac{k}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}k}$$

本题的目的是检验反馈对灵敏度的影响。尤其是我们要比较图 4.24 所示的三种结构。图为三个增益为 $-K$ 的放大器与一个增益为 -10 的放大器相连接。

(a) 对于图 4.24 所示的每种拓扑结构，若 $K=10$，$Y=-10R$，计算 β_i。

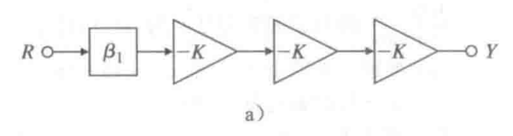
(b) 对于每种拓扑结构，当 $G=\dfrac{Y}{R}$ 时计算 S_K^G（β_i 值分别取(a)问中计算得到的值）。哪一种情况时灵敏度最小？

(c) 计算图 4.24b、c 所示系统对 β_2 和 β_3 的灵敏度。根据计算的结论评价如何提高传感器和执行器的精度。

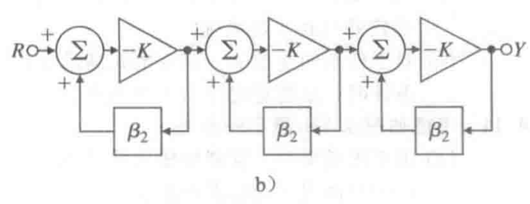
4.3 对比图 4.25 所示的两种结构，用下面关系式来衡量整个系统的增益对放大器增益变化的灵敏度。

$$S = \frac{\mathrm{d}\ln F}{\mathrm{d}\ln K} = \frac{K}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}K}$$

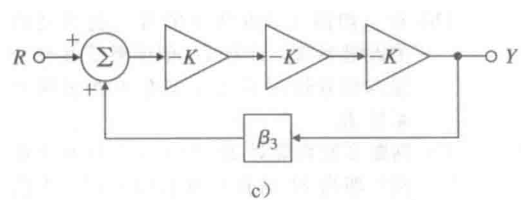
选择 H_1 和 H_2 使标称系统输出满足 $F_1 = F_2$，并假设 $KH_1 > 0$。



a)



b)



c)

图 4.24　习题 4.2 中三种放大器拓扑

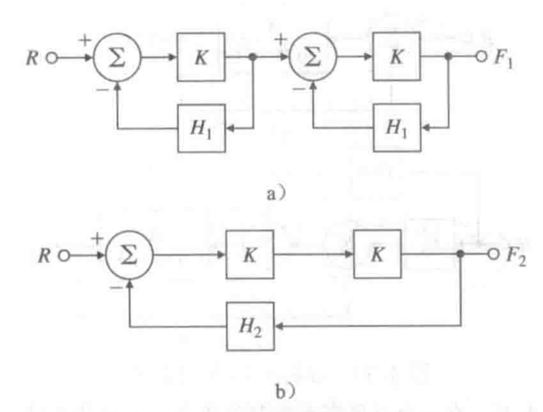


图 4.25　习题 4.3 框图

4.4　单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{A}{s(s+a)}$$

(a) 计算闭环传递函数对参数 A 变化的灵敏度。

(b) 计算闭环传递函数对参数 a 变化的灵敏度。

(c) 若反馈单位增益变为 $\beta \neq 1$，计算闭环系统传递函数对 β 的灵敏度。

4.5　计算图 4.5 所示的反馈系统的系统误差方程。

4.2 节习题

4.6　考虑如图 4.26a 所示的具有速度(转速计)反馈的直流电动机控制系统。

(a) 找出使图 4.26b 和图 4.26a 所示系统有相同传递函数的 K' 和 k'_t 的值。

(b) 确定跟踪输入为 θ_r 时的系统类型，并计算用参数 K' 和 k'_t 表示的系统误差常数 K_v。

(c) 转速计反馈引入正数 k_t 会使 K_v 增大还是减小？

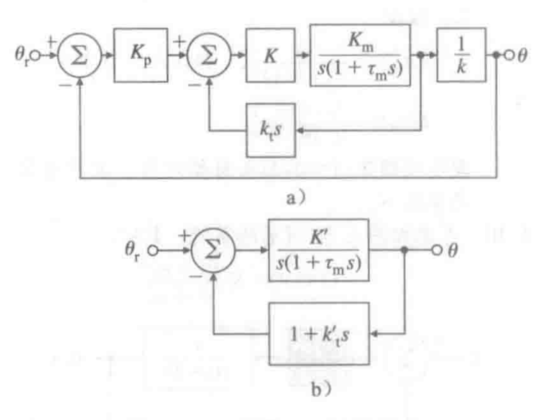


图 4.26　习题 4.6 控制系统

4.7　图 4.27 所示的控制系统框图。

(a) 若 r 是阶跃函数并且系统闭环稳定，那么稳态跟踪误差是什么？

(b) 求系统类型。

(c) 若 $K_2 = 2$，并且调整 K_1 使系统在阶跃输入信号作用下系统超调量为 17%，求系统在斜率为 5.0 的斜坡输入作用下的稳态误差。

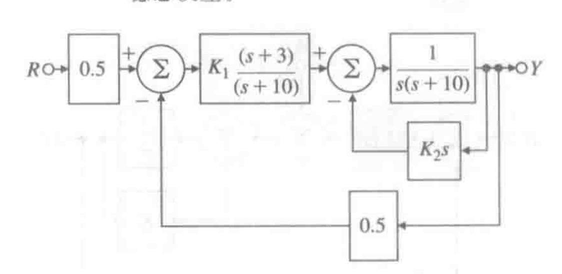


图 4.27　习题 4.7 闭环系统

4.8　一个标准反馈控制系统框图如图 4.5 所示，其中，

$$G(s) = \frac{1}{s}; \quad D_c(s) = \frac{2(s+1)}{s};$$

$$H(s) = \frac{100}{(s+100)}$$

(a) 令 $W = 0$，计算从 R 到 Y 的传递函数。

(b) 令 $R = 0$，计算从 W 到 Y 的传递函数。

(c) 若 R 为单位阶跃输入信号并且 $W \equiv 0$，求跟踪误差。

(d) 若 R 为单位斜坡输入信号并且 $W \equiv 0$，求跟踪误差。

(e) 试求系统类型和相应的误差系数。

4.9 一类反馈通道为非单位传递函数负反馈系统，如图 4.5 所示。

(a) 试求斜坡参考输入信号作用时系统的稳态跟踪误差。

(b) 若 $G(s)$ 在 s 平面内原点处只有一个极点，试求使系统为 1 型系统的 $H(s)$。

(c) 假设

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)^2};\quad D_{cl}(s)=0.73;$$

$$H(s)=\frac{2.75s+1}{0.36s+1}$$

表示反馈通道中的超前补偿环节。求速度误差系数 K_v。

4.10 考虑如图 4.28 所示的系统，其中，

$$D_c(s)=K\frac{(s+\alpha)^2}{s^2+\omega_o^2}$$

图 4.28 习题 4.10 控制系统

(a) 证明：若系统稳定，则系统可跟踪正弦参考输入信号 $r=\sin(\omega_o t)$ 并得到零稳态误差(提示：观察从 R 到 E 的传递函数并考虑在 ω_o 处的增益)。

(b) 若 $\omega_o=1$，$\alpha=0.25$，利用劳斯判据确定使闭环系统稳定的 K 的取值范围。

4.11 考虑如图 4.29 所示的无阻尼摆角控制系统。

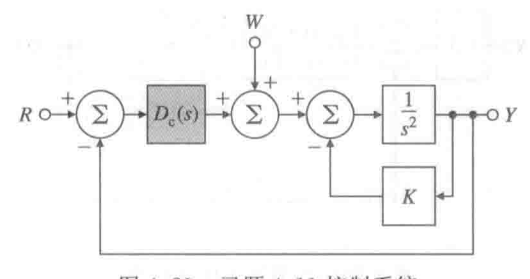


图 4.29 习题 4.11 控制系统

(a) 求 $D_c(s)$ 必须满足什么条件时，系统在斜坡参考输入信号作用下具有常值稳态误差。

(b) 对于能稳定系统且满足(a)问条件的传递函数 $D_c(s)$，试求一类系统可抑制的干扰信号 $\omega(t)$，能使得稳态误差为 0。

4.12 一个单位反馈系统的总传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

试求出多项式参考输入定义的系统类型与误差常数(用 ζ 与 ω_n 来表示)。

4.13 考虑二阶系统

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2\zeta s+1}$$

在单位反馈结构中加入一个形如 $D_c(s)=\frac{K(s+a)}{(s+b)}$ 的传递函数并把它与 $G(s)$ 串联。

(a) 忽略当前稳定性，当 K，a 和 b 满足什么条件时系统是 1 型的？

(b) 求当 K，a 和 b 满足什么条件时，系统稳定并且是 1 型系统？

(c) 对于任意的正数 K，求 a 和 b 满足什么条件时，系统稳定并为 1 型系统？

4.14 考虑如图 4.30a 所示的系统。

(a) 求系统类型并计算斜坡输入信号 $r(t)=r_o t1(t)$ 作用下的稳态跟踪误差。

(b) 对于如图 4.30b 所示的带有前馈通道的改进系统，计算 H_f 值使系统在参考输入信号作用下为 2 型系统并求误差系数 K_a。

(c) 判断 2 型系统对 H_f 变化是否具有鲁棒性？即当 H_f 有微小变化时系统是否仍是 2 型系统。

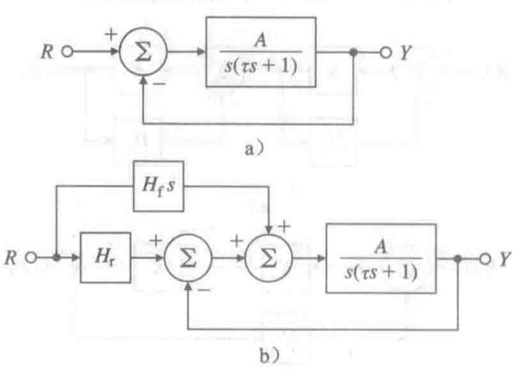


图 4.30 习题 4.14 控制系统

4.15 在一个卫星姿态控制的单位反馈结构系统中，被控对象的传递函数为 $G=1/s^2$。控制器的传递函数为 $D_c(s)=\frac{10(s+2)}{s+5}$。

(a) 试求出该系统由参考输入跟踪信号所定义的系统类型以及相应的误差常数。

(b) 若有干扰转矩信号作用于该系统，使过程输入为 $u+w$，试求该系统由干扰抑制所定义的系统类型及相应的误差常数。

4.16 一个补偿电动机位置控制系统如图 4.31 所示。令传感器的传递函数为 $H(s)=1$。

(a) 系统可否以零稳态误差跟踪一个阶跃参考输入 r？若可以，给出这一速度常数。

(b) 系统可否以零稳态误差抑制一个阶跃

干扰 w？若可以，试求这一速度常数。

(c) 试计算闭环传递函数对被控对象在 -2 处的极点变化时的灵敏度。

(d) 在有些情况下，传感器是有动态的，对 $H(s)=\frac{20}{s+20}$，重复(a)～(c)问部分，并比较相应的速度常数。

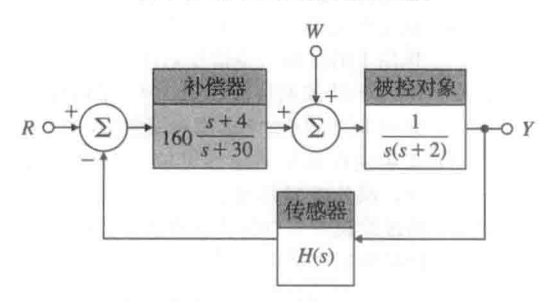


图 4.31　习题 4.16 控制系统

4.17　如图 4.32 所示单位反馈控制系统，具有干扰输入 w_1，w_2 和 w_3，且系统是渐近稳定的。其中，

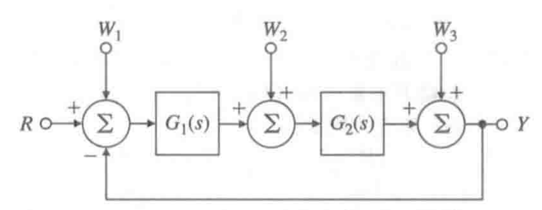


图 4.32　带干扰输入的单输入单输出单位反馈系统

$$G_1(s)=\frac{K_1\prod_{i=1}^{m_1}(s+z_{1i})}{s^{l_1}\prod_{i=1}^{m_1}(s+p_{1i})},$$

$$G_2(s)=\frac{K_2\prod_{i=1}^{m_1}(s+z_{2i})}{s^{l_2}\prod_{i=1}^{m_1}(s+p_{2i})}$$

证明系统由 w_1，w_2 和 w_3 所定义的系统类型分别为 0 型的、l_1 型的和(l_1+l_2)型的。

4.18　具有积分控制的汽车速度控制系统的一种表达如图 4.33 所示。

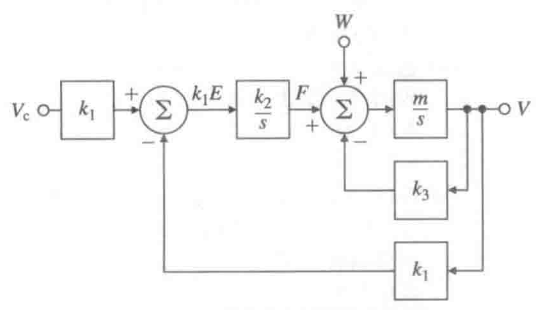


图 4.33　带有积分控制的系统

(a) 对于零参考输入 $v_c=0$，找出速度输出 v 到干扰 w 的传递函数。

(b) 若 w 为单位斜坡函数，求 v 的稳态响应。

(c) 试确定系统由参考输入所决定的系统类型，并求出对应的误差常数。

(d) 试确定系统由干扰输入 w 所决定的系统类型及相应的误差系数。

4.19　如图 4.34 所示反馈系统，试求 α 值使系统在 $K=5$ 时为 1 型系统。给出相应的速度常数。证明在该 α 值时，系统不具有鲁棒性，并计算在单位阶跃信号作用下，$K=4$ 和 $K=6$ 时系统的稳态误差 $e=r-y$。

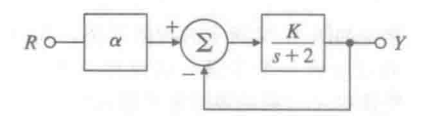


图 4.34　习题 4.19 控制系统

4.20　假设给定系统如图 4.35a 所示，其中被控对象参数 a 是变量。

(a) 求出 $G(s)$使图 4.35b 和图 4.35a 所示的系统从 r 到 y 具有相同的的传递函数。

(b) 假设 $a=1$ 是被控对象参数的标称值。试求此时系统类型和误差常数。

(c) 假设 $a=1+\delta a$，其中 δa 是被控对象的某一摄动。试求摄动系统的类型和误差常数。

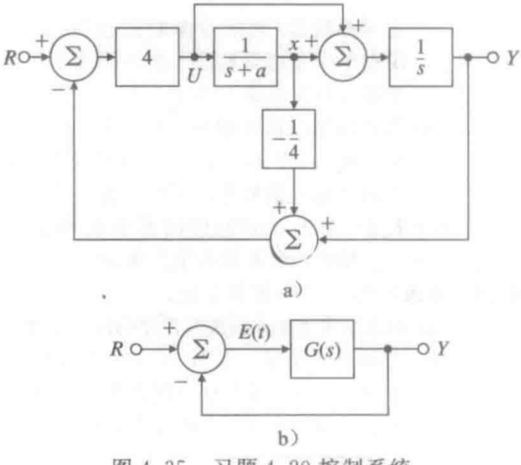


图 4.35　习题 4.20 控制系统

4.21　如图 4.36 所示的两个反馈系统。

(a) 试确定 K_1、K_2、K_3 的值，使得

(i) 在阶跃输入信号作用下，两个系统都具有零稳态误差(即都是 1 型系统)。

(ii) 当 $K_0=1$ 时，它们的静态速度误差常数 $K_v=1$。

(b) 假设 K_0 有一个小的摄动：$K_0\rightarrow K_0+\delta K_0$。这对每种情况下的系统有什么影

响？哪一种系统类型是鲁棒的？你认为哪个系统更好？

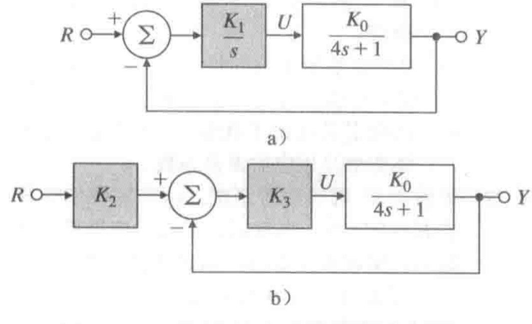


图 4.36 习题 4.21 的两个反馈控制系统

4.22 给定如图 4.37 所示的控制系统，其中反馈增益 β 是一个变量。试设计一个控制器，使输出 $y(t)$ 精确跟踪参考输入信号 $r(t)$。

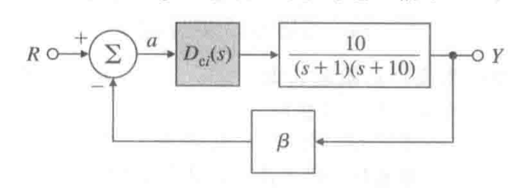


图 4.37 习题 4.22 控制系统

(a) 令 $\beta=1$，控制器 $D_{ci}(s)$ 可选如下形式：

$$D_{c1}(s)=k_{P},\quad D_{c2}(s)=\frac{k_{P}s+k_{I}}{s},$$

$$D_{c3}(s)=\frac{k_{P}s^{2}+k_{I}s+k_{2}}{s^{2}}$$

选择控制器(包括对参数的选择)使系统在单位参考斜坡输入信号作用下为 1 型系统且稳态误差小于 0.1。

(b) 假设模型反馈环增益 β 衰减为 0.9，试根据在(a)中 $D_{ci}(s)$ 所选择的控制器，求斜坡输入信号作用下的稳态误差。

(c) 若 $\beta=0.9$，(b)问中的系统类型是什么？相应的误差常数值是多少？

4.23 考虑如图 4.38 所示的系统。

(a) 试求从参考输入到跟踪误差的传递函数。

(b) 若该系统在输入信号 $r(t)=t^{n}1(t)$（其中 $n<q$）的作用下稳态误差为零。试说明 p_1，p_2，…，p_q 须满足什么条件？

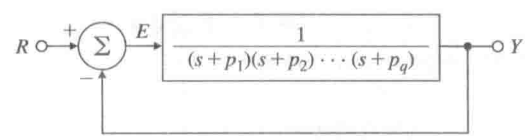


图 4.38 习题 4.23 控制系统

4.24 考虑图 4.39 所示的系统。

(a) 试求从 $R(s)$ 到 $E(s)$ 的传递函数，并分别求出系统在单位阶跃参考输入信号和单位斜坡参考输入信号作用下的稳态误差(e_{ss})。

(b) 确定系统闭环极点的位置。

(c) 求使闭环系统的阻尼系数为 $\zeta=0.707$ 且 $\omega_n=1$ 时系统参数(k，k_P，k_I)的值。求系统在单位阶跃参考输入信号作用下的百分比超调量。

(d) 试求系统在单位斜坡参考输入信号 $r(t)$ 作用下的跟踪误差信号 $e(t)$。

(e) 试选择 PI 控制器参数(k_P，k_I)来确保得到(d)问中较小的暂态跟踪误差 $|e(t)|$。

(f) 若系统在单位斜坡参考输入信号作用下，积分控制器增益 k_I 足够大，试分析跟踪误差 $e(t)$ 的暂态特性。此时，单位斜坡响应是否有超调？

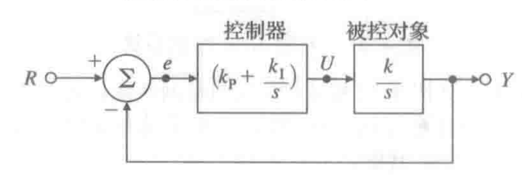


图 4.39 习题 4.24 控制系统框图

4.25 一个直流电动机的线性常微分方程模型，忽略其电枢电感(即 $L_a=0$)，且含干扰转矩 w，如下式所示：

$$\frac{JR_a}{K_t}\ddot{\theta}_m+K_e\dot{\theta}_m=v_a+\frac{R_a}{K_t}w$$

其中，θ_m 以弧度来度量。方程两边同时除以 $\ddot{\theta}_m$ 的系数得

$$\ddot{\theta}_m+a_1\dot{\theta}_m=b_0v_a+c_0w$$

其中：

$$a_1=\frac{K_tK_e}{JR_a},\quad b_0=\frac{K_t}{JR_a},\quad c_0=\frac{1}{J}$$

用旋转电位器可以测量 θ 与参考角度 θ_r 之间的位置误差，即 $e=\theta_{ref}-\theta_m$。用转速计可以测量电动机的转速 $\dot{\theta}_m$。将位置误差 e 和电动机转速 $\dot{\theta}_m$ 作为反馈写成如下形式：

$$v_a=K(e-T_D\dot{\theta}_m)$$

其中：K 和 T_D 为待求控制器增益。

(a) 画出反馈系统的框图，其中 θ_m 和 $\dot{\theta}_m$ 为描述电动机的变量。

(b) 假设 $a_1=65$，$b_0=200$，$c_0=10$。如果没有负载转矩(即 $w=0$)，则当 $v_a=100\text{V}$ 时，求电动机的转速(单位 r/min)？

(c) 根据(b)问中的参数值，令控制为 $D=k_P+k_Ds$，求 k_P 和 k_D 的值，使系统在无负载转矩条件下满足：当输入为阶跃信号时，系统超调量近似为 17%，并且在阈值为 5% 条件下，稳态时间小

于或等于0.05s。

(d) 根据(c)问中的计算结果，推导出系统在参考角度输入信号作用下的稳态误差表达式，并计算出$\theta_{ref}=1\text{rad}$时的稳态误差值。

(e) 根据(c)问中的计算结果，当$\theta_{ref}=0$时，推导系统在恒定干扰转矩作用下的稳态误差表达式，并计算$w=1.0$时的稳态误差值。

4.26 设计一个汽车速度自动控制系统。假设：(1)汽车质量为1000kg，(2)油门是控制量U，当其角度变化1度时，便在汽车上施加10N的力，(3)空气的摩擦阻力正比于速度，其比例系数为10N·s/m。

(a) 试求从控制输入U到汽车速度的传递函数。

(b) 假设速度变化由下式给出，

$$V(s)=\frac{1}{s+0.02}U(s)+\frac{0.05}{s+0.02}W(s)$$

其中：V的单位是m/s，U的单位是(°)，W为公路等级。设计一个比例控制器$U=-k_P V$使速度误差小于1m/s，此时的公路等级为常数2%。

(c) 试讨论对系统进行积分控制有哪些优点(如果有的话)？

(d) 假设纯积分控制(即没有比例项)是有利的，请选择反馈增益使系统处于临界阻尼状态($\zeta=1$)。

4.27 考虑如图4.40所描述的汽车速度控制系统。

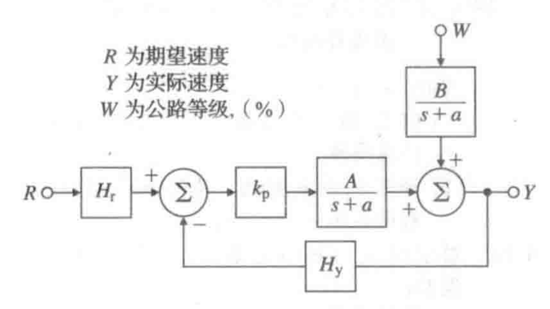


图4.40 汽车速度控制系统

(a) 试求从$W(s)$到$Y(s)$和从$R(s)$到$Y(s)$的传递函数。

(b) 假设期望的速度是恒定参考输入信号r，即$R(s)=\frac{r_o}{s}$。假设路面平整，因此$w(t)=0$。计算增益k_P，H_r，H_y满足下式：

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=r_o$$

讨论时包括开环(假设$H_y=0$)和反馈($H_y\neq0$)两种情况。

(c) 假设除参考输入外还有常值干扰$W(s)=\frac{w_o}{s}$，重新计算(b)问。特别地，前馈和反馈两种情况下，找出由于公路等级变化而产生的速度变化。并根据得出的结果解释：(1)为什么使用反馈控制是必要的？(2)如何选择增益k_P以降低稳态误差。

(d) 假设$w(t)=0$，增益A受到摄动为$A+\delta A$。试求在前馈、反馈两种情况下由增益变化引起的速度误差。此时如何选择增益来减小δA的影响。

4.28 考虑如图4.41所示的多变量系统。假设系统稳定。分别求每一个干扰输入到相应干扰输出的传递函数，并确定常值干扰输入下的y_1和y_2的稳态值。如果多项式输入信号w_i最高阶次小于k时，所有输出的稳态值为零，并且输入信号w_i的最高阶次小于k时系统至少有一个输出为非零常数，此时称多变量系统为k型系统。对于ω_1和ω_2的干扰抑制，系统类型是什么？

4.3 节习题

4.29 磁带驱动的速度控制系统的传递函数如图4.42所示。速度传感器足够快，其动态可以忽略不计，框图给出了等效的单位反馈系统。

(a) 假设参考输入为零，试求1N·m的阶跃干扰转矩的稳态误差。若要使稳态误差$e_{ss}\leqslant0.01\text{rad/s}$，试求放大器增益$K$。

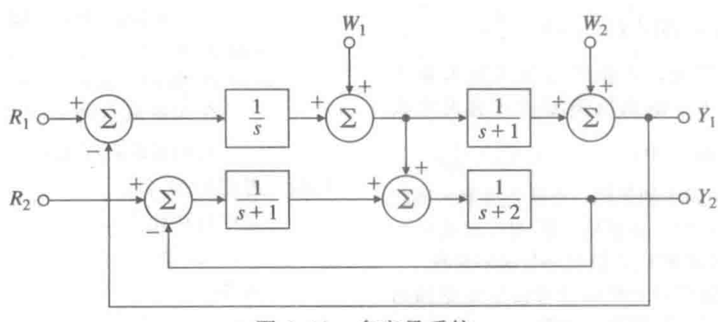


图4.41 多变量系统

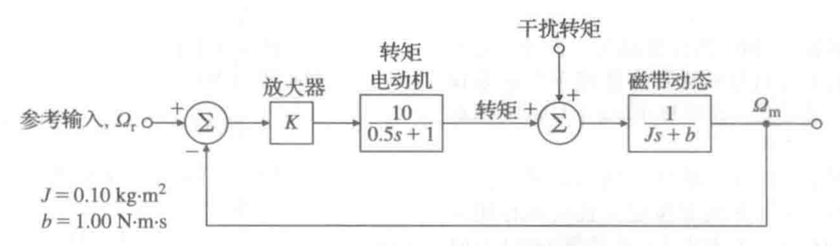


图 4.42　磁带驱动速度控制系统

(b) 取(a)中计算出的增益 K，画出复平面上的闭环系统的根，并准确描绘出阶跃参考输入信号作用下的输出时间响应。

(c) 在复平面上，画出满足以下条件的闭环极点区域：阈值在 1%条件下，调节时间 $t_s \leqslant 0.1$s，超调量 $M_p \leqslant 5\%$。

(d) 试求满足指标的 PD 控制器的 k_P 和 k_D 值。

(e) 运用(*d*)中的新控制方法，引入扰动后，系统稳态误差怎样变化？如何才能消除由干扰转矩引起的稳态误差？

4.30　考虑如图 4.43 所示带有 PI 控制的系统。

(a) 试求从 R 到 Y 的传递函数。

(b) 试求从 W 到 Y 的传递函数。

(c) 试求由参考跟踪决定的系统类型，并计算误差系数。

(d) 试分析由干扰抑制决定的系统类型，并计算误差系数。

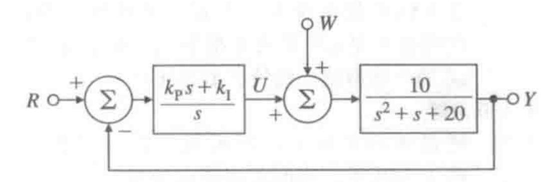


图 4.43　习题 4.30 控制系统

4.31　考虑二阶被控对象，其传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(5s+1)}$$

且具有单位反馈结构。

(a) 试确定带有 P$[D_c=k_P]$，PD$[D_c(s)=k_P+k_D s]$，PID$\left[D_c(s)=k_P+\frac{k_I}{s}+k_D s\right]$控制器的系统，在跟踪多项式参考输入信号作用下的系统类型并计算误差系数，令 $k_P=19$，$k_I=0.5$，$k_D=\frac{4}{19}$。

(b) 根据(a) 问中的条件，当系统抑制多项式干扰输入时，分别用三种调节器进行控制。试求此时的系统类型与误差系数。

(c) 该系统能更好地跟踪参考信号还是抑制干扰信号？简要进行解释。

(d) 用 Matlab 画出系统跟踪和干扰抑制单位阶跃与单位斜坡信号时的响应曲线，证明(a)和(b)问的结果。

4.32　直流电动机速度控制系统如图 4.44 所示，通过如下微分方程描述

$$\dot{y}+60y=600v_a-1500w$$

其中：y 是电动机速度；v_a 是电枢电压；w 是负载转矩。假设电枢电压可以用 PI 控制律来计算

$$v_a=-\left(k_P e+k_I\int_0^t e\mathrm{d}t\right)$$

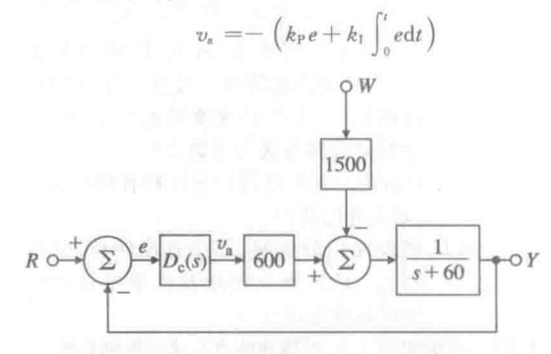


图 4.44　习题 4.32 和 4.33 中直流电动机速度控制框图

其中：$e=r-y$

(a) 以 k_P 和 k_I 为系数，计算从 W 到 Y 的传递函数。

(b) 计算 k_P 和 k_I 的值，使闭环系统特征方程的根为 -60 ± 60j。

4.33　对于图 4.44 所示的系统，计算如下稳态误差：

(a) 对于单位阶跃参考输入；

(b) 对于单位斜坡参考输入；

(c) 对于单位阶跃干扰输入；

(d) 对于单位斜坡干扰输入；

(e) 用 Matlab 验证(a)到(d)问的答案。注意在阶跃参考输入后加上积分器后得到的系统斜坡响应。

4.34　考虑如图 4.45 所示的卫星姿态控制问题，其中标称化参数为

飞行惯量 J 为 10，N·m·s²/rad；θ_r 为参考卫星姿态，rad；θ 为实际卫星姿态，rad；传感器刻度因子 H_y 为 1，V/rad；参

考传感器刻度因子 H_r 为 1，V/rad；w 为干扰转矩，N·m。

(a) 当 $D_c(s)=k_P$，即为比例控制 P 时，计算使系统稳定时 k_P 的范围。

(b) 当 $D_c(s)=(k_P+k_D s)$，即为 PD 控制器时，计算由参考输入决定的系统类型和误差系数。

(c) 当 $D_c(s)=(k_P+k_D s)$，即为 PD 控制器时，计算由干扰输入决定的系统类型和误差系数。

(d) 当 $D_c(s)=\left(k_P+\frac{k_I}{s}\right)$，即为 PI 控制器时，计算由参考输入决定的系统类型和误差系数。

(e) 当 $D_c(s)=\left(k_P+\frac{k_I}{s}\right)$，即为 PI 控制器时，计算由干扰输入决定的系统类型和误差系数。

(f) 当 $D_c(s)=\left(k_P+\frac{k_I}{s}+k_D s\right)$，即为 PID 控制器时，计算由参考输入决定的系统类型和误差系数。

(g) 当 $D_c(s)=\left(k_P+\frac{k_I}{s}+k_D s\right)$，即为 PID 控制器时，计算由干扰输入决定的系统类型和误差系数。

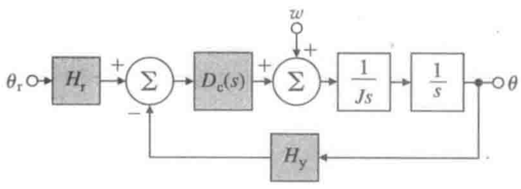


图 4.45 卫星姿态控制

4.35 轮船自动驾驶仪在汹涌的海中十分有用，它可保持轮船沿准确路线航行。如图 4.46 所示的为大型油轮的控制系统，该系统包含了从弧度方向舵偏转角到航向变化的被控对象传递函数。

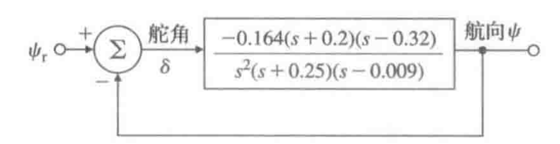


图 4.46 习题 4.35 中轮船方向控制系统

(a) 写出从航向角到舵角的无反馈微分方程。

(b) 控制系统使用带有单位增益的简单比例反馈控制。判断如图 4.46 所示闭环系统的稳定性(提示：使用劳斯判据)。

(c) 当把单位比例增益变成一个较小的值时，镇定系统可能吗？

(d) 用 Matlab 设计形如 $D_c(s)=K\left(\frac{s+a}{s+b}\right)^2$ 的动态控制器，使得闭环系统稳定。并且使系统的阶跃航向命令响应有零稳态误差和小于 10% 的超调量。对于大型油轮这些取值合理吗？

4.36 造纸机的单位阶跃响应如图 4.47(a)所示，其系统输入为叠加到传感器上的纸的厚度，输出为已知压完的纸的厚度。从图中可以得到时延和暂态响应斜率。

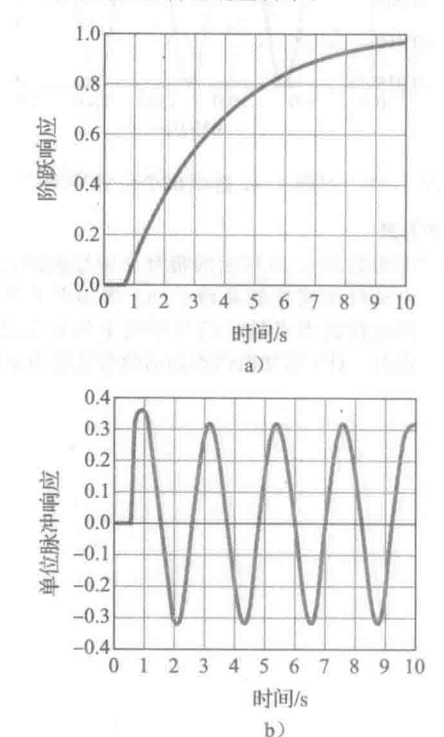


图 4.47 习题 4.36 中的造纸机响应数据

(a) 用齐格勒-尼科尔斯暂态响应法分别计算 P、PI、PID 控制器参数。

(b) 使用比例控制，当系统的增益 $K_u=8.556$ 时，该闭环系统在单位脉冲作用下处于临界稳定，如图 4.47b。试根据齐格勒-尼科尔斯极限灵敏度法计算 P、PI、PID 控制器的参数。

4.37 造纸机传递函数为

$$G(s)=\frac{e^{-2s}}{3s+1}$$

输入是施加到传感器上的纸的厚度，输出为压完的纸的厚度。

(a) 使用齐格勒-尼科尔斯整定准则确定 PID 控制器的参数。

(b) 对图 4.48 中单位脉冲响应，比例增益

为 $K_u=3.044$ 时，系统处于临界稳定。根据齐格勒-尼科尔斯校正准则确定最优 PID 控制器参数。

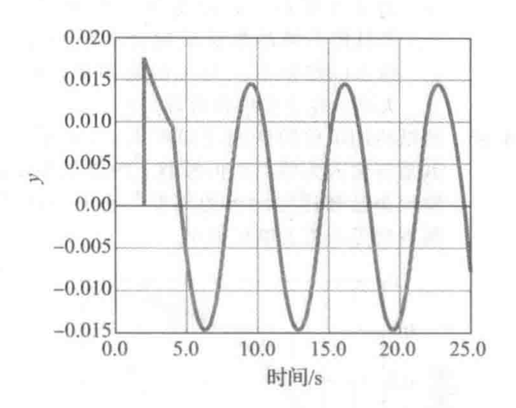


图 4.48　习题 4.37 造纸机单位脉冲响应

218～233

△ 4.4 节习题

4.38　考虑如图 4.49 所示的带有比例控制的直流电动机速度控制系统。(a) 增加前馈控制消除阶跃参考输入信号作用下的稳态跟踪误差。(b) 增加前馈控制消除常值输出干扰信号 w 对系统输出的影响。

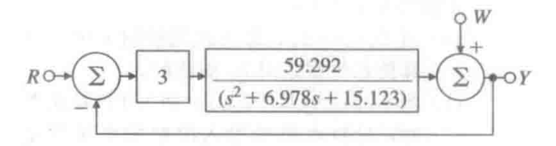


图 4.49　习题 4.38 中的框图

△ 4.5 节习题

4.39　使用附录 W4.5 中的式(14)梯形公式计算下面可能存在的等效离散控制器。每种情况下均令 $T_s=0.05\text{sec}$。

(a) $D_{c1}(s)=(s+2)/2$；

(b) $D_{c2}(s)=2\dfrac{s+2}{s+4}$；

(c) $D_{c3}(s)=5\dfrac{s+2}{s+10}$；

(d) $D_{c4}(s)=5\dfrac{(s+2)(s+0.1)}{(s+10)(s+0.01)}$。

4.40　分别求出习题 4.39 中对应离散控制器的差分方程。

(a) 第 1 问。　(b) 第 2 问。

(c) 第 3 问。　(d) 第 4 问。

第5章

根轨迹设计方法

根轨迹设计方法介绍

第 3 章讲述了阶跃响应的性能指标，如上升时间、超调量、调节时间，与由自然频率 ω_n、阻尼比 ζ、实部 σ 表征的二阶系统传递函数在 s 平面上极点位置的关系。图 3.15 绘制了他们之间的相互关系。我们同时也考虑了传递函数增加一个极点或零点时，暂态响应性能的变化。第 4 章讨论了反馈是如何改善稳态误差并通过改变极点位置影响动态响应的。本章提出一种方法，说明如何通过改变系统的参数来改变系统特征方程的根，即系统闭环极点，从而改变系统的动态响应。这种方法是由 W. R. 埃文斯(W. R. Evans)提出的，他给出了绘制根的路径的方法，此图线称为*根轨迹*。随着 Matlab 和同类软件的发展，在精细绘制中很多规则已经没有必要了，但是对于一个控制器设计者来说，非常有必要了解所设计的动态控制器将如何影响根轨迹，作为设计过程的指导。了解根轨迹是如何产生的基本知识同样很重要，这有助于我们检验计算机结果的正确性。由于这些原因，埃文斯规则的研究是很重要的。

234

根轨迹常用来研究环路增益变化的影响，不过，该方法具有通用性，可用来绘制任意多项式的根相对于任何线性实参数的轨迹。例如，当速度传感器反馈增益变化，或参数是物理参数，如电动机惯量或电枢电感时，可以用根轨迹法来绘制特征方程的根。

章节概述

5.1 节先举例说明一些方程可直接求解的简单反馈系统的根轨迹。5.2 节说明如何将方程变为适当的形式来建立根轨迹的绘制规则。5.3 节用根轨迹方法绘制一系列典型控制问题的根轨迹，并说明影响根轨迹形状的因素。Matlab 用于精确地绘制具体根轨迹。当只通过调节所选参数不能满足设计要求时，可通过调节其他参数或引入动态元素，如，超前补偿、滞后补偿、超前滞后补偿，这些将在 5.4 节介绍。5.5 节通过一个小型飞机姿态控制下的综合设计总结了根轨迹的应用。5.6 节将根轨迹方法加以扩展，用来指导带有负参数、带有多个可变参数，以及带有简单时滞系统的设计。最后，5.7 节给出原始根轨迹设计起源的简史。

5.1 基本反馈控制系统的根轨迹

首先，以图 5.1 所示的基本反馈系统为例，该系统的闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{D_c(s)G(s)}{1 + D_c(s)G(s)H(s)} \tag{5.1}$$

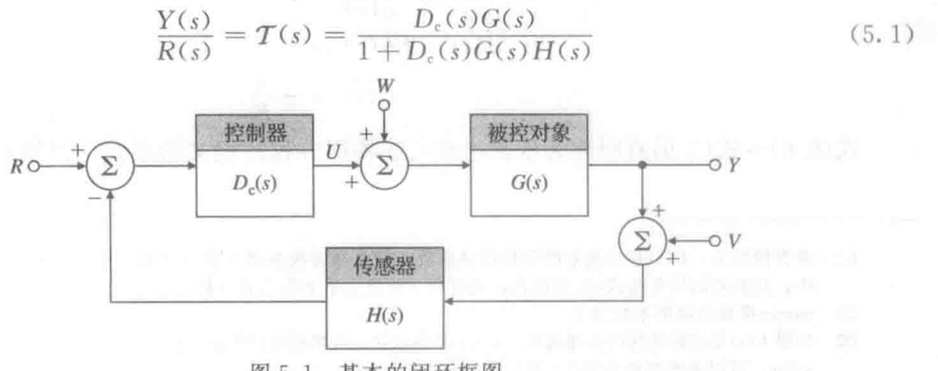


图 5.1 基本的闭环框图

特征方程如下，其根是该传递函数的极点：

$$1 + D_c(s)G(s)H(s) = 0 \tag{5.2}$$

为了便于研究参数变化时根的情况，需要将方程变形，首先把方程转化为多项式形式并将所关注的参数记作 K。我们假设将部分多项式定义为 $a(s)$和 $b(s)$，那么特征多项式可以表示为 $a(s)+Kb(s)$的形式。传递函数定义为 $L(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)}$，因此特征方程可以写成[㊀]

$$1 + KL(s) = 0$$

其中：

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \tag{5.3}$$

通常情况下，参数选为控制器的增益，此时 $L(s)$与 $D_c(s)G(s)H(s)$呈简单比例关系。埃文斯指出我们应当绘出式(5.3)中 K 从零变到无穷时的所有可能的根轨迹，然后，利用绘制出的根轨迹帮助我们选择最佳的 K 值。此外，通过研究增加的零、极点对图形的影响，我们能分析在闭环系统中增加补偿环节 $D_c(s)$对动态性能的影响。因此，这种方法不仅能用来选择特定参数值，还可以用来设计动态补偿器。式(5.3)以参数 K 为变量的所有根的轨迹称为*根轨迹*，绘制这种图形的一系列规则称为*根轨迹的埃文斯法*。我们首先以式(5.3)为例，以 K 为变参数来讨论绘制根轨迹的机理。

为研究方便，我们设置符号，假定传递函数 $L(s)$是有理函数，其分子 $b(s)$是首一(monic)[㊁]多项式，阶次为 m，分母 $a(s)$也是首一多项式，阶次为 n，满足[㊂] $n\geqslant m$。因此，m 为零点个数，n 为极点个数，可将这些多项式分解为

325～236

$$\begin{aligned} b(s) &= s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m \\ &= (s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m) \\ &= \prod_{i=1}^{m}(s - z_i) \\ a(s) &= s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n \\ &= \prod_{i=1}^{n}(s - p_i) \end{aligned} \tag{5.4}$$

$b(s)=0$ 的根是 $L(s)$的零点，用 z_i 表示；$a(s)=0$ 的根是 $L(s)$的极点，用 p_i 表示，特征方程本身的根用 r_i 表示，可以由因式形式表示($n>m$)为

$$a(s) + Kb(s) = (s - r_1)(s - r_2)\ldots(s - r_n) \tag{5.5}$$

现在，我们可以用几个等效而实用的方程描述式(5.3)所示的根轨迹问题，下面每个方程具有相同的根：

$$1 + KL(s) = 0 \tag{5.6}$$

$$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0 \tag{5.7}$$

$$a(s) + Kb(s) = 0 \tag{5.8}$$

$$L(s) = -\frac{1}{K} \tag{5.9}$$

式(5.6)～式(5.9)有时称为根轨迹形式或特征方程的埃文斯形式。根轨迹是式(5.6)～

㊀ 通常情况下，$L(s)$是反馈系统开环传递函数，K 是结合控制器后的总增益。然而，根轨迹法是一种通用方法，只要可以转化为式(5.3)形式，就可用于研究任意多项式和参数。

㊁ monic 指最高项的系数为 1。

㊂ 如果 $L(s)$是实际系统的传递函数，$n\geqslant m$ 必须成立，否则系统有限输入会产生无限输出。如果参数选择必须是 $n<m$，可以考虑等价方程 $1+K^{-1}L(s)^{-1}=0$。

式(5.9)中 K 为正实值[⊖]时 s 值的集合。因为式(5.6)~式(5.9)的解是闭环系统特征方程的根，也就是系统的闭环极点，根轨迹法可以被看作是随着参数 K 变化，推导闭环系统动态特性的一种方法。

例 5.1　电动机位置控制的根轨迹

在第 2 章中，已知直流电动机电压-位置之间标称传递函数为

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a s}=\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{A}{s(s+c)}$$

若 $D_c(s)=H(s)=1$ 且 $c=1$，反馈为输出 Θ_m 时，求系统闭环极点关于参数 A 的根轨迹如图 5.2 所示。

237

解答。根据上述表达式的定义，它们的值分别为

$$L(s)=\frac{1}{s(s+1)},\qquad b(s)=1,\qquad m=0,\qquad z_i=\{\varnothing\} \tag{5.10}$$

$$K=A,\qquad a(s)=s^2+s,\qquad n=2,\qquad p_i=0,-1$$

根据式(5.8)，根轨迹为以下二次方程根的轨迹：

$$a(s)+Kb(s)=s^2+s+K=0 \tag{5.11}$$

由二次方程的求根公式，我们可以立即写出式(5.11)的根为

$$r_1,r_2=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1-4K}}{2} \tag{5.12}$$

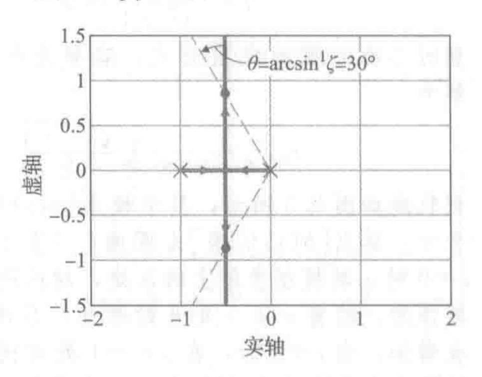


图 5.2　$L(s)=\frac{1}{s(s+1)}$的根轨迹

相应的根轨迹如图 5.2 所示，当 $0\leqslant K\leqslant 1/4$ 时，方程的根是位于实轴上 −1 和 0 之间的实数；当 $K=1/4$ 时，两个根相等均为 −1/2；当 $K>1/4$ 时，根变成复数，实部恒为 −1/2，虚部随着 K 的平方根成比例增加。图 5.2 中的虚线表示阻尼比 $\zeta=0.5$ 时根的可能位置。$L(s)$在 $s=0$ 和 $s=-1$ 的极点用符号×标注，根轨迹与阻尼比为 0.5 的线的交点用点(•)标注。在根轨迹与 $\zeta=0.5$的交点处我们可以计算 K 的，因为 $\zeta=0.5$ 时，$\theta=30°$，虚部的绝对值是实部绝对值的$\sqrt{3}$倍。由式(5.12)可知，根的实部值为$\frac{1}{2}$，所以虚部绝对值为

$$\frac{\sqrt{4K-1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此 $K=1$。◀

通过分析图 5.2 和式(5.11)以及式(5.12)，我们会发现根轨迹的几个性质。第一，方程有两个根，因此有两条根轨迹，称之为根轨迹的分支。$K=0$ 时，每条根轨迹起始于 $L(s)$的极点(0 和 −1)，这是因为 $K=0$ 时系统为开环系统，此时系统特征方程为 $a(s)=0$。随着 K 的增加，根相互靠近，在 $s=-\frac{1}{2}$处汇合，并在这点根轨迹分离且离开实轴。经过分离点后，实部相等而根趋向于无穷远处，两根的和总等于 −1。从设计角度上看，通过改变参数 K 的值，可以使得闭环极点位于图 5.2 所示根轨迹上的任何一点。如果根轨迹上的一些点可以获得满意的暂态响应，那么我们就可以通过选择对应的 K 值来完成设计，否则，就必须考虑设计一个更复杂的控制器。正如之前所指出的，根轨迹法不仅仅限于研究系统增益(例 5.1 的 $K=A$)，同样也适用于绘制参数以线性方式进入的特征方程的根轨迹。

238

⊖ 如果 K 为正值，绘制的轨迹叫正根轨迹，以后分析 $K<0$ 变化时，此时绘制的根轨迹称为负根轨迹。

例 5.2 被控对象开环极点的根轨迹

考虑例 5.1 的特征方程，其中 $D_c(s)=H(s)=1$，令 $A=1$，在如下方程中选 c 为参数：

$$1+G(s)=1+\frac{1}{s(s+c)} \tag{5.13}$$

绘制以 c 为参数的特征方程的根轨迹。

解答。相应的闭环特征方程的多项式为

$$s^2+cs+1=0 \tag{5.14}$$

如果按下面参数重新定义式(5.14)，则式(5.6)可直接应用：

$$\begin{aligned} &L(s)=\frac{s}{s^2+1}, \quad b(s)=s, \quad m=1, \quad z_i=0 \\ &K=c, \quad a(s)=s^2+1, \quad n=2, \quad p_i=+\mathrm{j},-\mathrm{j} \end{aligned} \tag{5.15}$$

因此，特征方程的根轨迹形式为

$$1+c\frac{s}{s^2+1}=0$$

通过二次方程的求根公式，容易求得式(5.14)的解为

$$r_1,r_2=-\frac{c}{2}\pm\frac{\sqrt{c^2-4}}{2} \tag{5.16}$$

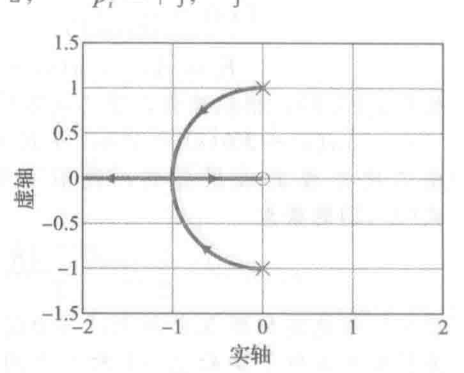


图 5.3 系统 $1+G(s)=1+\frac{1}{s(s+c)}$ 关于阻尼因子 c 的根轨迹

根轨迹如图 5.3 所示，其中极点[$a(s)$的根]仍由×表示，零点[$b(s)$的根]由圆圈(○)表示。注意，当 $c=0$ 时，其根在虚轴上的×处，对应的系统响应是振荡的。随着 c 从 0 处开始增加，系统的阻尼比 ζ 也增加。当 $c=2$ 时，在 $s=-1$ 处有两个根，两条根轨迹分支在该点处突然分开并改变走向，沿着实轴朝相反的方向延伸。两条或多条根轨迹都汇集到实轴上的重根点称为汇合点。◀

当然，既然我们可以求解这些特征方程的根，那么二次方程的根轨迹很容易绘制，就像求式(5.12)和式(5.16)的根一样，并将方程的根作为参数 K 或 c 的函数绘制图形。为了真正发挥作用，根轨迹方法必须适用于难以精确求解的高阶系统；因此，埃文斯提出绘制根轨迹的通用规则。随着 Matlab 的使用，具体的根轨迹绘制没必要再用这些规则，因为 rlocus(sys) 命令可以完成根轨迹的绘制。然而，在控制设计中，我们不仅关注具体的根轨迹，还关心如何改变系统动态，使得系统能够满足动态响应指标以达到好的控制性能。为此，有必要掌握粗略绘制根轨迹的能力，便于评价各种补偿改变可能造成的影响。用粗略绘制的根轨迹来判断由 Matlab 绘制的根轨迹正确与否也同样重要，因为在将数据输入计算机时很容易弄错常值或者遗漏一些因子，众所周知，在错误输入的情况下，计算机必然给出错误的结果[⊖]。

5.2 确定根轨迹的规则

239~240

首先，我们给出根轨迹的正式定义，由式(5.6)，根轨迹定义如下。

定义Ⅰ 根轨迹是当实参数 K 从 0 变到 $+\infty$ 时，一组满足方程 $1+KL(s)=0$ 的 s 值。通常 $1+KL(s)=0$ 是系统特征方程。这种情况下，根轨迹上的根是系统闭环极点。

以式(5.9)为例，如果 K 是正实数，那么 $L(s)$ 一定是负实数。换言之，如果把 $L(s)$ 用相角和幅值表示成极坐标形式，由式(5.9)可知，$L(s)$ 的相角一定是 180°，根据相角条件，根轨迹定义成如下形式。

定义Ⅱ $L(s)$ 的根轨迹是 s 平面上满足 $L(s)$ 的相位角为 180°点的集合。为了检测 s 平

⊖ 无效输入导致无效输出。

面上的点是否在根轨迹上，定义零点到检验点的角度为 ψ_i，极点到检验点的角度为 ϕ_i，对于整数 l，则可用 s 平面上的点将定义Ⅱ表示为

$$\sum\psi_i - \sum\phi_i = 180° + 360°(l-1) \tag{5.17}$$

定义Ⅱ的巨大价值在于：虽然手工求解高阶多项式很困难，但计算传递函数的相角相对容易得多。通常情况下，K 是正实数，我们称这种情况下的根轨迹为正根轨迹或180°根轨迹。当 K 是负实数时，$L(s)$必定为相角为0°的正实数，这时称为负根轨迹或0°根轨迹。

根据定义Ⅱ，原则上我们可通过测量相角标出相角为180°的点来确定复杂传递函数的正根轨迹，这种直接方法可通过下例来说明：

$$L(s) = \frac{s+1}{s(s+5)[(s+2)^2+4]} \tag{5.18}$$

如图5.4所示，$L(s)$的极点用×表示，零点用○表示。假设选择检验点 $s_0=-1+2j$。我们想检验对于某一特定的 K 值，s_0 是否在根轨迹上。若该点在根轨迹上，必有 $\angle L(s_0)=180°+360°(l-1)$，$l$ 为整数，根据式(5.18)，有

$$\angle(s_0+1) - \angle s_0 - \angle(s_0+5) - \angle[(s_0+2)^2+4] = 180° + 360°(l-1) \tag{5.19}$$

如图5.4所示，零点项 s_0+1 的角度可以由 -1 处的零点到检验点 s_0 的连线与实轴夹角来计算[㊀]，此时，线垂直于实轴，相角用 $\psi_1=90°$表示。与此类似，在$s=0$ 的极点到检验点 s_0 的矢量用角度 ϕ_1 表示。角度 ϕ_2、ϕ_3 分别表示复极点 $-2\pm 2j$ 到 s_0 矢量的角度。相角 ϕ_4 表示矢量 s_0+5 的相角。由式(5.19)可得，$L(s)$在 $s=s_0$ 处的相角等于分子对应零点的相角角度和减去分母对应极点的相角角度和，即

$$\begin{aligned}\angle L &= \psi_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 \\ &= 90° - 116.6° - 0° - 76° - 26.6° \\ &= -129.2°\end{aligned}$$

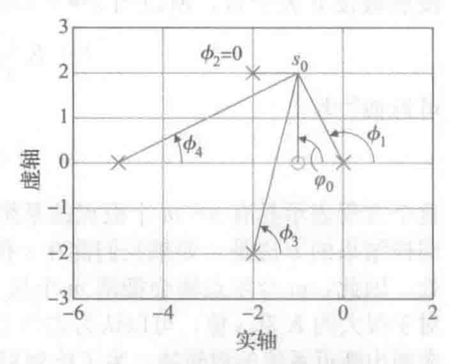


图5.4 测量方程5.18辐角值

由于 $L(s)$的相角不是180°，可知 s_0 不在根轨迹上，因此，必须另外选点重新计算。尽管计算相角不是很困难，但计算 s 平面上每个点的相角几乎是很难实现的，所以，为了使这一方法更实用，我们需要一些通用规则来确定根轨迹位置。出于这一目的，埃文斯提出一系列规则，我们通过下例来阐述这些规则是如何用来绘制根轨迹的：

$$L(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2+16]} \tag{5.20}$$

首先，考虑正根轨迹，这是常遇到的情况[㊁]。前三条规则相对简单易记，并且在根轨迹的粗略绘制中是很重要的，后两条规则偶尔用到。通常，我们认为，Matlab或其他同类软件能够精确地绘制出期望根轨迹。

5.2.1 绘制正根轨迹(180°)的规则

规则1 n 条根轨迹的分支起始于$L(s)$的极点，其中 m 条根轨迹的分支终止于$L(s)$的零点。由方程 $a(s)+Kb(s)=0$ 可知，如果 $K=0$，方程简化为 $a(s)=0$，此时，根为系统极点。当 K 趋于无穷大时，满足 $b(s)=0$ 或 $s\rightarrow+\infty$。由于 m 个零点满足 $b(s)=0$，可知有 m 条根轨迹分支终止于零点。$s\rightarrow+\infty$将在规则3中介绍。

规则2 实轴上的根轨迹位于零、极点之和为奇数的左侧区域。

在实轴上取一检验点，如图5.5所示的 s_0，我们发现两个复极点的相角 ϕ_1 和 ϕ_2 相互抵消，这是因为这两相角是由共轭复极点产生的。如果检验点在实零极点右侧，则相角为0°；

㊀ 复数的相角和幅值的图解方法将在附录WA的5.3节中介绍。

㊁ 负根轨迹将在5.6节介绍。

如果检验点在给定零极点左侧，那么相角为180°。因此，如果相角总和为180°+360°(l−1)，那检验点一定在奇数个零极点左侧，如图5.5所示。

规则3 当s和K很大时，$n-m$条根轨迹趋近于从实轴$s=\alpha$处出发，角度为ϕ_l的射线，其中

$$\phi_l=\frac{180°+360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,\cdots,n-m \tag{5.21}$$

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}$$

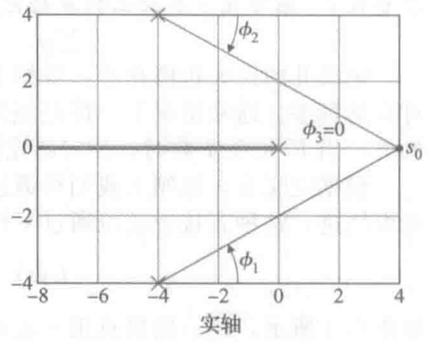


图5.5 规则2实轴上的部分根轨迹在奇数个零极点的左侧

随着$K\to+\infty$，仅当$L(s)=0$时满足方程

$$L(s)=-\frac{1}{K} \tag{5.22}$$

这可以有两种不同的解释。第一种情形，如规则1所讨论，m个根趋于$L(s)$的零点。第二种情形，按照假设n大于m，所以当$s\to+\infty$时，$L(s)$会趋近于零。当s很大时，方程

241～243

$$1+K\frac{s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}=0 \tag{5.23}$$

可近似[㊀]为

$$1+K\frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}}=0 \tag{5.24}$$

这个方程表示具有$n-m$个极点的系统，且所有极点都汇集在点$s=\alpha$上。另一种形象地说明同样结果的方法是，如果我们能在s很大的位置观察零、极点：它们会聚集在s平面的原点处。因此，m个零点将会抵消m个极点的作用，另外的$n-m$个极点会出现在相同的位置。对于很大的K和s值，可以认为式(5.23)的根轨迹与式(5.24)的根轨迹近似。我们需要计算α来画出渐近系统的根轨迹。为了绘制根轨迹，选择搜索点s_0满足$s_0=Re^{j\phi}$，其中，R为很大的定值，ϕ为变量。由于简化系统的所有极点都在相同位置，若$n-m$个极点相角ϕ_l的总和为180°，则传递函数的相角为180°。因此ϕ_l可以由下式给出：

$$(n-m)\phi_l=180°+360°(l-1)$$

其中：l为整数。

根轨迹渐近线由$n-m$条不同的射线组成，角度分别为

$$\phi_l=\frac{180°+360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,\cdots,n-m \tag{5.25}$$

由式(5.20)所描述的系统中，$n-m=3$，$\phi_{1,2,3}=60°,180°,300°$或±60°，180°。

根轨迹的渐近线起始于实轴上的点$s_0=\alpha$处，可以利用多项式的简单性质来计算α。假设我们要研究如式(5.4)所示的首一多项式$a(s)$，其中，a_i为系数，p_i为根，将多项式因式分解可得

$$s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n=(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)$$

如果把方程右侧的式子展开，则s^{n-1}系数为$a_1=-\sum p_i$，而在方程的左侧，对应s^{n-1}的系数为a_1。因此$a_1=-\sum p_i$，换言之，首一多项式中，次高项系数是所有根的和的相反数，这里也就是$L(s)$极点之和。将这一结论应用到多项式$b(s)$中，可得到零点和的相反数为b_1，这一结论可以写成

$$\begin{aligned}-b_1&=\sum z_i\\-a_1&=\sum p_i\end{aligned} \tag{5.26}$$

244

最后，把这一结果应用到由式(5.23)表征的闭环特征多项式，即有

㊀ 该近似方程可以通过将$a(s)$被$b(s)$除且使主导的两项(s的最高次项)满足$(s-\alpha)^{n-m}$的展开式得到。

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n + K(s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m) \tag{5.27}$$
$$= (s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n) = 0$$

注意，根的和是 s^{n-1} 项系数的相反数，若 $m<n-1$，则此和与 K 无关，因此，如果 $L(s)$ 中极点个数至少比零点个数多2个，则有 $a_1 = -\sum r_i$。由此说明，如果 $m<n-1$，则根的中心点不随 K 变化而变化，且开环极点与闭环极点的和相等，都是 $-a_1$，可表示为

$$-\sum r_i = -\sum p_i \tag{5.28}$$

对于很大的 K 值，可以发现 m 个根 r_i 接近零点 z_i，$n-m$ 个根接近渐近系统 $\frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}}$ 的分支，其中渐近系统的极点的和为 $(n-m)\alpha$。综上所知，所有根之和等于趋向于无穷大的根之和加上趋向于 $L(s)$ 零点的根之和，即

$$-\sum r_i = -(n-m)\alpha - \sum z_i = -\sum p_i$$

解出 α，得

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m} \tag{5.29}$$

注意，既然复数零极点总是以共轭复数对的形式出现的，所以在 $\sum p_i$ 和 $\sum z_i$ 中虚部之和总是为零。因此，式(5.29)只需要实部信息，由式(5.20)，可得

$$\alpha = \frac{-4-4+0}{3-0} = -\frac{8}{3} = -2.67$$

在图5.6中，$\pm 60°$ 渐近线由虚线表示，该渐近线与虚轴相交于点 $\pm 2.67\mathrm{j}\times\sqrt{3} = \pm 4.62\mathrm{j}$。180°渐近线可由规则2在实轴上绘出。

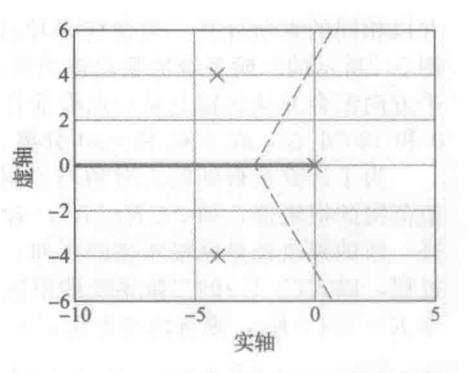


图5.6　在 a 处向外辐射的 $n-m$ 条渐近线

规则4　根轨迹中，单个极点出射角可表示为

$$\phi_{\mathrm{dep}} = \sum \psi_i - \sum_{i\neq \mathrm{dep}} \phi_i - 180° \tag{5.30}$$

其中：$\sum \phi_i$ 为其他极点到该极点所对应相角的和，$\sum \psi_i$ 为所有零点到该极点所对应相角的和。对于 q 重极点，出射角可表示为

$$q\phi_{l,\mathrm{dep}} = \sum \psi_i - \sum_{i\neq l,\mathrm{dep}} \phi_i - 180° - 360°(l-1) \tag{5.31}$$

其中：l 是整数，取值为1，2，…，q。

注意，如果有 q 重极点，则根轨迹有起始于极点的 q 个分支。

同理，系统有 q 重零点时，入射角表示为

$$q\psi_{l,\mathrm{arr}} = \sum \phi_i - \sum_{i\neq l,\mathrm{arr}} \psi_i + 180° + 360°(l-1) \tag{5.32}$$

其中：$\sum \phi_i$ 为所有极点到该零点所对应相角的和；$\sum \psi_i$ 为其他零点到该零点所对应相角的和，并且 l 取值为1，2，…，q 根轨迹的 q 个分支终止于这些零点。

正如我们将要说明的，上述规则均源于式(5.17)中基本的根轨迹相角条件。为了计算根轨迹的一个分支起始于某极点的出射角，我们选择一个非常接近此极点的测试点 s_0，把极点到测试点的相角定义为 ϕ_1，并把式(5.17)的所有其他项转移到方程右侧。在例中极点 $-4+4\mathrm{j}$ 附近取测试点 s_0，并计算 $L(s_0)$ 的相角来说明这一过程。如图5.7所示，

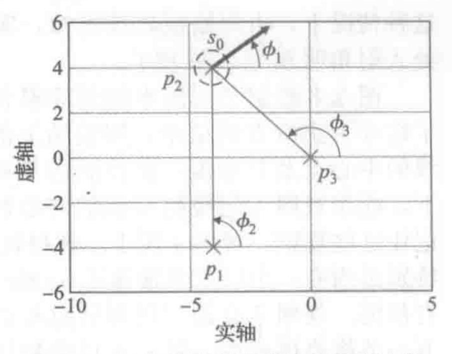


图5.7　极点出射角与零点入射角计算

245 ~ 246

$-4+4j$ 到测试点角度定义为 ϕ_1，因为所选测试点与所研究极点非常靠近，可认为其他零极点到测试点角度 ϕ_2、ϕ_3，与到所研究极点的角度相同，这样，$\phi_2=90°$，$\phi_3=135°$，根据相角条件，所有相角总和应为 180°，因此计算 ϕ_1 为

$$\phi_1 = -90° - 135° - 180° \tag{5.33}$$

$$= -405° \tag{5.34}$$

$$= -45° \tag{5.35}$$

由共轭复极点在图中的对称性知，根轨迹极点 $-4-4j$ 处出射角为 $+45°$。

若 $L(s)$ 有零点，式(5.33)的右侧还应加上零点到极点的角度。对于一般的情况，由式(5.33)可知，单极点的出射角由式(5.30)给出。对于 q 重极点时，需要计算 q 次该极点到测试点的相角。这使式(5.30)变成了式(5.31)，因为会有 q 条根轨迹从此重极点出发，所以 l 要取 q 个数值。

如图 5.7 所示，对于很小的 K 值，计算根轨迹出射角的分析过程，也可用于 K 值很大时计算根轨迹 $L(s)$ 的零点入射角。通用计算公式由式(5.32)给出。

当系统的极点靠近虚轴时，这一规则非常有用，因为它告诉我们从极点出发的根轨迹分支是朝着稳定的左半平面(LHP)移动还是要进入不稳定的右半平面(RHP)。

规则 5　根轨迹在某些点有重根，且根轨迹到达一个 q 重极点处的夹角为

$$\frac{180° + 360°(l-1)}{q} \tag{5.36}$$

并以相同的夹角分开。与任何多项式一样，阶次高于 1 的特征多项式都可能有重根。以图 5.2所示的二阶系统的根轨迹为例，当 $K=1/4$ 时，在 $s=-1/2$ 有两个根。根轨迹沿水平方向汇合并从实轴上某一点沿垂直方向分离，在 $K>1/4$ 的情况下成为复根，根轨迹在 0°和 180°汇合，在+90°和−90°分离。

为了计算重根处的入射角与出射角，连续根轨迹技巧非常有用。可设想绘制一定 K 值范围的根轨迹，如 $0\leqslant K\leqslant K_1$，若令 $K=K_1+K_2$，可以绘制以 K_2 为参数的新的根轨迹，新的根轨迹是原根轨迹的延伸，它的起点是原系统在 $K=K_1$ 时的根。为了说明这一过程，以式(5.11)的二阶系统的根轨迹为例，令 K_1 为相应的分离点处的值，即 $K_1=1/4$。令 $K=1/4+K_2$，则有轨迹方程 $s^2+s+1/4+K_2=0$ 或

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + K_2 = 0 \tag{5.37}$$

247

当然，绘制此根轨迹的步骤与绘制其他根轨迹相同，不同的是，式(5.37)的根轨迹起点对应初始式(5.11)根轨迹的分离点。也就是，如图 5.2 所示的 $s=-1/2$ 处，在二重极点 $s=-1/2$ 处应用出射角规则[式(5.31)]，可得

$$2\phi_{\text{dep}} = -180° - 360°(l-1) \tag{5.38}$$

$$\phi_{\text{dep}} = -90° - 180°(l-1) \tag{5.39}$$

$$\phi_{\text{dep}} = \pm 90°(\text{分离点处的出射角}) \tag{5.40}$$

这种情况下，由原始根轨迹可知，实轴上 $s=-1/2$ 处入射角明显为 0°和 180°。

图 5.8 绘制了三阶系统的完整根轨迹，它包含了迄今为止所有的结论，即实轴上的根轨迹、渐近线的中心点及其角度、极点处的出射角。通常情况下，应用规则 1 到规则 3 就能够绘制出根轨迹，应记住这些规则。规则 4 用于了解根轨迹的分离方式，特别是当有一个极点非常靠近 jω 轴时，这一点非常有帮助。规则 5 有助于解释计算机绘制结果，正如下一节将要讲到的，这一点可定性说明根轨迹随零

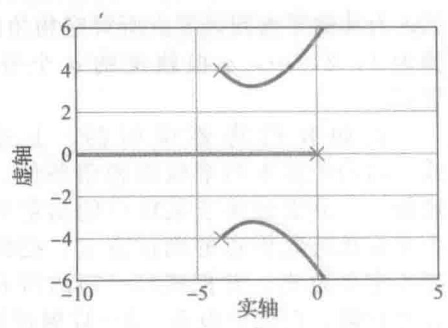


图 5.8　$L(s)=\dfrac{1}{s(s^2+8s+32)}$ 的根轨迹

极点移动而产生的变化。图 5.8 所示的为用如下 Matlab 语句绘制的精确根轨迹：

```
s = tf('s');
sysL = 1/(s*((s+4)^2 + 16));
rlocus(sysL)
```

下面将总结绘制根轨迹规则。

5.2.2　绘制根轨迹的规则总结

规则 1　n 条根轨迹分支起始于 $L(s)$ 的极点，m 条根轨迹分支终止于 $L(s)$ 的零点。

248

规则 2　实轴上的根轨迹位于零、极点之和为奇数的左侧区域。

规则 3　当 s 和 K 很大时，$n-m$ 条根轨迹趋近于实轴上出发于中心点 $s=\alpha$，以角度为 ϕ_l 延伸的直线，其中：

$$\phi_l=\frac{180^\circ+360^\circ(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,\cdots,n-m \tag{5.41}$$

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m} \tag{5.42}$$

规则 4　q 重极点处的根轨迹出射角为

$$q\phi_{l,\mathrm{dep}}=\sum\psi_i-\sum\phi_i-180^\circ-360^\circ(l-1) \tag{5.43}$$

其中：$l=1$，2，…，q。q 重零点的入射角为

$$q\psi_{l,\mathrm{arr}}=\sum\phi_i-\sum\psi_i+180^\circ+360^\circ(l-1) \tag{5.44}$$

规则 5　根轨迹上的某些点可以具有 q 重根，这些根轨迹到达该重根点的夹角为

$$\frac{180^\circ+360^\circ(l-1)}{q} \tag{5.45}$$

并以相同的夹角离开，形成 $2q$ 条等角度射线。若该点在实轴上，则这组射线的方向由实轴上根轨迹的规则给出。若该点在复平面上，则需要用到出射角规则。

5.2.3　选择参数值

正根轨迹是方程 $1+KL(s)=0$ 在实数 K 取某个正值时所有可能的根的位置图线。设计的目标是选择特定的 K 值，满足静态和动态响应的性能指标。现在，我们转而研究如何根据特定的根轨迹选择 K 值，使根位于具体位置。尽管我们应该表明如何通过手工计算进行增益选择，然而，其实这个工作是不需要手工计算的，因为用 Matlab 很容易完成。不过，为了能够粗略检验计算机结果的正确性，了解增益的手工计算方法还是很有用的。

利用根轨迹的定义Ⅱ，我们只利用 $L(s)$ 的相角建立了一些根轨迹的绘制规则。当 $L(s)$ 的相角为 180°时，若方程在某特定的位置有一个根，则此处的幅值条件也一定满足，这个条件由式(5.9)给出，可以改写为

$$K=-\frac{1}{L(s)} \tag{5.46}$$

对于根轨迹上 s 的取值，$L(s)$ 的相角为 180°，所以我们可以将幅值条件写为

$$K=\frac{1}{|L|} \tag{5.47}$$

式(5.47)同时具有代数和几何含义。为了看出几何解释，考虑 $1+KL(s)$ 的根轨迹，其中：

$$L(s)=\frac{1}{s[(s+4)^2+16]} \tag{5.48}$$

对于这个传递函数，根轨迹如图 5.9 所示。图 5.9 中，画出了阻尼比 $\zeta=0.5$ 的线，根轨迹与它的交点用点(·)表示。假定我们打算选择增益使根位

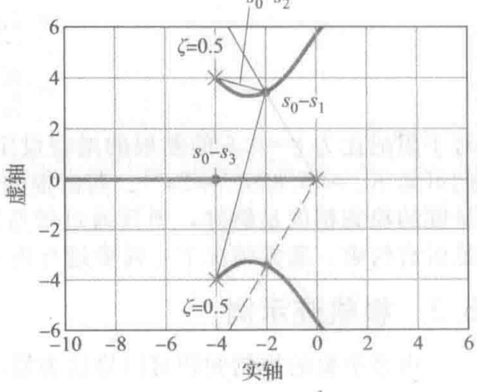


图 5.9　用 $L(s)=\dfrac{1}{s[(s+4)^2+16]}$ 的根轨迹说明增益 K 的计算

于这些点的位置，这相当于选择增益使闭环系统的两个极点具有 $\zeta=0.5$ 的阻尼比(稍后，我们要确定第三个极点的位置)。当根位于圆点位置时，K 值是多少呢？由式(5.47)，K 的值等于 1 除以 $L(s_0)$ 的幅值，其中 s_0 为小圆点的坐标。我们在图上标出了 s_0-s_1，s_0-s_2 和 s_0-s_3 三个矢量，它们是由 $L(s)$ 的极点指向 s_0 的矢量(因为 $s_1=0$，第一个向量等于 s_0)。用代数方法，有

$$L(s_0)=\frac{1}{s_0(s_0-s_2)(s_0-s_3)} \tag{5.49}$$

利用式(5.47)，这变成

$$K=\frac{1}{|L(s_0)|}=|s_0||s_0-s_2||s_0-s_3| \tag{5.50}$$

式(5.50)的几何解释说明三个幅值是图 5.9 中对应矢量的长度(参见 www.fpe7e.com 附录 WD)。因此，如果虚轴和实轴的标度相同，我们可以测量这些矢量长度并相乘，从而计算位于点($s=s_0$)根的增益。利用图中的标度，估计

249～250

$$|s_0|\approx 4.0$$
$$|s_0-s_2|\approx 2.1$$
$$|s_0-s_3|\approx 7.7$$

因此，增益的估计为

$$K=4.0\times 2.1\times 7.7\approx 65$$

我们得出结论，若将 K 取为65，则 $1+KL$ 的一个根将位于 s_0，具有期望的阻尼比为0.5。另一个根位于 s_0 的共轭位置。第三个根在哪里呢？第三条根轨迹的分支是沿着负实轴的。若用手工计算，我们需要选择一个测试点，计算增益，重复此过程直到找到 $K=65$ 的点为止。然而，若用 Matlab 程序测试，程序会显示某位置根的对应增益，很方便用以上的步骤验证第三个根的位置。

用 Matlab 绘制根轨迹的命令是 rlocus(sysL)命令，例如，命令[K，p]= rlocfind(sysL)将在图上产生十字线，将十字线指向根轨迹的期望位置，并单击鼠标来选择，将返回此点处的增益 K 值和与此 K 值对应的其他变量 p。用 rltool 命令更加简单，这将在例 5.7中详细讨论。

最后，利用所选增益可以计算控制系统的误差常数。某过程的传递函数为式(5.48)，具有一个积分器并采用单位反馈，属于1型系统。这种情况下，斜坡输入的稳态跟踪误差由以下的速度常数决定：

$$K_v=\lim_{s\to 0} sKL(s) \tag{5.51}$$

$$=\lim_{s\to 0} s\frac{K}{s[(s+4)^2+16]} \tag{5.52}$$

$$=\frac{K}{32} \tag{5.53}$$

对于阻尼比为 $\zeta=0.5$ 的复根的增益设定，根轨迹增益为 $K=65$，因此，由式(5.53)，我们可知 $K_v=65/32\mathrm{s}^{-1}\approx 2\mathrm{s}^{-1}$。若由根的位置分布决定的闭环动态响应满足要求，且由 K_v 量度的稳态精度足够好，则只通过增益的选择就完成了设计。然而，若不存在 K 值能满足所有约束，通常情况下，需要进行进一步修正以达到系统的性能指标要求。

5.3 根轨迹示例

许多重要的控制问题可以描述为简单的双积分器传递函数，即

$$G(s)=\frac{1}{s^2} \tag{5.54}$$

251

卫星姿态控制可由此方程描述。同样，计算机硬盘驱动器的读/写磁头组件通常安装于空

气轴承上，因此除了微小运动外，摩擦力可以忽略不计。电动机通常由电流源驱动，从而使转矩不受反电动势的影响。这样，系统可用式(5.54)描述。如果针对此对象，选择比例控制器来构造一个单位反馈系统，则关于控制器增益的根轨迹为

$$1+k_{\mathrm{P}}\frac{1}{s^{2}}=0 \tag{5.55}$$

如果在这种情况下，应用根轨迹的绘制规则，则可以得到如下结论。

规则 1：根轨迹有起始于 $s=0$ 的两条分支。

规则 2：实轴上没有根轨迹。

规则 3：两条根轨迹渐近线均始于 $s=0$，角度分别为 $\pm 90°$。

规则 4：根轨迹于 $s=0$ 处的出射角为 $\pm 90°$。

结论：根轨迹包含整个虚轴，因此对于任何的控制增益 k_p，系统都是振荡的。更有效的设计方法是采用比例微分控制。

例 5.3　具有 PD 控制的卫星姿态控制的根轨迹

具有 PD 控制的特征方程为

$$1+[k_{\mathrm{P}}+k_{\mathrm{D}}s]\frac{1}{s^{2}}=0 \tag{5.56}$$

为将此方程转化为根轨迹方程形式，我们定义 $K=k_{\mathrm{D}}$。对当前任意选择的[一]且满足 $k_{\mathrm{P}}/k_{\mathrm{D}}=1$ 的增益比，都有如下根轨迹方程：

$$1+K\frac{s+1}{s^{2}}=0 \tag{5.57}$$

解答。应用根轨迹绘制规则，得到如下结果。

规则 1：有两条根轨迹的分支起始于 $s=0$，一条终止于 $s=-1$ 处的零点，另一条终止于无穷远处。

规则 2：实轴上的根轨迹位于 $s=-1$ 点左侧。

规则 3：由于 $n-m=1$，所以有一条渐近线位于负实轴上。

规则 4：二重极点 $s=0$ 处根轨迹的出射角是 $\pm 90°$。

规则 5：由规则 1～4 可知，根轨迹绕过零点，汇合于零点左侧的实轴上，分别终止于规则 1 求出的终点。结果是根轨迹汇合于实轴上的点 $s=-2$，形成一个重根点。计算此点处根轨迹的入射角为 $\pm 90°$。我们得到的结论是：两条根轨迹由原点分别向上和向下出发，不进入右半平面，弯曲并汇合于 $s=-2$[二]处，之后一条向左终止于无穷远，一条向右终止于 $s=-1$ 处。用如下命令绘制出的根轨迹如图 5.10 所示。

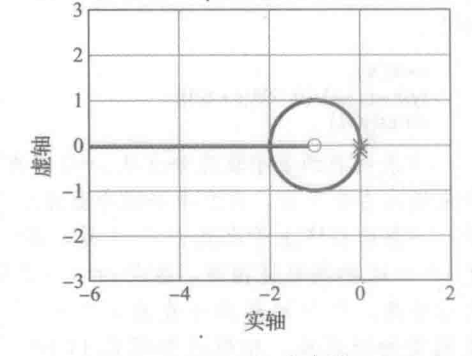


图 5.10　$L(s)=G(s)=\frac{(s+1)}{s^{2}}$ 的根轨迹

Matlab 语句如下。

```
s = tf('s');
sysS = (s +1)/(s^2);
rlocus( sysS)
```

将此例与之前简单加以比较，可以看出：

增加的零点将根轨迹拉入了左半平面，这一点在构造补偿中通常很重要。

在前一例中，我们考虑的是纯 PD 控制。然而，正如之前提到的，理想的微分运算在

[一] 对于给定的物理系统，这个数值根据给定的上升时间和执行器的最大控制信号来选择。

[二] 假设 $s+1=e^{j\theta}$。方程对一定范围内的正数 K 和实数 θ 可解，从而证明根轨迹是个圆(参见习题 5.18)。

252 ~ 253

实际物理系统中是不可实现的，实际中的PD控制通常近似为

$$D_c(s)=k_P+\frac{k_D s}{s/p+1} \tag{5.58}$$

通过定义 $K=k_P+pk_D$ 和 $z=pk_P/K$，可将上式写成根轨迹形式，使得[⊖]

$$D_c(s)=K\frac{s+z}{s+p} \tag{5.59}$$

出于这些原因，在将要介绍的频率特性设计方法中，若 $z<p$，这类控制器传递函数就称为“超前补偿器”，或者考虑到由电子器件组成的频率补偿装置而命名为“超前网络”。对于被控对象 $1/s^2$，采用此控制器后系统的特征方程为

$$1+D_c(s)G(s)=1+KL(s)=0$$

$$1+K\frac{s+z}{s^2(s+p)}=0$$

例 5.4 具有修正 PD 控制或超前补偿的卫星控制的根轨迹

为了评估增加极点的影响，再设定 $z=1$，并考虑三个不同的 p 值。首先，选择一个较大的值，$p=12$，考虑根轨迹

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+12)} \tag{5.60}$$

解答。同样，应用规则绘制根轨迹。

规则 1：共有 3 条根轨迹分支，两条出发于点 $s=0$，一条出发于点 $s=-12$。

规则 2：实轴上的区间 $-12\leqslant s\leqslant -1$ 是根轨迹的一部分。

规则 3：共有 $n-m=3-1=2$ 条渐近线，中心点为 $\alpha=\dfrac{-12-(-1)}{2}=-11/2$，角度为 $\pm 90°$。

规则 4：$s=0$ 处根轨迹分支的出射角为 $\pm 90°$，极点 $s=-12$ 处根轨迹的出射角为 $0°$。

即便在以上的规则下，根轨迹的走向仍有多种可能。Matlab 是确定轨迹的便捷方法，Matlab 命令如下。

```
s = tf('s');
sysL = (s + 1)/((s^2)*(s + 12));
rlocus(sysL)
```

这表明有两条根轨迹分支从 $s=0$ 极点处垂直出发，并未进入右半平面，向左半平面弯曲并汇合于 $s=-2.3$ 处，一条向右终止于零点 $s=-1$ 处，另一条则与起始于 $s=-12$ 的根轨迹相遇，在点 $s=-5.2$ 处形成重根点之后分离，并分别趋向于在点 $s=-5.5$ 处与实轴垂直相交的渐近线。根轨迹如图 5.11 所示。◀

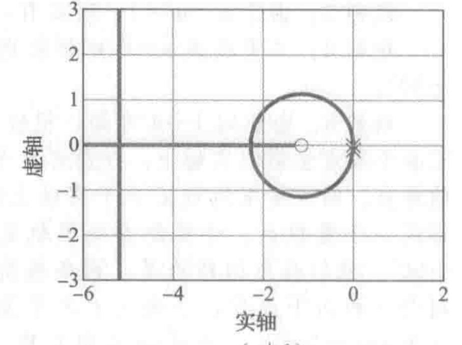


图 5.11 $L(s)=\dfrac{(s+1)}{s^2(s+12)}$ 的根轨迹

观察这个根轨迹图可发现，增加的极点使原来 PD 控制的简单圆形根轨迹发生了形变，但就原点附近的根轨迹而言，其形状与之前的形状非常相似。然而，当极点进一步向右靠近时，情况还会发生变化。

例 5.5 具有较小极点的超前补偿卫星控制系统的根轨迹

现在，考虑 $p=4$ 并绘制如下方程的根轨迹：

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+4)}=0 \tag{5.61}$$

⊖ 这里的 z 代表零点，请不要与第 8 章中离散传递函数里面的 z 算子混淆。

解答。同样，应用绘制规则，我们得到如下结果。

规则 1：有三条根轨迹分支，其中两条起始于 $s=0$，一条起始于 $s=-4$。

规则 2：实轴上的根轨迹位于区间 $-4 \leqslant s \leqslant -1$。

规则 3：两条渐近线中心位于 $\alpha=-3/2$，角度为 $\pm 90°$。

规则 4：根轨迹在 $s=0$ 处的出射角仍是 $\pm 90°$。

规则 5：Matlab 命令如下。

```
s = tf('s');
sysL = (s + 1)/((s^2)*(s + 4));
rlocus(sysL)
```

这表明两条根轨迹分支在极点 $s=0$ 处垂直分离，稍向左侧弯曲，分别趋于向上向下的两条渐近线。起始于 $s=-4$ 的根轨迹沿着实轴终止于零点。本例与极点选在 $s=-12$ 的区别在于，实轴上没有根轨迹的分离点和汇合点。Matlab 所绘制的根轨迹如图 5.12所示。

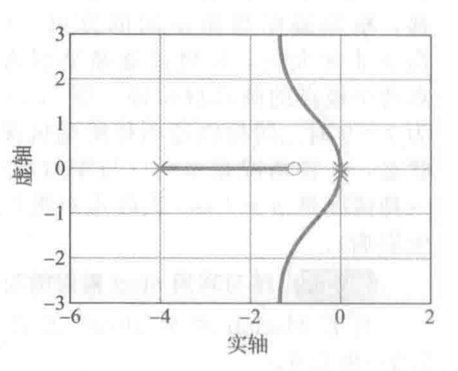


图 5.12　$L(s)=\frac{(s+1)}{s^2(s+4)}$ 的根轨迹

这两种情况下，系统的结构很相似。然而，当 $p=12$ 时，实轴上既有汇合点又有分离点；而当 $p=4$ 时，这些特点就不存在了。随之而来的问题是，从什么位置开始，根轨迹上的汇合点和分离点就没有了呢？事实上，这种情况发生于 $p=9$ 时，这一点我们将在如下的例子中发现。

例 5.6　具有过渡值极点的卫星控制系统的根轨迹

绘制如下方程的根轨迹：

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+9)}=0 \tag{5.62}$$

解答。

规则 1：有三条根轨迹分支分别起始于 $s=0$ 和 $s=-9$。

规则 2：实轴上的根轨迹分布于区间 $-9 \leqslant s < -1$。

规则 3：两条渐近线中心点在 $\alpha=-8/2=-4$ 处。

规则 4：根轨迹在 $s=0$ 处的出射角为 $\pm 90°$。

规则 5：Matlab 语句如下。

```
s = tf('s')
sysL = (s + 1)/((s^2)*(s+9));
rlocus(sysL)
```

产生如图 5.13 所示的根轨迹。可见，两条起始于极点 $s=0$ 的根轨迹分支垂直分离，然后向附近弯曲最终在实轴上的点 $s=-3$ 处汇合，入射角为 $\pm 60°$，与此同时，起始于 $s=-9$ 点处的根轨迹也向右与这两条根轨迹在 $s=-3$ 汇合，其入射角为 $0°$。这三条根轨迹随即从 $s=-3$ 点处分离，分离角分别为 $0°$ 和 $\pm 120°$，其中一条终止于零点，另外两条分别趋于左上方和左下方的渐近线。利用规则 5 能够确定这些入射角和分离角[⊖]。注意到对于这类 $L(s)$ 方程形式，这种特殊形状的根轨迹只有在极点值和零点值的比为 9∶1 时才会出现。它是介于例 5.4 和例 5.5 中两种根轨迹的过渡根轨迹。接下来，我们在例 5.7 中将详细讨论这种转换并用 Matlab 加以验证。

254 ~ 256

由图 5.11 到图 5.13 可见，$D_c(s)G(s) \approx K\frac{1}{s^2}$ 的根轨迹包含两条起始于 $s=0$，出射角

⊖ 此特殊根轨迹的形状是一个 Maclaurin 三等分线，一个将角度三等分的平面曲线。

为±90°的直线根轨迹分支。当第三个极点靠近零点(p 接近 1)时，此根轨迹只产生了微小的变化；当 p 逐渐增大到 $p=9$ 时，根轨迹在 −3 点处形成 3 重根；当 p 从 −9 继续左移，根轨迹呈现出不同的分离、汇合点；当 p 非常大时，根轨迹逐渐呈现为一个零点两个极点的圆形根轨迹。图 5.13 所示的为 $p=9$ 时二阶根轨迹两种极端情况的过渡状态，一种情况是 $p=1$(与零点对消)，另一种情况是 $p\to+\infty$(该极点对根轨迹不产生影响)。

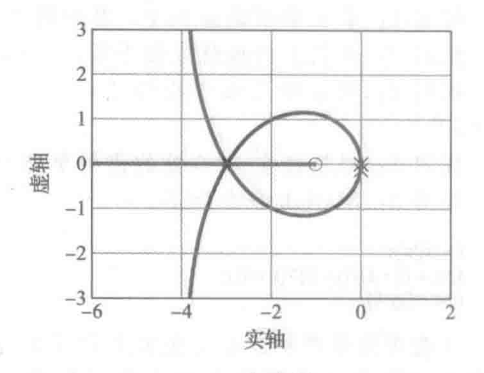


图 5.13 $L(s)=\dfrac{(s+1)}{s^2(s+9)}$ 的根轨迹

例 5.7 练习利用 rltool 重做前面的例子

利用 Matlab 中的 rltool 工具重做例 5.3～例 5.6。

解答。rltool 是 Matlab 中一个交互的根轨迹设计工具，它提供图形用户界面(GUI)以进行根轨迹的分析和设计。rltool 为设计反馈控制器提供了方便途径，因为它允许快速迭代并迅速显示其对根轨迹的影响。下面说明此工具的用法。Matlab 命令如下。

257

```
s = tf('s');
sysL = (s + 1)/(s^2);
rltool(sysL)
```

初始化 GUI，并产生图 5.10 所示的根轨迹，这里的根轨迹与例 5.4～例 5.6 中的根轨迹相似，但负实轴上没有前三个例子里面为说明其作用而来回移动的极点。单击 Control and Estimation Tools Manager 窗口中的 Compensator Editor，然后右击 Dynamic 对话框窗口，选择 add pole/zero。这样就可以增加一个位于 $s=-12$ 的极点，从而产生图 5.11 和图 5.14 所示那样的根轨迹。现在将鼠标光标放到 $s=-12$ 的极点上，按住鼠标右键，将此极点从 $s=-12$ 慢慢拖动到 $s=-4$，可以看到此极点位于所有中间位置的根轨迹形状。在经过 $s=-9$ 位置时，动作要特别的缓慢和仔细，因为极点在这个位置附近时，根轨迹的形状变化非常快。其实你也可以将鼠标光标放到任一个闭环极点(重极点)上，并沿着根轨迹拖动它们，系统会显示其他与此极点系统增益 K 对应的根的位置，并且当系统闭环特征根为复数对时，会显示其阻尼比。更详细的介绍请参阅 www.fpe7e.com 附录 WR 中的 rltool 指导。◀

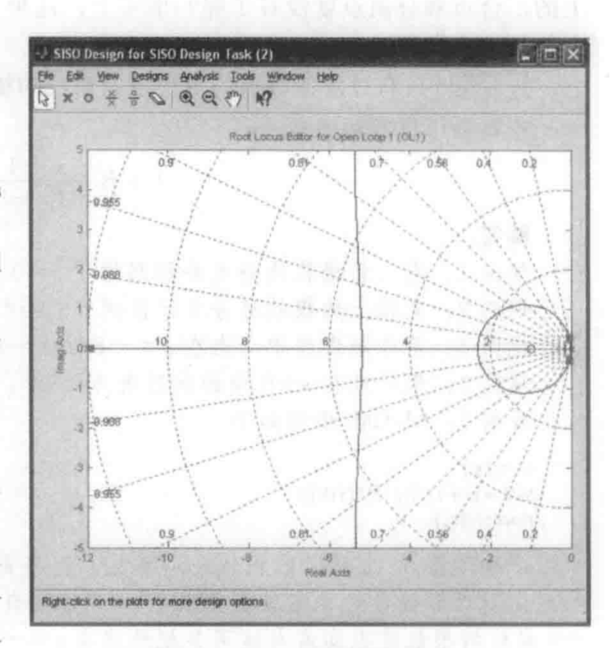


图 5.14 rltool 图形用户界面

258

由此例可得到如下有用的结论。

当一个附加极点从左端无穷远处逐渐靠近给定的根轨迹时，根轨迹分支会向右移动。

双重积分器是例子中最简单的模型，假定被控对象为无摩擦的刚体。更实际的情况需要将卫星姿态控制中的柔性效果考虑在内，至少太阳能板是具有柔性的。就磁盘驱动系统的读/写机构而言，读/写头和支撑臂总是存在柔性的，通常是具有一系列轻阻尼模态的复杂动态行为，一般用一个主导模态来近似。在 2.1 节中提到过，磁盘驱动器的柔性为模型

$1/s^2$ 增加了一系列复极点。通常有两种可能，若传感器与执行器安装在同一刚体上，叫做合体㊀；若两者安装在不同实体，叫做单体㊁。我们首先考虑合体的情况，与式(2.20)类似。正如第 2 章所述，合体的传递函数不仅有一对复极点，其附近还有一对复零点，复零点的自然频率比复极点的低一些。在后续的例子中，零极点数目的选择更侧重于体现根轨迹特性而非代表特定的物理模型。

例 5.8　具有合体柔性的卫星控制系统的根轨迹

绘制特征方程 $1+G(s)D_c(s)=0$ 的根轨迹，其中：

$$G(s)=\frac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]} \tag{5.63}$$

采用的是单位反馈结构，控制器的传递函数为

$$D_c(s)=K\frac{s+1}{s+12} \tag{5.64}$$

解答。这里，有

$$L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$$

在虚轴附近既有极点又有零点，需要确定重要的出射角。

规则 1：共有五条根轨迹分支，三条终止于有限零点，两条趋于渐近线。

规则 2：实轴上的根轨迹位于区间 $-12\leqslant s\leqslant -1$。

规则 3：渐近线的中心点在

$$\alpha=\frac{-12-0.1-0.1-(-0.1-0.1-1)}{5-3}=-\frac{11}{2}$$

渐近线的角度为 $\pm 90°$。

规则 4：计算根轨迹在极点 $s=-0.1+j6.6$ 的出射角。定义此出射角为 ϕ_1，其他的角度标注在图 5.15 上。根轨迹条件为

$$\phi_1=\psi_1+\psi_2+\psi_3-(\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5)-180°$$

$$\phi_1=90°+90°+\arctan(6.6)-\left[90°+90°+90°+\arctan\left(\frac{6.6}{12}\right)\right]-180° \tag{5.65}$$

$$\phi_1=81.4°-90°-28.8°-180°=-217.4°=142.6°$$

因此根轨迹从此极点的左上方离开，进入复平面的稳定区域。如有兴趣，可以练习计算零点在 $s=-0.1+j6$ 处的入射角。

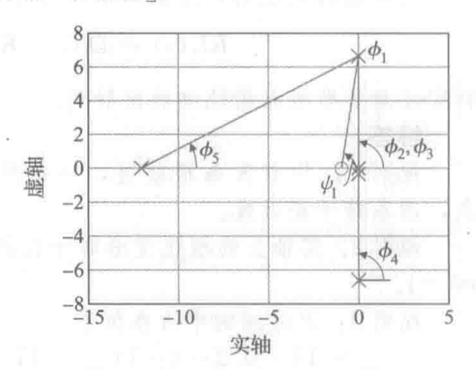


图 5.15　$L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的出射角计算示意图

利用 Matlab，绘制根轨迹如图 5.16 所示。注意，所有由简单规则确定的根轨迹特性都与所绘制图线相符，基本可以验证数据的输入是正确的。

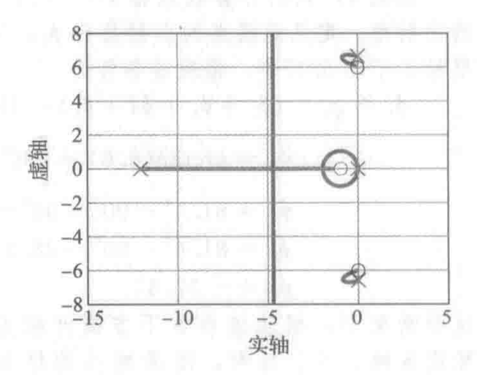


图 5.16　$L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{(s+0.1)^2+6^2}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的根轨迹

◀

㊀ 典型的卫星姿态控制中，柔性由太阳能板引起，传感器和执行机构都作用在卫星主体上。

㊁ 典型的卫星系统中，控制器与位姿传感器之间存在柔性。电脑中硬盘读/写磁头控制也是如此，电动机位于臂的一端，而读/写头在另一端。

上例说明：

对于合体柔性，虽然单个柔性模态在特征方程中引入了轻阻尼根，但并没有破坏系统的稳定性。

出射角的计算表明根轨迹从柔性模态引入的极点出发向左半平面移动。接下来，我们考虑单体柔性的情况，此时被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]} \tag{5.66}$$

同样采用超前补偿器，有

$$D_c(s)=K\frac{s+1}{s+12} \tag{5.67}$$

正如这些方程所示，与上例和第2章式(2.20)所示的合体柔性的情况不同，单体柔性的传递函数具有复极点，但是没有对应的复零点。这会造成本质的影响，正如例5.9说明的一样。

例 5.9 单体柔性情况下的根轨迹

应用根轨迹规则，绘制如下系统的根轨迹：

$$KL(s)=D_cG=K\frac{s+1}{s+12}\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]} \tag{5.68}$$

特别注意复数极点根轨迹的出射角。

解答。

规则1：共有五条根轨迹，一条终止于零点，四条趋于渐近线。

规则2：实轴上的根轨迹分布于区间 $-12\leqslant s\leqslant -1$。

规则3：渐近线的中心点位于

$$\alpha=\frac{-12-0.2-(-1)}{5-1}=\frac{-11.2}{4}$$

四条渐近线的角度分别为±45°，±135°。

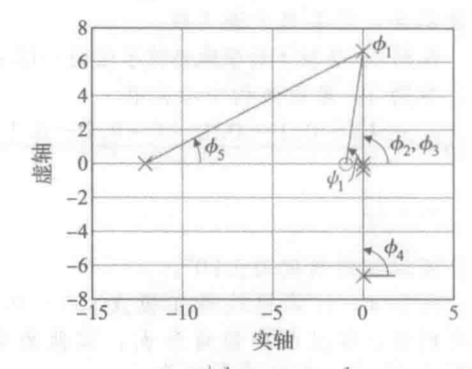


图 5.17 $L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的出射角计算示意图

规则4：我们计算极点在 $s=-0.1+j6.6$ 处的出射角。定义此极点的出射角为 ϕ_1，其他的角度标注于图5.17中。根轨迹条件为

$$\phi_1=\psi_1-(\phi_2+\phi_3+\phi4+\phi_5)-180°$$

$$\begin{aligned}\phi_1&=\arctan(6.6)-\left[90°+90°+90°+\arctan\left(\frac{6.6}{12}\right)\right]-180°\\ \phi_1&=81.4°-90°-90°-90°-28.8°-180°\\ \phi_1&=81.4°-90°-28.8°-360°\\ \phi_1&=-37.4°\end{aligned} \tag{5.69}$$

这种情况下，根轨迹自右下方离开极点，朝向不稳定区域。可以推断，随着增益的增加，系统很快变得不稳定。

规则5：用如下命令绘制出的根轨迹如图5.18所示，

```
s = tf('s');
sysG = 1/((s^2)*((s + 0.1)^2 + (6.6)^2));
sysD = (s + 1)/(s + 12);
sysL = sysD*sysG;
rlocfind(sysL)
```

261～262

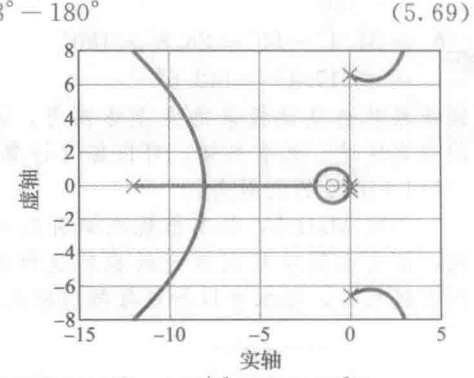


图 5.18 $L(s)=\frac{s+1}{s+12}\frac{1}{s^2[(s+0.1)^2+6.6^2]}$ 的根轨迹

与我们之前的计算相符。利用 rltool 工具可以看到，只要增益稍稍增加，从复极点出发的根轨迹几乎马上进入右半平面。另外，通过选择根位置，它们都可位于虚轴左侧，可发现原点下方的主导慢极点具有极低的阻尼比。因此，系统的响应阻尼比很小，响应中含有剧烈振荡的柔性模态。此例中选择的超前补偿控制器是不能接受的。◀

具有多重复根的根轨迹

我们已经见过分离点与汇合点位于实轴上的情形。当然，四阶或更高阶的方程可能含有多重复根。尽管很少见，我们仍用如下例子说明这种有趣的情况。

例 5.10 具有多重复根的根轨迹

绘制 $1+KL(s)=0$ 的根轨迹，其中：

$$L(s)=\frac{1}{s(s+2)[(s+1)^2+4]}$$

解答。

规则 1：共有四条根轨迹分支，分别趋于四条渐近线。

规则 2：实轴上的根轨迹位于 $-2\leqslant s\leqslant 0$。

规则 3：渐近线的中心点位于

$$\alpha=\frac{-2-1-1-0+0}{4-0}=-1$$

角度为 $\phi_l=45°, 135°, -45°, -135°$。

规则 4：根据图 5.19 所示，极点在 $s=-1+2j$ 处的出射角 ϕ_{dep} 为

$$\begin{aligned}\phi_{dep}&=\phi_3=-\phi_1-\phi_2-\phi_4+180°\\&=-\arctan\left(\frac{2}{-1}\right)-\arctan\left(\frac{2}{1}\right)-90°+180°-116.6°-63.4°-90°+180°\\&=-90°\end{aligned}$$

263

我们马上会发现，沿着线 $s=-1+j\omega$，ϕ_2 和 ϕ_1 是等腰三角形的内角和外角，且加起来总是 180°。因此，在这种特定情况下，两个复极点之间的连线是根轨迹。

规则 5：利用 Matlab，可知 $s=-1\pm1.22j$ 是重根点，根轨迹的分支在 $-1\pm1.22j$ 汇合(见图 5.20)。利用规则 5，我们可以验证根轨迹的分离角为 0°和 180°正如 Matlab 所绘制的那样。◀

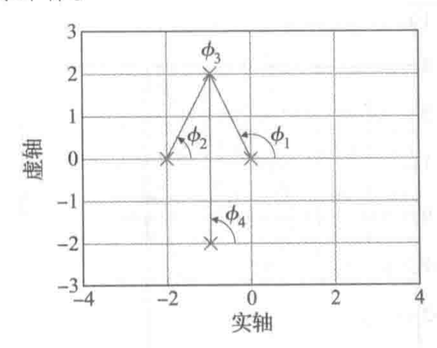


图 5.19 $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)[(s+1)^2+4]}$ 的出射角计算示意图

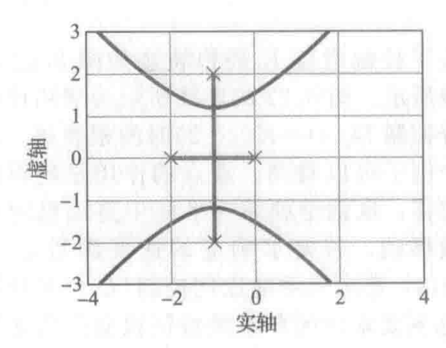


图 5.20 $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)[(s+1)^2+4]}$ 的根轨迹

本例中的根轨迹是两种类型根轨迹的过渡：一类是复极点位于本例中复极点位置的左侧，趋于±135°的渐近线，一类是复极点位于本例中复极点位置的右侧，趋于±45°的渐近线。

5.4 动态补偿设计

264

系统控制设计的考虑起始于过程本身的设计。对于过程设计以及执行器、传感器选择

过程中潜在控制问题的初步考虑极其重要，如何强调都不为过。在早期研究中，通常过程本身是可以改变的，例如，通过在柔性对象中增加阻尼或刚性使其容易控制。只要将这些因素考虑在内，就可以开始控制器的设计了。如果被控过程的动态特性使得单纯调整比例增益不能满足设计要求，那么就需要进行动态修正和补偿。尽管可用的补偿方案非常多，其中三类被认为是比较简单有效的。这就是超前补偿、滞后补偿、超前滞后补偿[⊖]。超前补偿与 PD 控制的效果类似，主要作用是加快响应速度，缩短上升时间，减小动态超调。滞后补偿类似于 PI 控制的作用，通常用来提高系统的稳态精度。超前滞后补偿用于获得具有轻阻尼比柔性模态的系统的稳定性，正如我们在卫星姿态控制中看到的执行器和传感器单体分布的情况一样。本节将说明如何为这三种结构的控制器确定参数。超前、滞后及超前滞后补偿早期都是用模拟电子电路实现的，因此常常称为网络。然而，如今，大部分控制系统设计都采用计算机技术，因此补偿也通过软件实现。这样，我们就需要计算模拟传递函数的等价离散形式，这一部分请参考第 8 章和富兰克林(Franklin)等的著作(1998)。

对于具有如下传递函数的补偿

$$D_c(s) = K\frac{s+z}{s+p} \tag{5.70}$$

若 $z<p$，则它称为超前补偿；若 $z>p$，则称滞后补偿。补偿环节一般与被控对象串联，如图 5.21 所示。也可以放到反馈回路中，这时它对整个系统极点的作用是不变的，只是会导致(输入作用下)不同的暂态响应。

图 5.21所示系统的特征方程为

$$1 + D_c(s)G(s) = 0$$
$$1 + KL(s) = 0$$

其中：K 和 $L(s)$ 是可选的，以便能将系统方程写成根轨迹方程的形式。

265

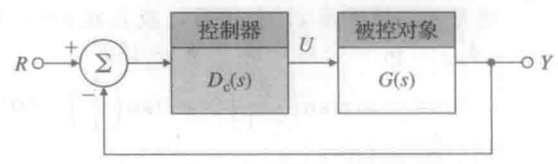


图 5.21 带有补偿的反馈系统

5.4.1 超前补偿的设计

为了说明超前补偿对系统的镇定作用，我们首先考虑比例控制器 $D_c(s)=K$。如果我们将此补偿应用于二阶的位置控制系统，被控对象的归一化(nomalized)传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

则关于控制增益 K 的根轨迹如图 5.22 的实线所示。图 5.22 的虚线所示为采用比例微分控制 $D_c(s)=K(s+2)$时的根轨迹。从这个例子可以看到，零点的作用是使根轨迹左移，也就是朝着 s 平面中更加稳定的区域移动。若要求响应的速度满足 $\omega_n \approx$ 2rad/s，那么采用纯比例控制($D_c=K$)时，ω_n 达到要求的闭环系统特征根会产生非常低的阻尼比。因此，当满足增益要求时，系统的暂态超调会非常大。而若是增加一个零点，采用 PD 控制，我们将可以把根轨迹左移，使闭环特征根位于 $\omega_n=2$rad/s 且阻尼比 $\zeta \geqslant 0.5$ 的位置。我们用$D_c(s)=$

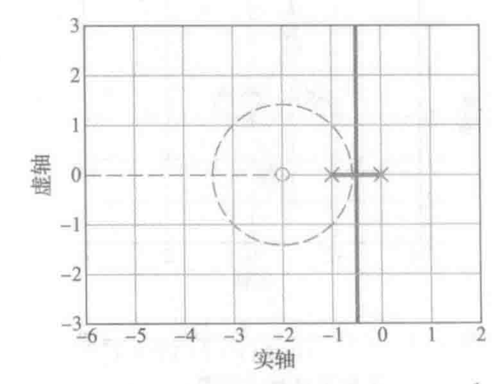


图 5.22 $1+D(s)G(s)=0$ 的根轨迹 $G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$：用 $D(s)=K$ 补偿(实线)用 $D(s)=K(s+2)$ 补偿(虚线)

⊖ 这些补偿方案的名称源于它们的频率(正弦)特性，超前补偿的输出信号相角超前于输入信号(正向相移)，滞后补偿的输出信号相角滞后于输入信号(负向相移)。超前滞后补偿的频率特性看起来像在一个水平的频率特性上开出的一个凹槽。参见第 6 章。

$K(s+2)$“补偿”了被控对象固有的动态。

正如之前所示，单纯的微分控制通常是不能应用的，它会放大传感器的噪声信号，因此只能近似实现。如果超前补偿的极点远离 ω_n 的设计范围，那么它的存在不会严重影响系统的动态响应，例如，选择超前补偿为

$$D_c(s)=K\frac{s+2}{s+p}$$

图 5.23 分别绘制了 $p=10$ 和 $p=20$ 两种情况下的根轨迹，同时也绘制了 PD 控制下系统的根轨迹。关于这些根轨迹重要的事实是，对于很小的增益，即对应的实根从 $-p$ 出发到达 -2 之前，超前补偿的根轨迹几乎和采用 $D_c(s)=K(s+2)$ 的根轨迹一样。注意，极点的作用是降低阻尼比，而对于根轨迹的起始部分，若 $p>10$，则极点影响不是很大。

通常对于特定的情况，式(5.70)中 z 和 p 的数值是通过试凑的方法确定的，经验可以减少试凑的次数。通常根据上升时间和调节时间的要求，零点位于闭环 ω_n 附近，而极点到原点的距离是零点到原点距离的 5～20 倍。极点位置的选择需要进行权衡，在抗噪声能力和补偿效果之间做折中处理。对于前者，我们希望采用较小的 p，而对于后者，则希望采用较大的 p。总之，若极点与原点靠得太近，如图 5.23 所示，补偿后的根轨迹与未补偿的根轨迹差别不大，零点几乎失去了作用。另一方面，若极点的位置过于靠左，$D_c(s)$会将传感器噪声放大很多，以至于在其输出端，控制信号 $u(t)$中的噪声能量会使电动机或其他执行器过热，这种现象的原因用频率特性更容易解释。p 的值越大，超前补偿越接近理想的 PD 控制。下面用一个简单的例子说明这种方法。

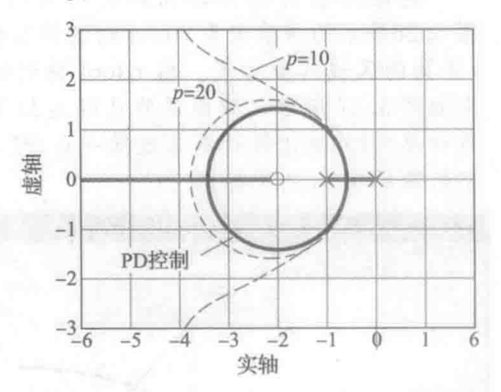


图 5.23 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$三种情况下的根轨迹

(a) $D(s)=\dfrac{(s+2)}{(s+20)}$；

(b) $D(s)=\dfrac{(s+2)}{(s+10)}$；

(c) $D(s)=s+2$(实线)

例 5.11 超前补偿设计

为对象 $G(s)=1/[s(s+1)]$设计补偿控制器，要求超调不大于 20%，上升时间不超过 0.3s。

266～267

解答。根据第 3 章的内容，我们估计阻尼比 $\zeta\geqslant 0.5$，自然频率 $\omega_n\approx\dfrac{1.8}{0.3}\text{rad/s}\approx 6\text{rad/s}$ 可以满足设计要求。为了提供一些裕度，让 $\zeta\geqslant 0.5$ 和 $\omega_n\geqslant 7\text{rad/s}$，根据图 5.23 中的根轨迹，我们首先尝试

$$D_c(s)=K\frac{s+2}{s+10}$$

图 5.24 表明，$K=70$ 对应 $\zeta=0.56$，$\omega_n=7.7\text{rad/s}$，满足最初所估计的设计目标。$K=70$ 时，对应的第三个极点位于 $s=-2.4$ 处。由于这个极点与超前零点 -2 非常接近，超调不会比二阶系统的情况增加很多。然而，图 5.25 显示系统的阶跃响应略微超过了要求值。通常，前向通道中的超前补偿会增大阶跃响应的超调，因为零点补偿具有微分作用，正如第 3 章所讨论的。上升时间指标已经满足，因为幅值从 0.1 上升到 0.9 的时间少于 0.3s。

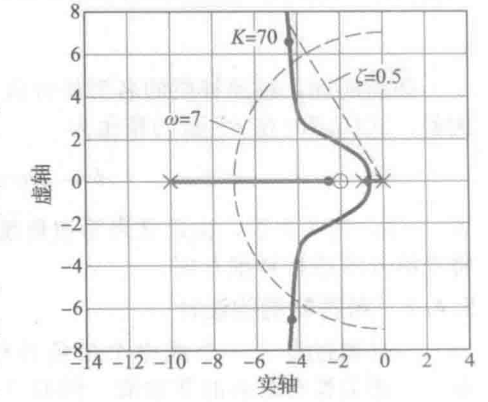


图 5.24 超前设计的根轨迹

我们希望通过调整补偿器来获得更好的阻尼比，从而减小暂态响应的超调。有效的方法就是利用 rltool，其语句如下。

```
s = tf('s');
sysG=1/(s*(s + 1));
sysD=(s + 2)/(s + 10);
rltool(sysG,sysD)
```

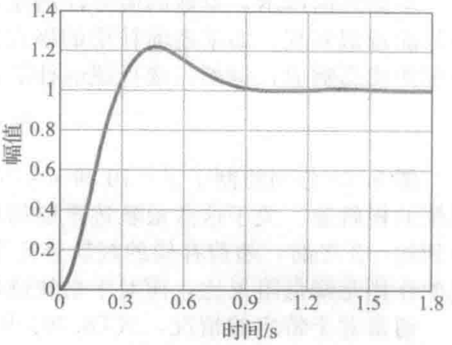


图 5.25 例 5.11 的阶跃响应

通过进一步向左移动超前补偿的极点，向左拖动根轨迹并选择 $K=91$，我们得到

$$D_c(s)=91\,\frac{(s+2)}{(s+13)}$$

这比之前的设计迭代具有更大的阻尼比。图 5.26显示的根轨迹为 rltool 绘制的根轨迹以及 s 平面的区域的叠加图。由 rltool 得到的暂态响应如图 5.27 所示，该图说明已经达到了超调的设计要求(其实比设计要求还低一点)即 $M_p=17\%$，上升时间比之前的设计要差一些，但仍然满足 0.3s 的指标。

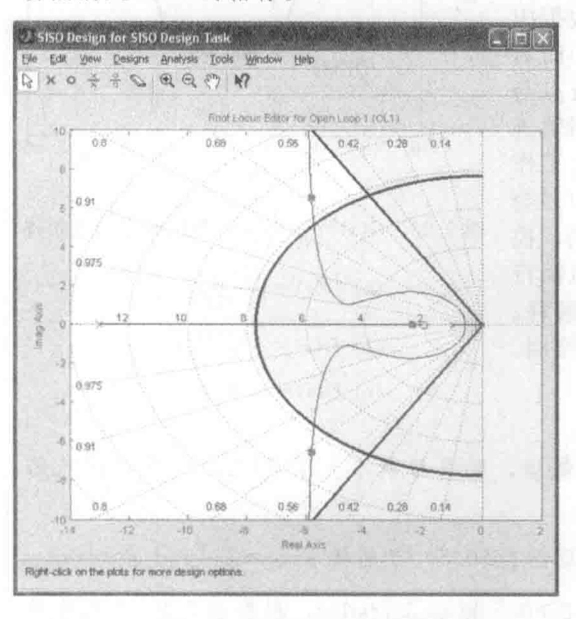


图 5.26 利用 rltool 调节动态超前补偿的示例

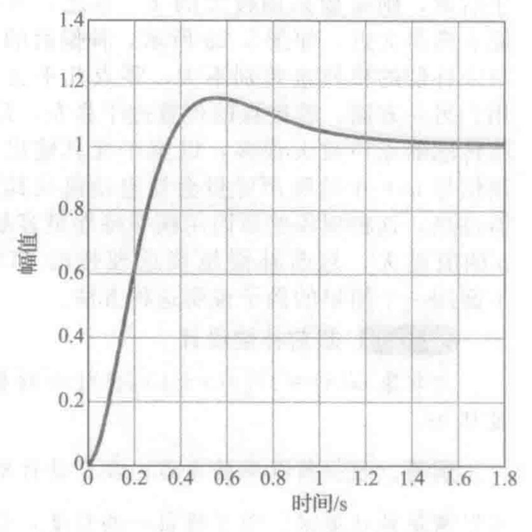


图 5.27 $K=91$，$L(s)=\dfrac{(s+2)}{(s+13)}\dfrac{1}{s(s+1)}$ 的阶跃响应 ◀

如前所述，超前补偿的名字是对该类传递函数使正弦信号相位超前这一事实的反映。例如，式(5.70)在 $s=\mathrm{j}\omega$ 的相角为

$$\phi=\arctan\left(\frac{\omega}{z}\right)-\arctan\left(\frac{\omega}{p}\right) \tag{5.71}$$

若 $z<p$，则 ϕ 为正，由定义表明相角超前。关于如何利用超前补偿装置的相角进行设计，将在第 6 章进行详细介绍。

5.4.2 滞后补偿的设计

一旦通过设计一个或多个超前补偿获得了满意的动态响应，我们可能发现低频增益——相关稳态误差的常数值，例如 K_v——仍太低了。正如第 4 章所讲，系统类型取决于其传递函数 $D_c(s)G(s)$ 位于 $s=0$ 点的极点阶数，系统类型决定了系统所能够跟踪的多项

式。如果系统为 1 型的，则速度误差常数由 $\lim_{s\to 0} sD_c(s)G(s)$ 求得，此速度误差常数决定了系统跟踪斜坡信号时的静态误差幅值。为了增加误差常数，一定要注意不能破坏已设计好的动态响应。因此，我们希望能有这样一个控制器 $D_c(s)$，它在 $s=0$ 具有有效的增益以增加系统的 K_v(或者其他的稳态误差常数)，而在决定动态响应特性的较高的频率段 ω_n 附近近似为单位值(不产生影响)，结果为

268～270

$$D_c(s)=\frac{s+z}{s+p},\quad z>p \tag{5.72}$$

其中：z 和 p 的值相对于 ω_n 而言非常小，并且 $D_c(0)=z/p=3$ 到 10(这个比值取决于稳态增益需要放大的倍数)。由于 $z>p$，式(5.71)所计算的相角 ϕ 是负的，对应相位的滞后。因此，以这种传递函数描述的装置叫做滞后补偿。

滞后补偿对动态响应的作用可以通过分析相应的根轨迹来研究。我们仍采用 $G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$ 加以说明，其中超前补偿 $KD_{c1}(s)=\frac{K(s+2)}{(s+13)}$ 的根轨迹如图 5.26 所示，并选择之前例子中的增益 $K=91$，可以得到对应的速度常数为

$$\begin{aligned}K_v &= \lim_{s\to 0} sKD_{c1}G\\ &= \lim_{s\to 0} s\times 91\times\frac{s+2}{s+13}\,\frac{1}{s(s+1)}\\ &= \frac{91\times 2}{13}=14\end{aligned}$$

假设为了将速度误差减小到原值的 $\frac{1}{5}$，我们要求 $K_v=70\mathrm{s}^{-1}$。为达到这个目的，我们要用一个 $z/p=5$ 的滞后补偿将速度常数增加 5 倍。可以将极点选在 $p=-0.01$，零点选在 $z=-0.05$，在 $\omega_n=7\mathrm{rad/s}$ 附近的根轨迹代表主导动态，z 和 p 的值都选得很小，就是为了减小 $D_{c2}(s)$ 对这部分根轨迹的影响。结果是滞后补偿的传递函数为 $D_{c2}(s)=\frac{(s+0.05)}{(s+0.01)}$。同时采用了超前补偿和滞后补偿的根轨迹如图 5.28 所示，可见在左方大部分的根轨迹与图 5.26 所示的没有显著区别。这是因为所选择的零极点都非常小。当 $K=91$ 时，系统的主导极点位于 $-5.8\pm j6.5$。滞后补偿的作用在图 5.28 右侧的原点放大图中可以看到，小的零极点在原点附近形成了圆形的根轨迹。一个闭环极点与 $-0.05+0j$ 处的滞后补偿零点非常接近，因此，与此极点对应的暂态响应是一个慢衰减项，其幅值很小，因为传递函数中的零点几乎将此极点对消了。不过，这个慢衰减项还是会严重影响过渡过程的时间，并且在相对于扰动转矩的阶跃响应中，由于零点不会起抵消作用，此慢衰减项的影响更加明显。考虑到这种影响，我们应该在避免主导极点位置的大幅漂移的前提下，尽可能地把零极点配置在高频段。

5.4.3　超前滞后补偿的设计

假设设计好的超前滞后补偿为

$$KD_c(s)=91\,\frac{s+2}{s+13}\,\frac{s+0.05}{s+0.01} \tag{5.73}$$

测试发现它在频率约为 50rad/s 处会发生固有振荡。这是因为自然振荡频率为 $\omega_n=50\mathrm{rad/s}$ 处，有个未知的单体柔性结构。重新进行实验，考虑含有柔性影响的传递函数，估计为

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+1)(s^2+s+2500)} \tag{5.74}$$

一位机械工程师声称是一些溢出到轻阻尼比柔性模态中的能量激发了柔性部件的振荡。换句话说，正如图 5.18 所示根轨迹对应的类似系统那样，反馈使得 50rad/s 处的轻阻尼比根更小甚至可能不稳定。解决这一问题的最好方法是修正系统结构，从而增加机械阻尼比。

但是，这通常是不可能，因为在设计后期才会发现此问题，已经来不及调整结构了。如果这样不行，怎样才能减小振荡呢？至少有两种方法，一种是增加滞后补偿使回路增益足够低，大幅减小能量溢出，避免振荡。减小高频增益的方法叫做增益镇定。如果增益镇定导致响应时间过长，另一种方式是在共振频率点附近增加一个零点，改变共振极点的出射角，使闭环特征根移动到左半平面，从而使联合暂态逐渐消失。这种方法叫做相位镇定。这与之前描述的合体柔性的运动控制类似。在第6章中，从对频率特性的影响角度，更为详细地解释了增益镇定和相位镇定的作用。就相位镇定而言，这种结果叫做超前滞后补偿，下面一个例子的传递函数为

$$D_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2}{(s+\omega_o)^2} \tag{5.75}$$

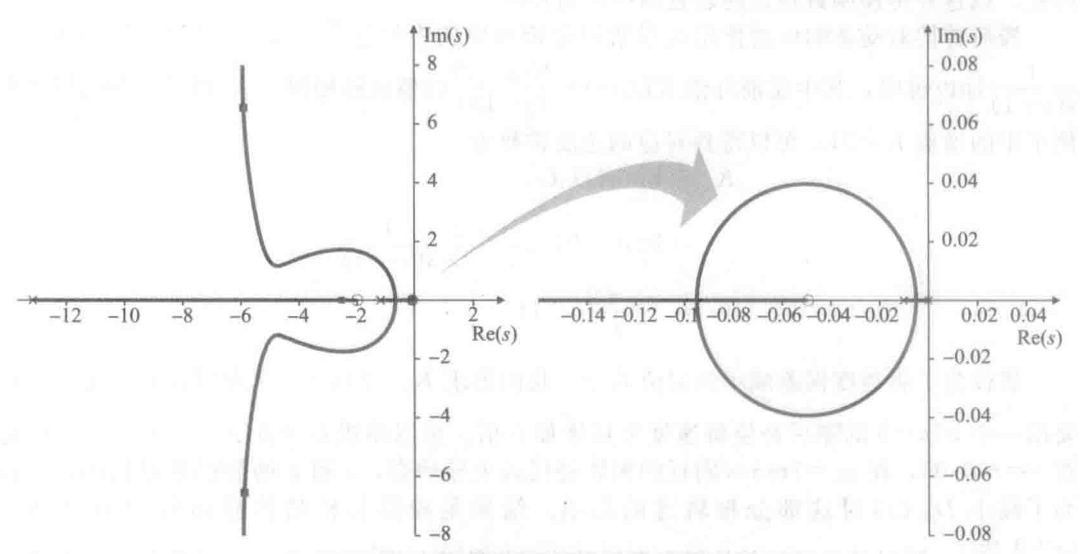


图 5.28　具有超前和滞后补偿的根轨迹

为了获得需要的相位，一个必要的设计决定是将补偿频率设置得高于自然共振频率还是低于自然共振频率。根据出射角的相关知识，采用式(5.73)及给定的补偿频率对系统进行补偿，为了使出射角朝向左半平面，需要将补偿频率设置在高于共振频率的位置。如此，补偿器的传递函数形式为

$$D_{\text{notch}}(s) = \frac{s^2 + 0.8s + 3600}{(s+60)^2}, \tag{5.76}$$

补偿环节在 $s=0$ 处增益为1，这样可以保证 K_v 不变。补偿后的根轨迹如图5.29所示，其阶跃响应如图5.30所示。从阶跃响应可见，振荡被成功抑制了，上升时间的指标要求依然满足，但是超调增大。为了改善增加的超调使其满足要求，需要重复设计过程，在 $\omega_n = 7\text{rad/s}$ 附近给快速特征根提供更大的阻尼比。

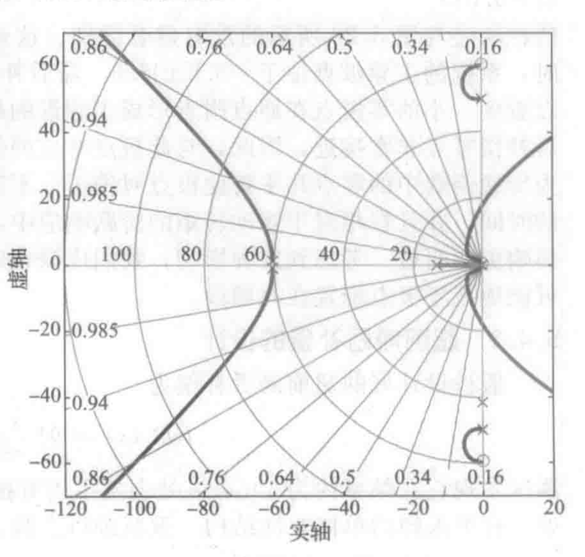


图 5.29　采用超前补偿、滞后补偿和超前滞后补偿的根轨迹

271~273

超前滞后补偿与相位镇定方法主要是在共振频率处保持恰当的相位。就像大多数的情

况下，如果这个频率变化很大，则补偿频率需要离额定频率足够远，以适应大部分的工作条件。这对超前滞后的动态补偿作用是个干扰，会使补偿后的系统动态性能大大降低。一般来说，增益镇定对被控对象变化的鲁棒性要强于相位镇定的鲁棒性。

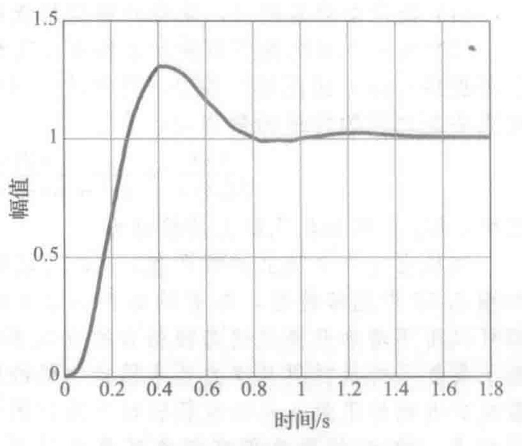


图 5.30　采用超前补偿、滞后补偿和超前滞后补偿的阶跃响应

△5.4.4　模拟和数字补偿实现(W)

补偿的物理实现方式多种多样。大部分补偿可以按 2.2 节中的方法用模拟电路实现。然而，如今更多地采用数字装置实现补偿。

作为模拟实现的一个例子，图 5.31 给出了采用运算放大器实现超前补偿的电路图。通过第 2 章的方法可得图 5.31 所示电路的传递函数为

$$D_{\text{lead}}(s)=-a\frac{s+z}{s+p} \qquad (5.77)$$

其中：

$$a=\frac{p}{z},\quad R_f=R_1+R_2$$

$$z=\frac{1}{R_1C}$$

$$p=\frac{R_1+R_2}{R_2}\cdot\frac{1}{R_1C}$$

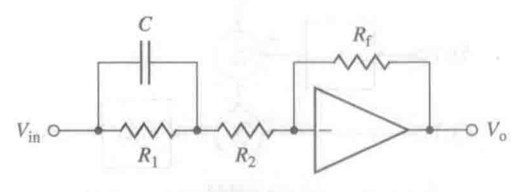


图 5.31　超前滞后补偿的可行电路

超前补偿的数字实现及其与模拟实现的对比在 www.fpe7e.com 附录 W5.4.4 中的一小节加以介绍。

5.5　应用根轨迹设计示例

例 5.12　小型飞机控制

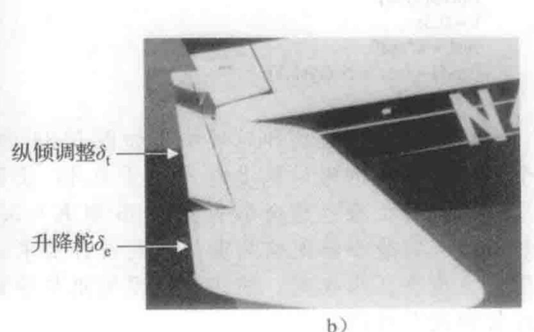
图 5.32 所示的 Piper Dakota 飞机中，升降舵输入和俯仰姿态之间的传递函数为

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}=\frac{160(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)} \qquad (5.78)$$

其中：θ 为俯仰姿态，以度为单位(参见图 10.30)；δ_e 为升降舵角，以度为单位。



a)



b)

图 5.32　Piper Dakota 的自动驾驶仪升降舵和纵倾调整片示例
(图片来源：Denise Freeman)

更多关于飞行纵向移动的详细描述参见10.3节。

(1) 设计自动驾驶仪，使得升降舵阶跃输入时，上升时间不超过1s，超调小于10%。

(2) 当一个固定的常值扰动力作用于飞机时，驾驶仪必须在保持平稳飞行的控制力之上再提供一部分固定的补偿力，这种状态叫做失衡。扰动量到姿态之间的传递函数与升降舵到姿态之间的传递函数相同，为

$$\frac{\theta(s)}{M_d(s)}=\frac{160(s+2.5)(s+0.7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0.03s+0.06)} \tag{5.79}$$

其中：M_d 为施加到飞机上的扰动力。

飞机上有一个独立的微调舵，δ_t，可以进行转动，用来改变作用在飞机上的力矩，正如图5.32中尾部特写，其影响如图5.33a的框图所示。不论是手动控制还是自动控制，都可以用不增加升降舵稳态控制力的方式实现平飞(也就是 $\delta_e=0$)。手动飞行中，这意味着不需要飞行员提供补偿力矩来保持飞机的固定飞行高度，而在自动驾驶控制中，这意味着减少电能的用量，从而减轻驱动升降舵的伺服电动机的磨损。设计自动驾驶仪来控制微调舵 δ_t，使 δ_e 的稳态值在任意常量扰动力 M_d 下都为零，并且满足(1)部分提出的性能指标。

274~275

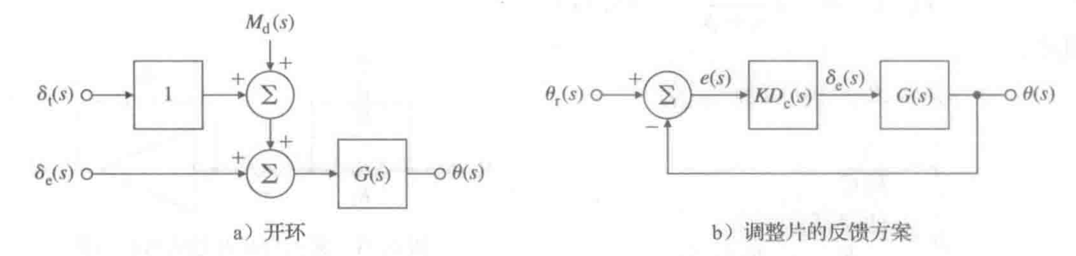


图5.33 自动驾驶仪设计框图

解答。(1) 为了满足上升时间 $t_r\leqslant 1$s，对一个理想的二阶系统，式(3.60)指出 ω_n 要大于1.8rad/s。同样，对于二阶系统，图3.23表明为了使超调不超过10%，ζ 要大于0.6。在设计过程中，我们以反馈补偿的根轨迹为例，在特征根满足设计要求时，研究对应的时域响应。然而，这里所研究的是个四阶系统，这些设计要求可能不够充分，或者过于苛刻。

在开始设计之前，研究一下比例反馈系统的特性是很有帮助的，也就是说在图5.33b中 $D_c(s)=1$。用Matlab绘制参数 K 的根轨迹和 $K=0.3$ 的时域响应，命令如下。

```
s = tf('s');
sysG = (160*(s + 2.5)*(s + 0.7))/((s^2 + 5*s + 40)*(s^2 + 0.03*s +
    0.06));
rlocus(sysG)
K = 0.3;
sysL = K*sysG;
[sysT] = feedback (sysL,1);
step(sysT)
```

所得到的根轨迹和时域响应如图5.34和图5.35中的虚线所示。注意到图5.34中两个快速特征根的阻尼比 ζ 总是小于0.4，正因为如此，比例反馈是不能达到满意效果的。同时，慢特征根也总会影响图5.35中 $K=0.3$ 的时域响应曲线(虚线)，使调节时间过长。然而，补偿是否能使响应曲线满足设计要求，主要取决于曲线最初几秒钟的形态，这些形态由快速特征根决定。快速特征根低阻尼导致了时域响应的振荡，从而导致过高的超调和过长的调节时间。

由5.4.1小节的分析可知，超前补偿能使根轨迹左移，可以满足这里增加阻尼比的要求。通过一些尝试可以确定补偿装置中极点零点的位置。将式(5.70)中的参数值取为 $z=3$

和 $p=20$，能够将根轨迹中快速的分支显著左移，因此有

$$D_c(s)=\frac{s+3}{s+20}$$

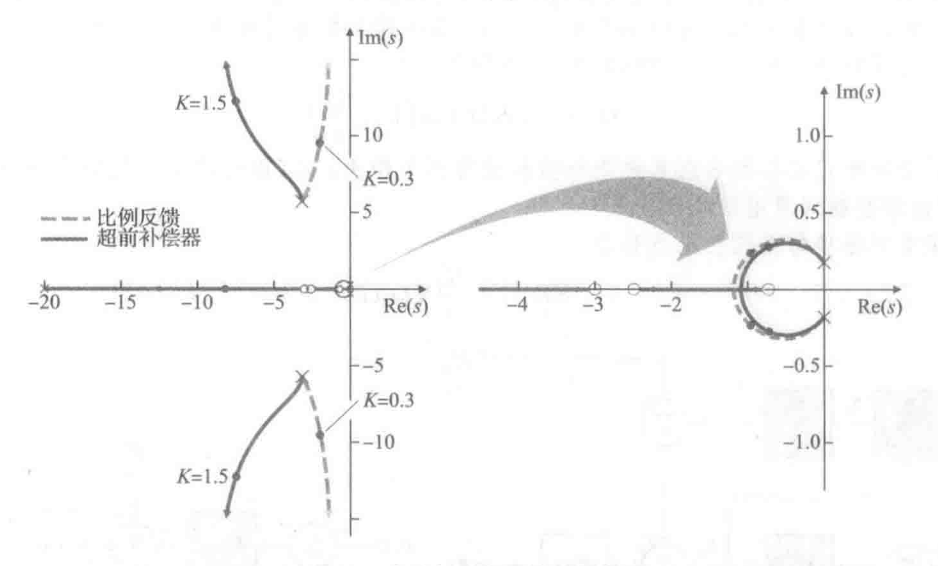


图 5.34　自动驾驶仪设计的根轨迹

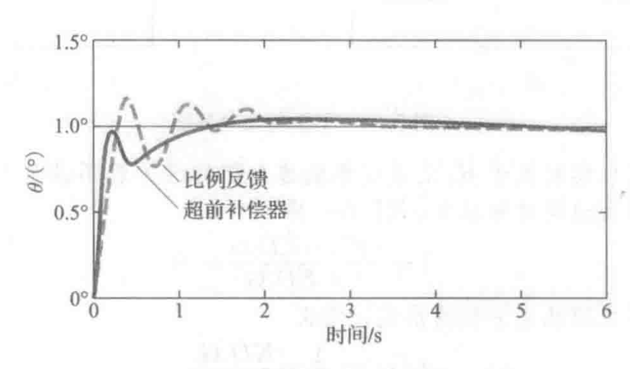


图 5.35　自动驾驶仪设计的时间响应图

通过试凑得到满足设计要求的 K 值。添加了上述补偿的 Matlab 语句如下。

```
sysD = (s + 3)/(s + 20);
sysDG = sysD*sysG;
rlocus(sysDG)
K = 1.5;
sysKDG = K*sysDG;
sysT = feedback(sysKDG,1);
step(sysT)
```

这种情况下的根轨迹和时域响应同样用实线绘制在图 5.34 和图 5.35 中。注意，$K=1.5$ 对应的快速根的阻尼比为 $\zeta=0.52$，比我们希望的要稍微低一点；同样，自然频率为 $\omega_n=15\text{rad/s}$ 比我们希望的还要快很多。这些值已经非常接近设计目标，可以验证一下时域响应。事实上，时域响应曲线显示 $t_r\approx0.9$ 和 $M_p\approx8\%$，都满足设计指标，虽然裕量很小。

276 ~ 278

总之，主要的设计过程包括调整补偿来影响快速根，检验其对时域响应的影响，重复设计步骤直到满足时域指标要求。

(2) 调整舵的目的是提供一个力矩来消除升降舵稳态时的非零输入。因此，如果我们

对升降舵命令 δ_e 积分并将积分结果作为调整装置的输入，则调整舵将最终提供飞机停在任意高度的力矩，从而使稳态下 δ_e 的值为零。这种思想可用图 5.36a 来说明。如果积分项的增益 K_t 足够小，因积分作用而引起的不稳定因素的影响非常小，因为反馈闭环保持不变，系统与没有加入积分时的动态类似。图 5.36a 所示的系统框图可简化为图 5.36b 所示框图，为了便于分析，补偿中包括 PI 控制的形式为

$$D_I(s) = KD_c(s)\left(1+\frac{K_I}{s}\right)$$

然而，必须牢记实际的物理系统中补偿装置有两个输出：δ_e（由升降舵的伺服电动机产生）和 δ_t（由调整舵伺服电动机产生）。

带有积分项的系统特征方程为

$$1+KD_cG+\frac{K_I}{s}KD_cG=0$$

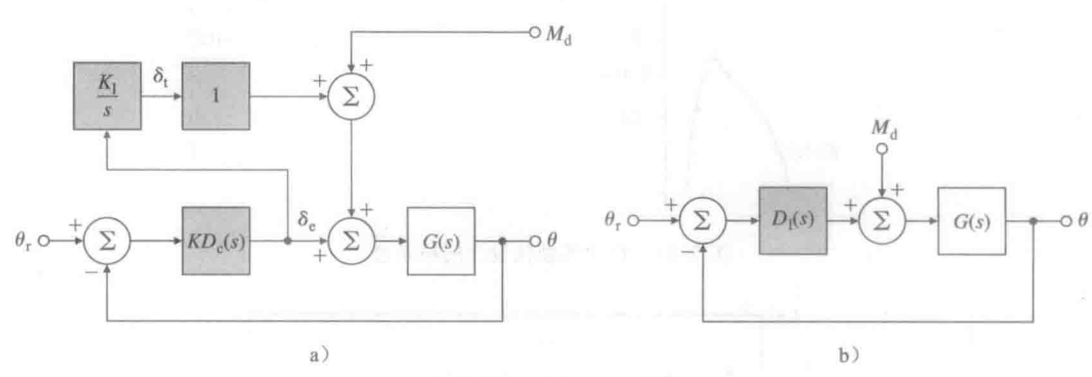


图 5.36 调整舵命令框图

为了设计方便，可以绘制关于 K_I 的系统根轨迹，但特征方程不满足式(5.6)～式(5.9)中的形式。因此方程两边同时除以 $1+KD_cG$，得

279

$$1+\frac{(K_I/s)KD_cG}{1+KD_cG}=0$$

为了将系统写成根轨迹方程的形式，定义

$$L(s)=\frac{1}{s}\frac{KD_cG}{1+KD_cG} \tag{5.80}$$

这样 K_I 为根轨迹参数。在 Matlab 中，可以用 sysT 计算 $\frac{KD_cG}{1+KD_cG}$，用 sysIn＝tf(1,[10])构造积分器，系统相对于 K_I 的闭环增益为 sysL＝sysIn * sys，关于 K_I 的根轨迹可用命令 r[tool(svsl)]画出。

由图 5.37 所示的根轨迹可以看出，快速根的阻尼比随着 K_I 的增加而减小，正好与增加积分项的效果相同。这说明了有必要使 K_I 的值尽量小。在经过一些试凑后，我们选择 $K_I=0.15$。这个值对特征根的影响很小，(注意，其实此时特征根的位置处于之前不用积分器时所得特征根位置的上方)对阶跃响应初期的形态影响很小，如图 5.38a 所示，因此性能指标仍然满足要求。$K_I=0.15$ 确实可以使姿态无静差地接近于要求值，正如我们所预期的积分控制一样。同时，它还可以使 δ_e 趋于零[图 5.38b 表明过渡过程大约为 30s]，这正是我们选择积分控制的初衷。积分到达正确值的时间可以用因引入积分项而新增加的慢实根 $s=-0.14$ 来推测。与此根对应的时间常数为 $\tau=1/0.14\text{s}\approx 7\text{s}$。用式(3.65)可推出 $\sigma=0.14$ 的根对应于阈值为的调节时间为 $t_s=33\text{s}$，与图 5.38b 所示的曲线一致。 ◀

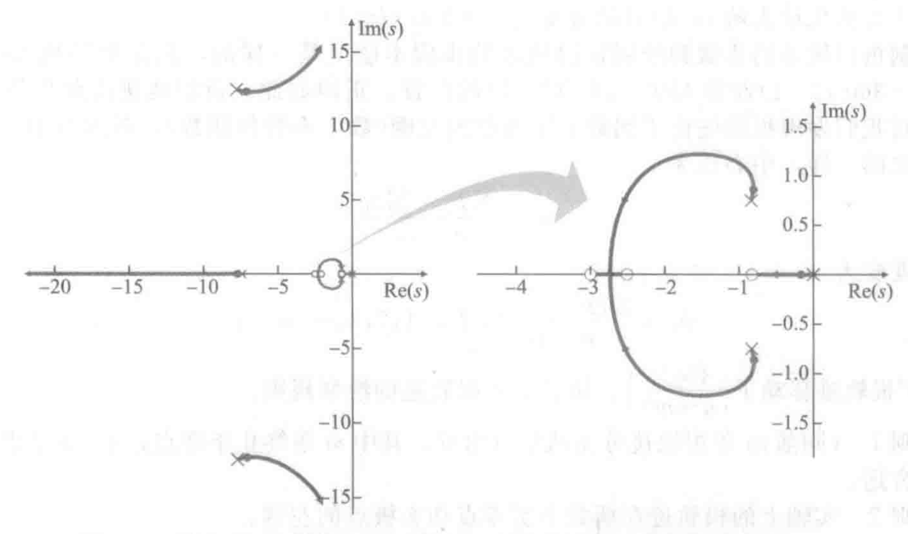


图 5.37　关于 K_1 的根轨迹：假设有一个增加的积分项和增益为 $K=1.5$ 的超前补偿；时根 $K_1=0.15$ 的位于“·”标记处

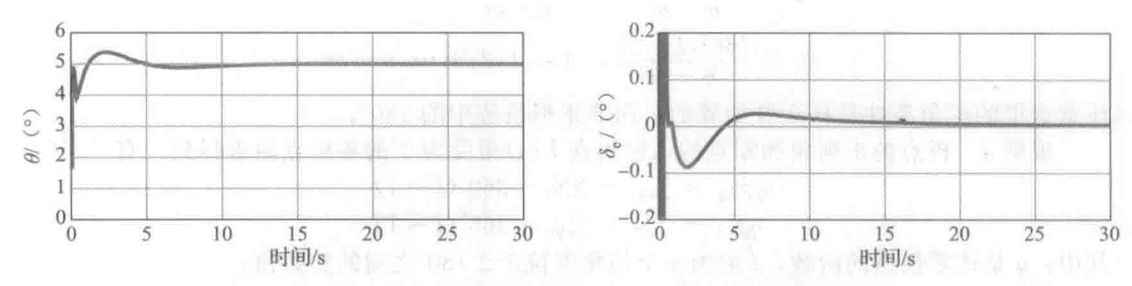


图 5.38　具有一个积分项和 5°命令的情况下的阶跃响应

5.6　根轨迹法的扩展

正如我们在此章中所述，根轨迹技术是一种图形方法，用来表示含有一个单实参数代数方程根的可能位置。根轨迹方法可以扩展，用于绘制负参数值，多个参数以及含有时滞系统的根轨迹。本节就这些可能性加以讨论。另一种有趣的扩展是将要在第 9 章中讨论的用于非线性系统的根轨迹绘制。

5.6.1　负(0°)根轨迹的绘制规则

为了进行负参数值的根轨迹分析，我们现在考虑修改根轨迹的绘制规则。在许多重要的情况下，传递函数在右半平面含有零点的被控对象称为是非最小相位的。结果通常是要绘制形如 $1+A(z_i-s)G'(s)=1+(-A)(s-z_i)G'(s)=0$ 的根轨迹，按照标准形式，参数 $K=-A$ 必须是负的。另一个重要的关于负根轨迹的理解源于控制系统的构建。在控制系统的任何物理应用中，都不可避免地要选择一系列放大器和元部件的增益符号。根据墨菲(Murphy)定律[㊀]，当首次闭环的时候，除非系统工程师知道，当本该是正的符号选成负的时，系统响应会怎样，否则系统的增益符号就会产生错误，系统的行为将是不可预期的。负根轨迹(关于负参数的根轨迹)的绘制规则又是怎样的呢？首先，式(5.6)～式(5.9)必须对负参数值 K 成立，这意味着 $L(s)$ 是正的且实的。换句话说，对于负根轨迹，相角条件为

280～281

㊀　凡是可能出错的事，都会在未来出错。

对于负根轨迹上的 s，$L(s)$的角度是 $0°+360°(l-1)$。

绘制负根轨迹的步骤和绘制正根轨迹的步骤本质上是一样的，只是要寻找 $L(s)$的角度为 $0°+360°(l-1)$而非 $180°+360°(l-1)$的位置。正因如此，负根轨迹由此称作 0°根轨迹。这时我们发现根轨迹位于偶数个零极点的左侧(数字零看作偶数)。较大数值 s 的渐近线，与之前一样，中心点为

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m} \tag{5.81}$$

但是角度变为

$$\phi_l=\frac{360°(l-1)}{n-m},\ l=1,2,3,\cdots,n-m$$

$\left(\text{自 } 180°\text{根轨迹移动了}\frac{180°}{(n-m)}\right)$。如下是 0°根轨迹的绘制规则。

规则 1 (同前)n 条根轨迹分支从极点出发，其中 m 条终止于零点，$n-m$ 条沿渐近线趋于无穷远。

规则 2 实轴上的根轨迹在偶数个实零点和实极点的左侧。

规则 3 渐近线表述为

$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{-a_1+b_1}{n-m}$$

$$\phi_l=\frac{360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,3,\cdots,n-m$$

282 注意这里的相角条件是从 0°开始算的，而非正根轨迹中的 180°。

规则 4 极点的出射角和零点的入射角在 $L(s)$角度为 0°的零极点附近得到，有

$$q\phi_{\text{dep}}=\sum\psi_i-\sum\phi_i-360°(l-1)$$

$$q\psi_{\text{arr}}=\sum\phi_i-\sum\psi_i+360°(l-1)$$

其中：q 是该零极点的阶数，l 取为 q 个使角度位于$\pm180°$之间的整数值。

规则 5 根轨迹上可能有多重根，在 q 重根处，各个进入该点的根轨迹分支夹角为

$$\frac{180°+360°(l-1)}{q}$$

且根轨迹分支以同样的夹角离开此点。

扩展根轨迹的绘制规则使其能够绘制负参数根轨迹的结果，我们可以视根轨迹为一系列连续曲线，它们显示了方程 $1+KL(s)=0$ 对于所有的实数值 K 的解的可能位置，包括正值与负值。对应于正值 K，一个分支从每个极点都向某方向离开，对应于负值 K，另一个分支从同一极点向反方向离开。类似地，所有零点都有两条终止于它的根轨迹，一条对应正 K 的值，另一条对应负 K 的值。对多余的 $n-m$ 个极点，会有 $2(n-m)$条根轨迹的分支起始于此，并分别随着 K 趋于正向和负向无穷大，而趋于无穷远处。对于单个的零极点，两条根轨迹分支的出射角或入射角的夹角为 180°。对于二重极点和零点，两条正根轨迹分支的夹角为 180°，两条负根轨迹分支与正向分支的夹角为 90°。

负根轨迹常用于研究非最小相位传递函数。著名的例子是蒸汽动力装置中的锅炉液位控制。如果液位太低，执行阀会向容腔内注入(相对较冷的)冷水。开始的作用是降低沸腾的速度，也就是降低了气泡的数量和体积，从而导致液位急速下降，随后在增加液体体积和热量的作用下，液位重新回升而达到新的水平。最初的液位下降是典型的非最小相位系统。另一个非最小相位传递函数是飞机的高度控制。为了使飞机爬升，升降舵的上偏会先导致飞机下坠，然后才旋转爬升。波音 747 在这个模式下的标准化传递函数为

$$G(s)=\frac{6-s}{s(s^2+4s+13)} \tag{5.82}$$

为了将 $1+KG(s)$写成根轨迹方程的形式，我们将它乘以-1，得到

$$G(s)=-\frac{s-6}{s(s^2+4s+13)} \tag{5.83}$$

283

例 5.13 飞机的负根轨迹

绘制如下方程的负根轨迹：

$$1+K\frac{s-6}{s(s^2+4s+13)}=0 \tag{5.84}$$

解答。

规则 1 共有三条根轨迹分支和两条渐近线。

规则 2 实轴上的根轨迹是 $s=6$ 的右侧部分和 $s=0$ 的左侧部分。

规则 3 渐近线的角度是 $\phi_l=\frac{(l-1)360^\circ}{2}=0^\circ$，$180^\circ$ 渐近线的中心在 $\alpha=\frac{-2-2-(6)}{3-1}=-5$。

规则 4 始于极点 $s=-2+\mathrm{j}3$ 根轨迹的出射角为

$\phi=\arctan\left(\frac{3}{-8}\right)-\arctan\left(\frac{3}{-2}\right)-90^\circ+360^\circ(l-1)$

$\phi=159.4^\circ-123.7^\circ-90^\circ+360^\circ(l-1)$

$\phi=-54.3^\circ$

用 Matlab 绘制的根轨迹如图 5.39 所示，与绘制规则所得的结果一致。 ◀

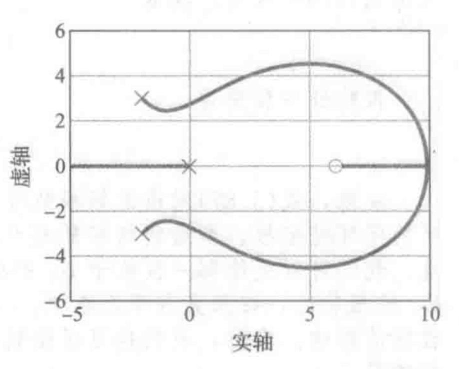


图 5.39 $L(s)=(s-6)/s(s^2+4s+13)$ 的负根轨迹

△5.6.2 考虑双参数

实际控制中的一个重要技术就是考虑双闭环结构，内环包含执行器或被控过程动态的一部分，外环包含整个被控对象和内部控制器。这种方法称为双回路。选择内部回路的控制器来获得内部回路的鲁棒性以及较好响应特性，这使得外部回路的设计比无辅助内环时更加简单有效。一个简单的例子可以说明如何用根轨迹分析这样的双参数系统。

284

例 5.14 先后使用两个参数绘制根轨迹

一类普遍的伺服机构的结构框图如图 5.40 所示。这里速度测量装置（转速计）是可用的，需要用根轨迹来指导选择转速计的增益 K_T 和放大器的增益 K_A。图 5.40 所示系统的特征方程为

$$1+\frac{K_A}{s(s+1)}+\frac{K_T}{s+1}=0$$

图 5.40 具有转速反馈的伺服系统框图

这不满足 $1+KL(s)$ 的标准形式。经过分式化简，特征方程变为

$$s^2+s+K_A+K_Ts=0 \tag{5.85}$$

这是个双参数方程，而根轨迹法每次只能考虑一个参数。这种情况下，我们将增益 K_A 取为标称值 4，先考虑关于 K_T 的根轨迹，当 $K_A=4$，式(5.85)可以写成根轨迹的形式对 K_T 进行根轨迹分析，其中：$L(s)=\frac{s}{s^2+s+4}$

或者

$$1+K_{\mathrm{T}}\frac{s}{s^{2}+s+4}=0 \tag{5.86}$$

对于这个根轨迹，零点位于 $s=0$，极点为方程 $s^2+s+4=0$ 的根，即在 $s=-\frac{1}{2}\pm1.94\mathrm{j}$ 处。应用之前的根轨迹绘制规则得到如图 5.41 所示的根轨迹。

根据根轨迹图，我们可以选择 K_{T}，使复根具有特定的阻尼比或选择其他能使特征方程出现令人满意的根的 K_{T} 值。考虑 $K_{\mathrm{T}}=1$。选定 K_{T} 的测试值后，我们可以改变方程的形式来分析使 $K_{\mathrm{A}}=4$ 变为 $K_{\mathrm{A}}=4+K_1$ 的影响，其中 K_1 为新引入的变量。关于 K_1 的根轨迹由式(5.50)决定，现取

$$L(s)=\frac{1}{s^{2}+2s+4}$$

根轨迹方程变为

$$1+K_{1}\frac{1}{s^{2}+2s+4}=0 \tag{5.87}$$

285 注意，式(5.87)对应的新根轨迹的极点就在之前的关于 K_{T} 的根轨迹上，就是 $K_{\mathrm{T}}=1$ 时的闭环特征根。所绘制的根轨迹如图 5.42 所示，图中的虚线就是之前关于 K_{T} 的根轨迹。我们可以先绘制一段关于 K_1 的根轨迹，然后停下来，改变方程形式，接着绘制关于 K_{T} 的根轨迹，按照某种规则在 K_1 和 K_{T} 之间反复变化，用根轨迹研究两个参数对特征方程根的影响。当然，我们也可以绘制关于 K_1 的负值根轨迹，因此要研究 K_{A} 的取值小于 4 的情况。◀

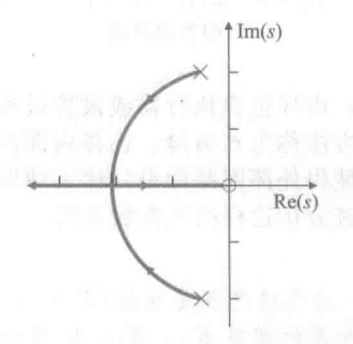


图 5.41 图 5.40 中闭环系统极点相对于 K_{T} 的根轨迹

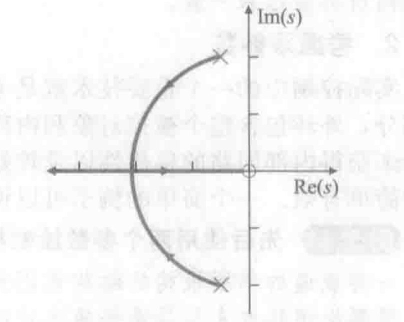


图 5.42 在选择 $K_{\mathrm{T}}=1$ 后，关于 $K_1=K_{\mathrm{A}}+4$ 的根轨迹[⊖]

△5.6.3 时滞

时滞经常出现在控制系统中，它既有可能来自于过程本身的延迟，也有可能来自于测量信号过程的延迟。化学对象的过程经常包含时滞，它是表示原料通过管道或其他装置传输所需的时间。在测量火星探测器姿态时，由于光速的原因，测量信号返回到地球的过程中会有明显的时间滞后。时滞总是会降低系统稳定性，因此分析它的影响非常重要。利用帕德(Padé)近似，用有理函数来近似时滞的作用，以便我们分析它对系统稳定性的影响。286 这种方法在 www.fpe7e.com 的附录 W5.6.3 中进行了描述。时滞的作用也可以用第 6 章的频率特性法分析。利用频率特性法，可以准确且简单地表明时滞的影响。图 6.80 清楚地显示了时滞对稳定性的影响。

5.7 历史展望

第 1 章回顾了反馈控制分析和设计方法的早期发展结果，包括频率特性法和根轨迹设

⊖ 原书中图 5.42 中根轨迹有误，与图题中描述不符。

计。根轨迹设计是在 1948 年由埃文斯提出，他在北美航空公司的自动化分部(现为波音公司的一部分)从事飞行器和导弹的导航控制研究。他面对的许多问题涉及不稳定和中立稳定动态，使得频域分析方法难以应用，因此他建议返回到对系统特征方程的研究，这正是 70 年前麦克斯韦和劳斯的工作基础。然而，埃文斯并没有研究代数方程问题，而是将它转换为复平面的图形问题。同时，埃文斯也非常关注宇航飞行器的动态响应特性，因此他想求得闭环特征根以理解系统的动态行为。为了有助于理解，埃文斯建立了一些技术和规则，使人们可以观察到当某个参数变化时特征方程根的图形轨迹。他的方法既适合于系统设计又适合用来做系统分析，至今仍是一种重要的技术手段。起初，在没有计算机帮助的情况下，这种方法使得设计工作者可以进行手工求解，而时至今日，根轨迹方法仍然是设计过程中一种重要的辅助工具。正如我们从此章中学到的，埃文斯方法是通过计算一点到其他零极点的角度之和是否为某常值来判断该点是否属于根轨迹的。为了方便这一判断过程，埃文斯发明了“螺旋线尺”，用来快速测量角度并对其进行加减。对于相当复杂的设计问题，一位熟练的控制工程师能够在几秒钟内判别相角条件是否满足。另外，为了用与计算尺类似的方式确定根轨迹上某点对应的增益，装置上的对数螺线可帮助工程师将根轨迹上点到零极点的距离乘起来。

很明显，埃文斯要帮助他们的系统设计和分析工程师。在 20 世纪 40 年代到 20 世纪 50 年代之间，计算机在设计中并没有普及。在 20 世纪 50 年代，企业只是开始将大型计算机应用于大数据计算。直到 1960 年，计算机才应用到工程计划的分析和设计中。在 20 世纪 60 年代，计算机的工程应用已经十分普遍，但这一过程需要通过许多穿孔卡向大型计算机提交任务，结果往往要等数个小时甚至整夜，这对任何的设计周期而言都太冗长了。那个时代的计算机只是从真空管进化到了晶体管，随机存储器只有大概 32KB 容量(!)，长期数据通过磁带驱动设备存储于磁带中。随机存取磁鼓和磁盘在那个年代问世，因而大大加快了数据的存储速度。直到 20 世纪 60 年代末和 20 世纪 70 年代初期，基于穿孔卡的批处理被多个远程终端用户的分时处理取代，计算机在工程中的应用得到了长足发展。在 20 世纪 40 年代、50 年代和 60 年代，也有用于加、减、乘、除的机械计算器，在 20 世纪 60 年代初，需花 1500 美元购买。特别高端的设备(3000 美元)还能求平方根。这些机械是第二次世界大战期间在阿拉莫斯(Los Alamos)进行复数计算的基础。它们的尺寸相当于打字机，计算时有个前后移动的箱子，时而箱子一端的铃会响(参见图 5.43)。它的计算可精确到小数点后 8 位或更多，在电脑出现后，经常用于结果的抽查。但平方根的运算经常要耗时数十秒才能完成，而且机械有很大噪声，计算过程非常冗长。一些大胆的工程师提出特定的计算过程会有特定的声调，即时常听到类似于 Jingle Bells 这样好听的乐曲也不足为奇。



图 5.43 Friden 机械计算器
(图片来源：Mark Richards/Computer History Museum)

个人计算机于 20 世纪 70 年代晚期问世，尽管当时人们用音频盒式磁带来存储数据且随机存储器容量非常有限，一般不到 16KB，但是在接下来的十年间，这些台式机成熟起来，计算机辅助工程设计的时代到来了。首先出现的是用于长期数据存储的软盘，之后是 20 世纪 80 年代中期和晚期的硬盘驱动器。最初，BASIC 和 APL 语言是编写程序的主要语言。Matlab 是 Cleve Moler 在 20 世纪 70 年代提出来的。1984 年发生了两件事情：苹果推出了点击式的 Macintosh 电脑；MathWorks 推出了 PC-Matlab，使 Matlab 在个人电脑的应用中商业化。起初，MathWorks 的 Matlab 主要针对控制系统分析，但鉴于最初的介绍，因此也对其他诸多领域有

287～288 所涉及。发展到这个阶段，工程师已经可以真正地进行反复设计，两次模拟试验之间的时间间隔很小或无时间间隔。在这之前，曾经有过其他一些类似的程序用于大型计算机：CTRL-C和MATRIXx就是其中两个；然而，这些程序不能适应个人计算机的发展，因此不常用。

小结

- 根轨迹是关于参数 K 的方程
$$1+KL(s)=0$$
的根随着参数 K 的变化而所产生 s 值的图形轨迹。
  (1) 当 $K>0$ 时，如果点 s 满足 $\angle L(s)=180°$，则它在根轨迹上，产生 180°根轨迹或正根轨迹。
  (2) 当 $K<0$ 时，如果点 s 满足 $\angle L(s)=0°$，则它在根轨迹上，产生 0°根轨迹或负根轨迹。
- 如果 $KL(s)$ 是负反馈系统的回路传递函数，那么闭环系统的特征方程为
$$1+KL(s)=0$$
根轨迹体现的是增益 K 的改变对闭环特征根的影响。
- 系统 sysL 的具体根轨迹可用 Matlab 语句 rlocus(sysL)和 rltool(sysL)绘制。
- 手工绘制根轨迹的工作经验，对于验证计算机的绘图结果和提出修正设计方案很有帮助。
- 借助电脑绘制和验证所绘制的 180°根轨迹的主要特性如下。
  (1) 实轴上的根轨迹在奇数个零极点的左侧。
  (2) 根轨迹有 n 条分支，m 条趋于 $L(s)$ 的零点，$n-m$ 条趋于中心点为 α，角度为 ϕ_l 的渐近线：n 为极点数；m 为零点数；$n-m$ 为渐近线条数。
$$\alpha=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}$$
$$\phi_l=\frac{180°+360°(l-1)}{n-m},\quad l=1,2,\cdots,n-m$$
  (3) 根轨迹起始于 q 重极点的出射角，终止于 q 重零点的入射角分别为
$$\phi_{l,\text{dep}}=\frac{1}{q}\left(\sum\psi_i-\sum_{i\neq\text{dep}}\phi_i-180°-360°(l-1)\right)$$
$$\psi_{l,\text{arr}}=\frac{1}{q}\left(\sum\phi_i-\sum_{i\neq\text{arr}}\psi_i+180°+360°(l-1)\right)$$
其中：q 为重极点或零点的阶数，ψ_i 为起始于零点的角度，ϕ_i 为起始于极点的角度，$l=1,2,\cdots,q$。
- 根轨迹上特定的根 s_0 对应的参数值 K 可用
$$K=\frac{1}{|L(s_0)|}$$
确定。其中，$|L(s_0)|$ 可在图上通过测量从 s_0 到每个极点和零点的距离得出。
- 用 rlocus(sysL)绘制的根轨迹，参数可用命令[K, p]=rlocfind(sysL)确定，或者用 rltool 命令确定。
- 对于超前补偿，有
$$D_c(s)=\frac{s+z}{s+p},\quad z<p$$
用于近似比例微分控制。对于特定的误差常数，根轨迹会左移从而增大系统的阻尼比。
- 对于滞后补偿，有
$$D_c(s)=\frac{s+z}{s+p},\quad z>p$$
用于近似比例积分(PI)控制。对于特定的响应速度，通常可以通过增加低频增益来减小系统的静态误差，会降低系统的稳定性。
- △ 通过连续分析两(或多)个参数，根轨迹可以用来分析双回路系统。

复习题

5.1 给出根轨迹的两种定义。

5.2 负根轨迹的定义。

5.3 如何确定实轴上(正)根轨迹的部分。

5.4 实轴上 $s=-a$ 处有两个重合的极点，该点出射角是多少？$-a$ 右侧没有零、极点。

5.5 实轴上 $s=-a$ 处有三个重合的极点，该点出射角是多少？$-a$ 右侧没有零、极点。

5.6 超前补偿对根轨迹有何主要影响？

5.7 滞后补偿对闭环主导极点领域内的根有何主要影响？

5.8 滞后补偿对相对于参考输入的稳态误差有何主要影响？

5.9 为何靠近虚轴极点的出射角尤其重要？

5.10 条件稳定系统的定义。

5.11 用根轨迹理论证明在原点有三个极点的系统要么不稳定，要么至多是条件稳定。

习题

5.1 节习题

5.1 将以下的特征方程转换成适合用埃文斯根轨迹绘制方法的形式，用初始参数给出 $L(s)$，$a(s)$，$b(s)$ 和参数 K 的表达式。选择合适的 K 值，确保 $a(s)$，$b(s)$ 的首项为 1，并且 $b(s)$ 的阶数不高于 $a(s)$ 的阶数。

(a) $s+(1/\tau)=0$，τ 为参数；

(b) $s^2+cs+c+1=0$，c 为参数；

(c) $(s+c)^3+A(Ts+1)=0$。

(i) A 为参数；

(ii) T 为参数；

(iii) 若选择 c 为参数，分析是否可行。假如 A 和 T 为常值，能否绘制出以 c 为参数的根轨迹？

(d) $1+\left[k_P+k_I(s)+\dfrac{k_D s}{\tau s+1}\right]G(s)=0$，$G(s)=A\dfrac{c(s)}{d(s)}$

其中：$c(s)$ 和 $d(s)$ 都是首一多项式，$d(s)$ 的阶数高于 $c(s)$ 的阶数。

(i) k_P 为参数；

(ii) k_I 为参数；

(iii) k_D 为参数；

(iv) τ 为参数。

5.2 节习题

5.2 不借助计算机，粗略绘制具有如图 5.44 所示零极点分布的系统的根轨迹。估算渐近线的中心点与角度、复极点的入射角和出射角，绘制出参数 K 为正值时的根轨迹。每个零极点分布图都是由如下形式的特征方程得到：

$$1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0$$

其中：在 s 平面上，小圆'○'表示分子 $b(s)$ 的根，'×'表示分母 $a(s)$ 的根。注意图 5.44c 中原点处有两个极点。

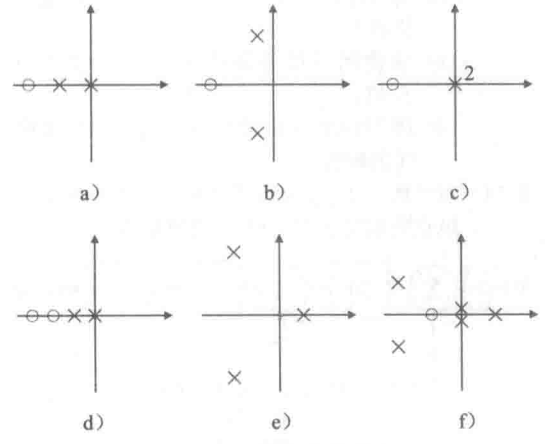


图 5.44 零极点分布图

5.3 考虑特征方程

$$1+\frac{K}{s^2(s+1)(s+5)}=0$$

(a) 绘制实轴上的根轨迹；

(b) 绘制根轨迹在 $K\to+\infty$ 时的渐近线；

(c) 绘制根轨迹；

(d) 用 Matlab 绘图法验证你所绘制的根轨迹。

5.4 若有实零点和极点，绘制方程 $1+KL(s)=0$ 关于参数 K 的根轨迹，其中 $L(s)$ 如下。要求画出渐近线、所有复零极点的入射角、出射角。绘制完后，用 Matlab 验证绘制的图。手工绘制的图和 Matlab 绘制的图采用相同的刻度。

(a) $L(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$；

(b) $L(s)=\dfrac{(s+3)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$；

(c) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$；

(d) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+6)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$。

5.5 若有复零极点和零点，绘制方程 $1+KL(s)=0$ 关于参数 K 的根轨迹，$L(s)$ 选择如下。确保画出在任意复零点或复极点处的渐近线、入射角、出射角。绘制完后，用 Matlab 验证绘制的图。手工绘制的图和 Matlab 绘制的图采用相同的刻度。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+10}$；

(b) $L(s)=\dfrac{1}{s(s^2+3s+10)}$；

(c) $L(s)=\dfrac{(s^2+2s+8)}{s(s^2+2s+10)}$；

(d) $L(s)=\dfrac{(s^2+2s+12)}{s(s^2+2s+10)}$；

(e) $L(s)=\dfrac{s^2+1}{s(s^2+4)}$；

(f) $L(s)=\dfrac{s^2+4}{s(s^2+1)}$。

5.6 若原点处有多重极点，绘制方程 $1+KL(s)=0$ 关于参数 K 的根轨迹，$L(s)$ 选择如下。确保画出在任意复零点或复极点处的渐近线、入射角、出射角。绘制完后，用 Matlab 验证绘制的图。手工绘制的图和 Matlab 绘制的图采用相同的刻度。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s^2(s+8)}$；

(b) $L(s)=\dfrac{1}{s^3(s+8)}$；

(c) $L(s)=\dfrac{1}{s^4(s+8)}$；

(d) $L(s)=\dfrac{s+3}{s^2(s+8)}$；

(e) $L(s)=\dfrac{s+3}{s^3(s+4)}$；

(f) $L(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^3(s+4)}$；

(g) $L(s)=\dfrac{(s+1)^2}{s^3(s+10)}$。

5.7　对于既有实极点又有复极点的情况，绘制方程 $1+KL(s)=0$ 关于参数 K 的根轨迹，$L(s)$ 选择如下。确保画出在任意复零点或复极点处的渐近线、入射角、出射角。绘制完后，用 Matlab 验证绘制的图。手工绘制的图和 Matlab 绘制的图采用相同的刻度。

(a) $L(s)=\dfrac{(s+3)}{s(s+10)(s^2+2s+2)}$；

(b) $L(s)=\dfrac{(s+3)}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$；

(c) $L(s)=\dfrac{(s+3)^2}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$；

(d) $L(s)=\dfrac{(s+3)(s^2+4s+68)}{s^2(s+10)(s^2+4s+85)}$；

(e) $L(s)=\dfrac{[(s+1)^2+1]}{s^2(s+2)(s+3)}$。

5.8　若有右半平面的极点和零点，绘制方程 $1+KL(s)=0$ 关于参数 K 的根轨迹，$L(s)$ 选择如下。确保画出在任意复零点或复极点处的渐近线、入射角、出射角。绘制完后，用 Matlab 验证绘制的图。手工绘制的图和 Matlab 绘制的图采用相同的刻度。

(a) $L(s)=\dfrac{s+2}{s+10}\dfrac{1}{s^2-1}$，应用超前补偿的磁悬浮列车模型为例；

(b) $L(s)=\dfrac{s+2}{s(s+10)}\dfrac{1}{(s^2-1)}$，应用积分控制、超前补偿的磁悬浮系统；

(c) $L(s)=\dfrac{s-1}{s^2}$；

(d) $L(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{s(s+20)^2(s^2-2s+2)}$，根轨迹上可得到的稳定复根的最大阻尼比是多少？

(e) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s-1)(s+6)^2}$；

(f) $L(s)=\dfrac{1}{(s-1)[(s+2)^2+3]}$。

5.9　将图 5.45 所示系统的特征方程转化成以 α 为参数的根轨迹方程形式，给出相应的 $L(s)$、$a(s)$ 和 $b(s)$，绘制以 α 为参数的根轨迹，估计闭环极点的位置，并绘制出 $\alpha=0$、0.5 和 2 时相应的阶跃响应。用 Matlab 检验近似阶跃响应的准确性。

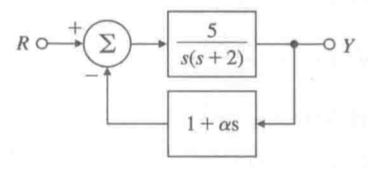


图 5.45　习题 5.9 所描述的控制系统

5.10　应用 Matlab 中的函数 rltool 研究 $1+KL(s)$ 在参数 a 从 0 变到 10 时的根轨迹，其中：

$$L(s)=\frac{(s+a)}{s(s+1)(s^2+8s+52)}$$

特别注意 a 从 2.5 变化到 3.5 这段区域的情况。证明 a 为这个范围内的某个值时，特征方程会有复重根。

5.11　用劳斯判据求出使图 5.46 所示系统稳定的增益 K 的范围，并用根轨迹证明计算结果。

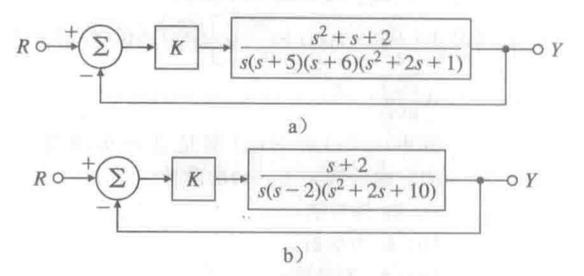


图 5.46　习题 5.11 所描述的反馈系统

5.12　绘制如下系统特征方程的根轨迹：

$$L(s)=\frac{(s+2)}{s^2(s+5)}$$

求共轭复极点具有最大阻尼比时的根轨迹增益值，此时的近似阻尼是多少？

5.13　考虑图 5.47 所示系统。

(a) 绘出以 K 为参数的闭环根轨迹。

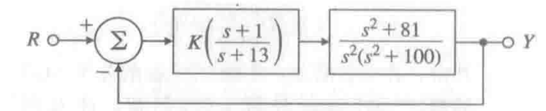


图 5.47　习题 5.13 所描述的反馈系统

(b) 是否存在一个 K 值使得所有根的阻尼比都大于 0.5?

(c) 求使闭环极点阻尼比为 $\zeta=0.707$ 的 K 值。

(d) 用 Matlab 绘出最终设计结果对参考阶跃的响应。

5.14　对于图 5.48 所示反馈系统，求使闭环主导极点的阻尼比为 $\zeta=0.5$ 的增益 K。

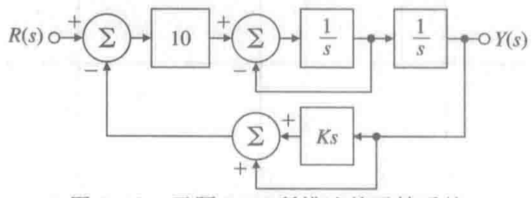


图 5.48　习题 5.14 所描述的反馈系统

5.3 节习题

5.15　直升机巡航时，其简化的纵向移动模型传递函数为

$$G(s)=\frac{9.8(s^2-0.5s+6.3)}{(s+0.66)(s^2-0.24s+0.15)}$$

特征方程为 $1+D_c(s)G(s)=0$，首先令

$D_c(S)=k_P$。

(a) 计算复零极点的出射角和入射角。

(b) 绘制参数 $K=9.8k_P$ 时系统根轨迹，坐标要求：$-4\leqslant x\leqslant 4$；$-3\leqslant y\leqslant 3$。

(c) 用 Matlab 验证结果，可用命令 axis([−4 4 −3 3])得到正确坐标范围。

(d) 提出一种可行的(至少零点数与极点数相同)备选补偿环节 $D_c(s)$，确保系统稳定。

5.16 (a) 对于图 5.49 所示系统，绘制 $\lambda=2$ 时，参数 K_1 从 0 到 $+\infty$ 变化的特征方程的根轨迹，并写出相应的 $L(s)$、$a(s)$和$b(s)$。

(b) 令 $\lambda=5$，重复上述过程，看看该值下有没有什么不同?

(c) 令 $K_1=2$，选择 $K=\lambda$ 为从 0 到 $+\infty$ 变化的参数，重复(a)问过程。

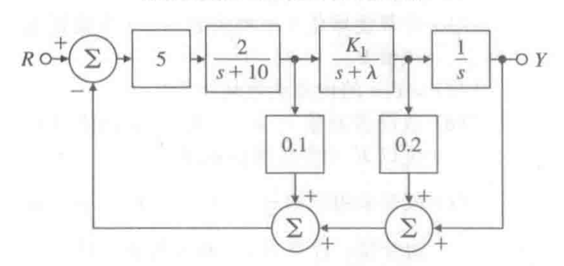


图 5.49 习题 5.16 所描述的控制系统

5.17 对于图 5.50 所示系统，确定特征方程并绘制参数 c 为正值的根轨迹。写出 $L(s)$，$a(s)$和 $b(s)$，并在根轨迹上沿着参数 c 增加的方向标上箭头。

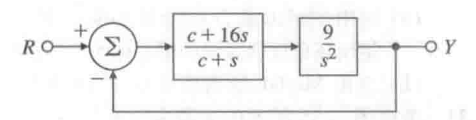


图 5.50 习题 5.17 所描述的控制系统

5.18 假设已给出系统的传递函数为

$$L(s)=\frac{(s+z)}{(s+p)^2}$$

其中：z 和 p 都是实数，且 $z>p$。证明$1+KL(s)=0$ 关于 K 的根轨迹是中心在 z 处的圆，半径为

$$r=(z-p)$$

提示：假设 $s+z=re^{j\phi}$，在这一假设条件下，证明对于实数 ϕ，$L(s)$是负实数。

5.19 系统的回路传递函数在 $s=-1$ 处有两个极点，$s=-2$ 处有一个零点。第三个实轴上的极点 p 位于零点左侧某个位置。当第三个极点位置不同时，会有不同形状的根轨迹。极端情况出现在极点位于无穷远处或极点在 $s=-2$ 处。给出相应的 p 值并绘制三种不同 p 值时的根轨迹。

5.20 对于图 5.51 所示反馈结构，通过渐近线、渐近线的中心点、出射角和入射角、劳斯表绘制如下反馈控制系统特征方程关于参数 K 的根轨迹，并用 Matlab 验证结果。

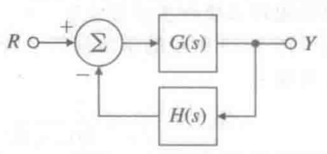


图 5.51 习题 5.20 所描述的反馈系统

(a) $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1+3j)(s+1-3j)}$，

$H(s)=\dfrac{s+2}{s+8}$；

(b) $G(s)=\dfrac{K}{s^2}$，$H(s)=\dfrac{s+1}{s+3}$；

(c) $G(s)=\dfrac{K(s+5)}{(s+1)}$，$H(s)=\dfrac{s+7}{s+3}$；

(d) $G(s)=\dfrac{K(s+3+4j)(s+3-4j)}{s(s+1+2j)(s+1-2j)}$，

$H(s)=1+3s$。

5.21 考虑图 5.52 所示系统。

(a) 应用劳斯稳定判据，求使系统稳定的 K 值范围。

(b) 用 Matlab 绘制关于参数 K 的根轨迹，并求出根轨迹与虚轴交点处对应的 K 值。

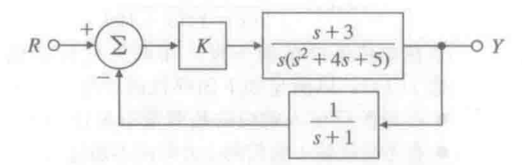


图 5.52 习题 5.21 所描述的反馈系统

5.4 节习题

5.22 令

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)(s+3)} \text{ 和 } D_c(s)=K\frac{s+a}{s+b}$$

应用根轨迹法求补偿环节 $D_c(s)$的参数 a，b 和 K 值，使图 5.53的系统闭环极点为 $s=-1\pm j$。

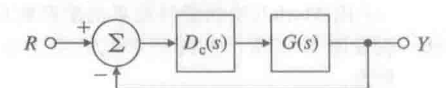


图 5.53 习题 5.22、5.28 和 5.33 所描述的单位反馈系统

5.23 假设图 5.53 中，有

$$G(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+5)},D_c(s)=\frac{K}{s+2}$$

不使用 Matlab，绘制闭环系统特征方程关于参数 K 的根轨迹，要特别注意产生重根的点。求此点处的 K 值，说明重根的位置是什么？有多少重根?

5.24 假设图 5.53 所示的为单位反馈系统的开环被控对象为 $G(s)=1/s^2$。设计超前补偿环节，$D_c(s)=K\frac{s+z}{s+p}$ 与被控对象串联使用，使得闭环系统的主导极点在 $s=-2\pm2j$ 处。

5.25 假设图 5.53 所示的单位反馈系统的开环被控对象为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+3)(s+6)}$$

设计滞后补偿环节使得系统满足下列要求：

- 阶跃响应的调节时间小于 5s。
- 阶跃响应的超调量小于 17%。
- 单位斜坡输入下的稳态误差不超过 10%。

5.26 一种数控机床的位置伺服机构的标准化传递函数由下式给出：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

若系统闭环极点位于 $s=-1\pm j\sqrt{3}$，则图 5.53所示单位反馈结构满足性能指标。

(a) 证明仅靠选择比例控制器 $D_c(s)=k_P$ 无法满足系统性能指标。

(b) 设计满足系统性能指标要求的超前补偿器 $D_c(s)=K\frac{s+z}{s+p}$。

5.27 位置伺服控制系统的被控对象传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

请在单位反馈结构下设计串联补偿传递函数 $D_c(s)$，以满足如下闭环性能指标：

- 参考阶跃输入响应的超调量不超过 16%。
- 参考阶跃输入响应的上升时间不超过 0.4s。
- 单位斜坡输入的稳态误差的不超过 0.05。

(a) 设计超前补偿使系统满足动态响应性能指标，不考虑误差要求。

(b) 速度常数 K_v 是多少？它能满足误差指标要求吗？

(c) 设计滞后补偿，与之前设计的超前补偿相串联，使系统满足稳态误差指标。

(d) 用 Matlab 绘制最终设计结果的根轨迹。

(e) 用 Matlab 绘制最终结果的阶跃响应。

5.28 假设图 5.53 所示的闭环系统的前馈传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)}$$

设计滞后补偿，使得闭环系统的主导极点位于 $s=-1\pm j$ 处，且系统在单位斜坡输入下的稳态误差小于 0.2。

5.29 图 5.54 描述的是一种基本的磁悬浮系统。考虑相对于参考位置的微小移动时，影像探测器的电压 e 由球位移 x(m) 决定，$e=100x$。作用在球上向上的力(N)由电流 i(A) 决定，近似为 $f=0.5i+20x$。球的质量为 20g，地球引力为 9.8N/kg。功率放大器为电压/电流转换装置，输出(安培)$i=u+V_0$。

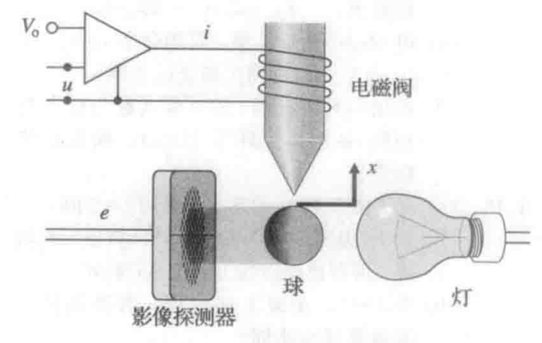


图 5.54 基本磁悬浮系统

(a) 写出所建立的系统运动方程。

(b) 计算使球位于平衡位置 $x=0$ 的偏置电压值 V_0。

(c) u 到 e 的传递函数是什么？

(d) 假设控制输入 $u=-Ke$，绘制闭环系统以 K 为参数的根轨迹。

(e) 假设采用形如 $\frac{U}{E}=D_c(s)=K\frac{s+z}{s+p}$ 的超前补偿，计算 K、z 和 p 的值，使性能指标优于(d) 问中结果。

5.30 在单位正反馈系统中，具有非最小相位的被控对象的传递函数如下

$$G(s)=\frac{4-2s}{s^2+s+9}$$

控制器的传递函数为 $D_c(s)$。

(a) 应用 Matlab 求 $D_c(s)=K$ 的值(负值)，使得闭环负反馈系统的阻尼比为 $\zeta=0.707$。

(b) 应用 Matlab 绘制系统参考阶跃响应。

5.31 考虑图 5.55 所示的火箭定位系统。

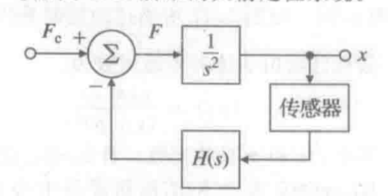


图 5.55 火箭定位系统的框图

(a) 证明若测量的传感器传递函数为单位传递函数，则超前补偿器

$$H(s)=K\frac{s+2}{s+4}$$

可以镇定系统。

(b) 假设传感器传递函数是时间常数为 0.1s、单位直流增益的单极点模型。应用根轨迹法求出使阻尼比最大的增益 K 值。

5.32 对于图 5.56 所示系统：

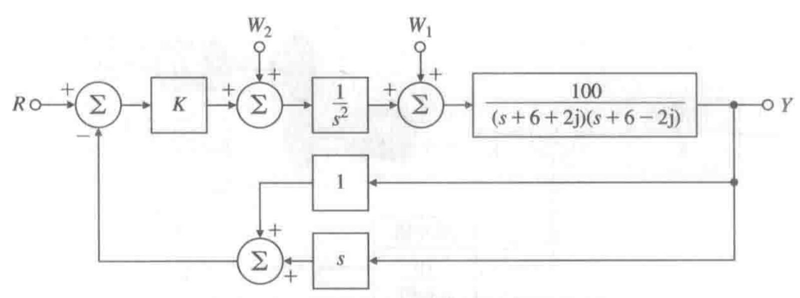


图 5.56 习题 5.32 所描述的控制系统

(a) 绘制以 K 为参数的闭环系统的根轨迹。

(b) 求出使系统稳定的最大 K 值。假设本题其他问中 $K=2$。

(c) 对于 r 的阶跃变化，稳态误差($e=r-y$)是多少?

(d) 在 w_1 为常值扰动时，y 的稳态误差是多少?

(e) 在 w_2 为常值扰动时，y 的稳态误差是多少?

(f) 如果希望提高阻尼比，应对系统作何调整?

5.33 图 5.53 所示的单位反馈系统，被控对象的传递函数为

$$G(s)=\frac{bs+k}{s^2[mMs^2+(M+m)bs+(M+m)k]}$$

在单体传感器和执行器情况下，这是质量体 M 的输入力 $u(t)$ 到输出位置 $y(t)$ 之间的传递函数。本题中，应用根轨迹法设计控制器 $D_c(s)$，使得闭环系统阶跃响应上升时间小于 0.1 秒、超调量不超过 10%。可用 Matlab 完成下列问题：

(a) $G(s)$ 中设 $m\approx 0$，令 $M=1$，$k=1$，$b=0.1$，$D_c(s)=K$，是否可以通过选择合适的 K 值满足系统性能指标，说明原因。

(b) 假设 $D_c(s)=K(s+z)$，重复(a)问，证明通过选择合适的 K 和 z 能满足系统性能指标。

(c) 用下列传递函数中给出的实际控制器，重复(b)问：

$$D_c(s)=K\frac{p(s+z)}{s+p}$$

选择 p 使(b)中 K 和 z 值仍然有效。

(d) 假设小质量 m 不可忽略，为 $m=M/10$。检查(c)中设计的控制器是否仍然满足系统的性能指标，若不满足，则调整控制器参数使性能指标得到满足。

5.34 图 5.57 描述的为 1 型系统。应用根轨迹法设计补偿环节 $D_c(s)$ 满足如下要求：①w 为常值单位扰动时，y 的稳态值小于 $\frac{4}{5}$，②阻尼比 $\zeta=0.7$。

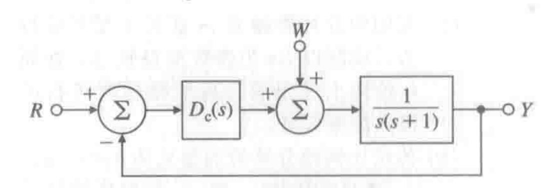


图 5.57 习题 5.34 所描述的控制系统

(a) 证明仅仅使用比例控制不能达到目的。

(b) 证明比例微分控制能满足要求。

(c) 求 $D_c(s)=k_P+k_D s$ 中增益 k_P、k_D 的值，满足设计指标要求，具有至少 10% 的裕度。

△5.35 采样频率为 10Hz，采用梯形规则找出与习题 5.7 中 $D_c(s)$ 等价的离散控制器 $D_c(z)$。用 Simulink 评价时间响应，判断采用控制器的离散形式系统的阻尼比是否满足要求(注释：解决这一问题的相关知识在网站 www.fpe7e.com 的附录 W4.5 中或第 8 章介绍)。

5.5 节习题

5.36 考虑图 5.58 所示的位置伺服系统，其中：$e_i=K_o\theta_i$，$e_o=K_{pot}\theta_o$，$K_o=10\text{V/rad}$；T 为电动机转矩，$T=K_t i_a$；k_m 为转矩常数，$k_m=K_t=0.1\text{N}\cdot\text{m/A}$；$K_e$ 为反电动势常数，$K_e=0.1\text{V}\cdot\text{s}$；$R_a$ 为电枢电阻，$R_a=10\Omega$；齿轮比 $=1:1$；$J_L+J_m=$ 总惯量 $=10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$；$v_a=K_A(e_i-e_f)$。

(a) 放大器增益 K_A 在什么范围内能使系统稳定？利用根轨迹图用图形方法找到 K_A 的取值上限。

(b) 确定 $\zeta=0.7$ 处的增益 K_A，K_A 为该值时系统的三个闭环极点在何位置?

5.37 要设计一个控制速度的磁带驱动伺服系统。电流 $I(s)$ 到磁带速度 $\Omega(s)$(mm/(ms·A))的传递函数：

$$\frac{\Omega(s)}{I(s)}=\frac{15(s^2+0.9s+0.8)}{(s+1)(s^2+1.1s+1)}$$

设计 1 型反馈系统使阶跃响应满足：

$$t_r<4\text{ms},\quad t_s\leqslant 15\text{ms},\quad M_p\leqslant 0.05$$

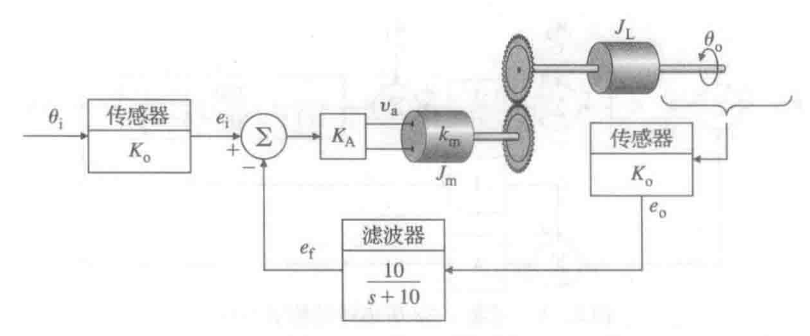


图 5.58 位置伺服系统

(a) 应用积分补偿器 K_I/s 获得 1 型系统行为，绘制以 K_I 为参数的根轨迹。在同一绘图上标出满足性能指标时可行的极点配置区域。

(b) 假定比例积分补偿的形式为 $k_P(s+\alpha)/s$，选择最佳的 k_P 和 α，绘制所设计的根轨迹，求出 k_P 和 α 值及速度常数值 K_v，在图上用点(·)表示闭环极点位置，标出可以接受的根的边界范围。

5.38 图 5.59 表示一个质量为 m_c 的小车上有一个倒立摆，摆的质量为 m_p 长度为 l，不计摩擦，标准化后的方程为

$$\ddot{\theta}-\theta=-v \tag{5.88}$$

$$\ddot{y}+\beta\theta=v$$

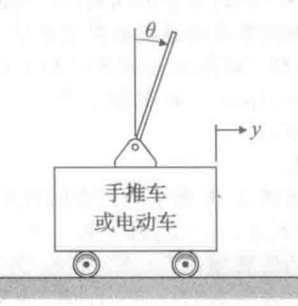


图 5.59 习题 5.38 所描述的车摆图

其中 $\beta=\frac{3m_p}{4(m_c+m_p)}$ 为质量比例系数，且 $0<\beta<0.75$。时间由 $\tau=\omega_0 t$ 测得，其中 $\omega_0^2=\frac{3g(m_c+m_p)}{l(4m_c+m_p)}$。小车的位移以摆的长度 $y=\frac{3x}{4l}$ 为单位，输入力矩以系统重量 $v=\frac{u}{g(m_c+m_p)}$ 为单位标准化后得到。这些方程可以用于计算传递函数：

$$\frac{\Theta}{V}=-\frac{1}{s^2-1} \tag{5.89}$$

$$\frac{Y}{V}=\frac{s^2-1+\beta}{s^2(s^2-1)} \tag{5.90}$$

本题中，首先设计摆为被控对象的第一层闭环系统，即式(5.89)，然后，在第一层闭环的基础上，设计以摆和小车为被控对象的第二层闭环系统，即式(5.90)，令质量比为 $m_c=5m_p$。

(a) 画出系统以 V 作为输入，Y 和 θ 作为输出的框图。

(b) 在 Θ 环中设计超前补偿 $D_c(s)=K\frac{s+z}{s+p}$，消去 $s=-1$ 处的极点，并且把其余两个极点配置到 $-4\pm j4$ 处。新的控制量为 $U(s)$，其中力矩为 $V(s)=U(s)+D_c(s)\Theta(s)$。绘制角度环的根轨迹。

(c) 计算增加 $D_c(s)$后，U 到 Y 的传递函数。

(d) 在闭合摆环的情况下，设计小车位置的控制器，绘制关于控制器 $D_c(s)$增益的根轨迹。

(e) 当小车位置单位阶跃变化时，用 Matlab 画出控制量，小车的位置，摆的位置。

5.39 如图 5.60 所示，美国海岸警卫艇 Tampa (902)，270ft。基于试航数据的参数辨识(Trankle 1987 年)用于估计运动方程中的水动力系数，可将舵角 δ 和风速 w 到船的航向角 ψ 描述为如下二阶传递函数：

$$G_\delta(s)=\frac{\psi(s)}{\delta(s)}=\frac{-0.0184(s+0.0068)}{s(s+0.2647)(s+0.0063)}$$

$$G_w(s)=\frac{\psi(s)}{w(s)}=\frac{0.0000064}{s(s+0.2647)(s+0.0063)}$$

其中：ψ 为航向角，rad；ψ_r 为参考航向角，rad；r 为偏航率，rad/s；δ 为舵角，rad；w 为风速，m/s。

(a) 计算舵角 δ 在阶跃变化下，r 的开环调节时间；

(b) 为调节航向角 ψ，利用航向角 ψ 和能提供测量偏航率的陀螺仪(即 $\dot{\psi}=r$)设计一个补偿器。要求航向角 ψ_r 发生阶跃变化时，航向角为 ψ 所需调节时间小于 50s 且航向最大变化为 5°，舵角容许最大偏差小于 10°。

(c) 在阵风扰动 10m/s 的情况下，检查在(b)问设计的闭环系统的响应(模型扰动为阶跃输入)。如果由于阵风的扰动，航向的稳态值大于 0.5°，修改设计以满足指标要求。

5.40 Golden Nugget 航空公司为吸引顾客，在飞机尾部开设了一个免费酒吧。为了自动适应当酒吧开业时，乘客突然涌入而导致的重心的变化，航空公司装配了一个控制倾斜角度的自动驾驶仪。图 5.61为所提出方案的框图。我们将乘客的移动作为一个阶跃干扰 $M_p(s)=M_0/s$，M_0 的最大期望值为 0.6。

(a) 保持稳态误差 θ 小于 0.02rad(≈1°)的 K 是多少(假定系统稳定)?

(b) 绘制以 K 为参数的根轨迹。

(c) 根据所绘制的根轨迹图，求出系统不稳定时的 K 值。

(d) 假设满足稳态性能的 K 值为 600，证明这个值使系统不稳定，对应特征方程的根为

$$s=-2.9, -13.5, +1.2\pm 6.6j$$

(e) 已知一个速率陀螺仪的黑匣子，已在图中标注并安装，并已知它能提供准确的 $\dot{\theta}$ 值，输出为 $K_T\dot{\theta}$。假设 $K=600$，画出框图说明如何把速率陀螺仪和自动驾驶仪合并在一起(包括在黑匣子里的传递函数)。

(f) 对于(e)问部分的速率陀螺仪，绘制以 K_T 为参数的根轨迹图。

(g) 在(e)问部分的结构下，所能得到的复根最大阻尼比是多少?

(h) (g)问部分 K_T 的值是多少?

(i) 假设不满意系统(e)～(h)问部分速率陀螺仪的稳态误差和阻尼比，试讨论在控制律中添加一个积分项和一个超前网络后的优缺点。用 Matlab 或粗略根轨迹图证明你的评论。

5.41 考虑伺服装置，其参数由图 5.62 给出，针对以下每种情况，绘制以 K 参数的根轨迹，并根据最后的设计结果绘出根的位置。

(a) 对于超前网络，令

$$H(s)=1,\quad D_c(s)=K\frac{s+z}{s+p},\quad \frac{p}{z}=6$$

选择 z 和 K，使得靠近原点的根(主导根)满足

$$\zeta\geqslant 0.4,\quad -\sigma\leqslant -7,\quad K_v\geqslant 16\frac{2}{3}\mathrm{s}^{-1}$$

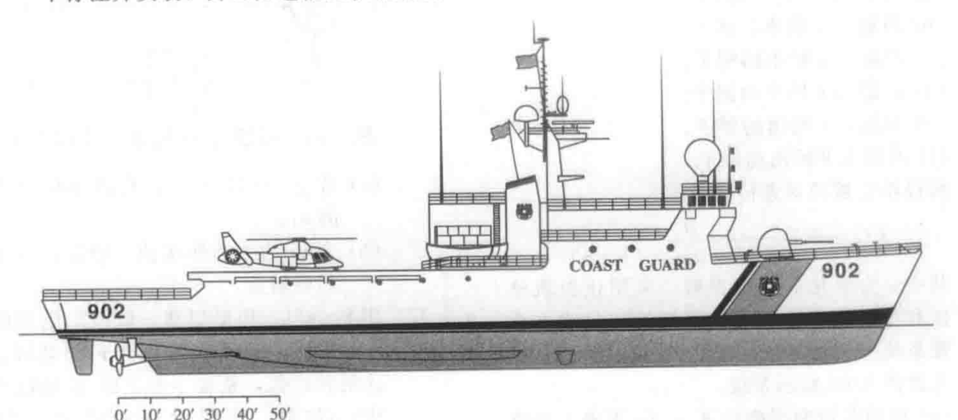


图 5.60 习题 5.39 的美国海岸警卫艇 Tampa(902)

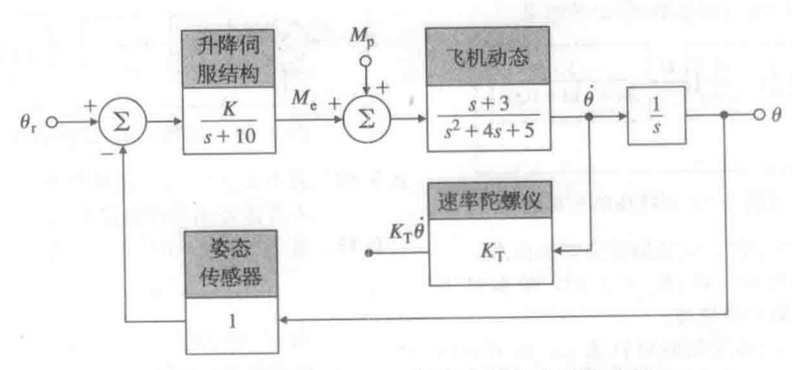


图 5.61 Golden Nugget 航空公司的自动驾驶仪

(b) 对于速度输出(测速计)反馈，令

$$H(s)=1+K_{T}s \text{ 和 } D_c(s)=K$$

选择 K_T 和 K 使主导根的位置与(a)问中相同。计算 K_v。若可以，请给出采用输出微分反馈时，K_v 值减小的物理解释。

(c) 对于滞后网络，令

$$H(s)=1 \text{ 和 } D_c(s)=K\frac{s+1}{s+p}$$

应用比例控制，在 $\zeta=0.4$ 时，能否有 $K_v=12$? 选择 K 和 p，使主导根与比例控制的情况相同，不过对应的 $K_v=100$ 而不是 $K_v=12$。

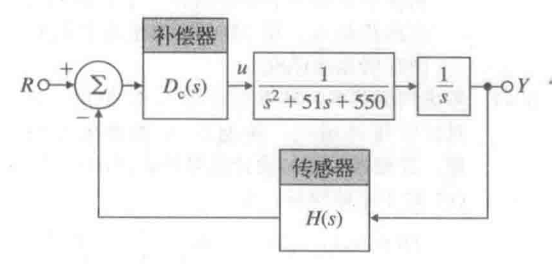


图 5.62 习题 5.41 的控制系统

5.6 节习题

5.42 绘制以下系统的 0°根轨迹或负 K 根轨迹：

(a) 习题 5.3 给出的例子。

(b) 习题 5.4 给出的例子。

(c) 习题 5.5 给出的例子。

(d) 习题 5.6 给出的例子。

(e) 习题 5.7 给出的例子。

(f) 习题 5.8 给出的例子。

5.43 假设给定被控对象传递函数为

$$L(s)=\frac{1}{s^2+(1+\alpha)s+(1+\alpha)}$$

其中 α 为变化的系统参数，应用正根轨迹法和负根轨迹法确定 α 怎样的变化才不会使系统失去稳定性？

△ **5.44** 考虑图 5.63 所示系统。

(a) 应用劳斯判据确定 K_1，K_2 平面上系统稳定的区域。

(b) 应用 rltool 函数验证(a)的结果。

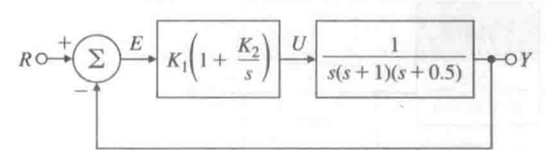


图 5.63 习题 5.44 所描述的反馈系统

△ **5.45** 图 5.64 所示的为位置伺服装置的框图。

(a) 当无转速反馈($K_T=0$)时，绘制以 K 为参数的根轨迹。

(b) 在(a)问所绘制的根轨迹上，求 $K=16$ 时闭环系统的根的位置。对于这些根，估计系统暂态响应指标 t_r、M_p 和 t_s 的值，将你的估计与用 Matlab 中阶跃响应命令得到的结果对比。



(c) $K=16$ 时，绘制以 K_T 为参数的根轨迹。

(d) $K=16$，求 K_T 使 $M_p=0.05(\zeta=0.707)$，并估计 t_r 和 t_s 的值。将估计值和用 Matlab 获得的 t_r 和 t_s 的实际值比较。

(e) 对(d)问中的 K 和 K_T 值，求系统的速度误差常数 K_v。

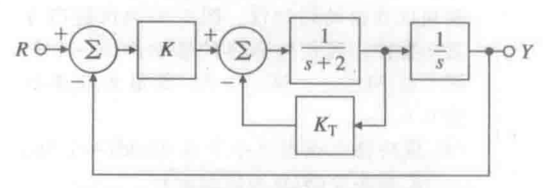


图 5.64 习题 5.45 所描述的控制系统

△ **5.46** 考虑图 5.65 所示的机械系统，其中 g 和 a_0 为增益。包含 gs 的反馈环节相当于速率反馈。对给定的 a_0 值，调节 g 相当于使 s 平面中的零点位置发生变化。

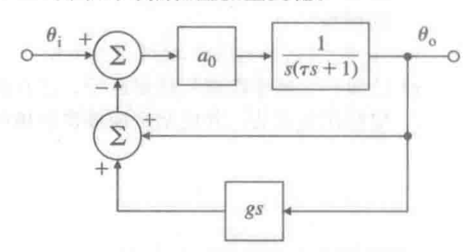


图 5.65 习题 5.46 描述的控制系统

(a) 若 $g=0$ 且 $\tau=1$，找出使极点为复数的 a_0。

(b) 令 a_0 为上述所求值，绘制以 g 为参数的根轨迹。

△ **5.47** 用 Padé(1，1)近似和一阶滞后近似绘制图 5.66 所示系统关于参数 K 的根轨迹。对于这两种近似，系统不稳定时 K 的范围是多少？(注释：回答此问题的材料包含在 www.fpe7e.com 上的附录 W5.6.3)

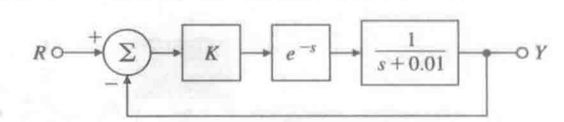


图 5.66 习题 5.47 描述的控制系统

△ **5.48** 若不消去极点，证明被控对象 $G(s)=1/s^3$ 不可能是无条件稳定系统。

△ **5.49** 对于方程 $1+KG(s)$，其中

$$G(s)=\frac{1}{s(s+p)[(s+1)^2+4]}$$

用 Matlab 分析以 K 为参数，p 从 1 到 10 变化的根轨迹，注意，一定要包含 $p=2$ 的情况。

第6章 频率响应设计法

频率响应设计法介绍

工业反馈控制系统的设计几乎都采用频率响应方法来实现，频率响应设计方法之所以盛行，主要是因为它能针对对象模型的不确定性提供良好的设计。例如，对于具有未知的或变化的高频谐振系统，我们可以调节系统的反馈补偿以减小这些不确定性因素的影响。目前，这种采用频率响应设计的调节方法要比其他方法更容易实施。

频率响应的另一个优势就是，实验信息可以用于设计目的。测量正弦输入激励下的被控对象的输出幅值和相位，所得的未经加工的测量结果，对设计一个适当的反馈控制就足够了。不需要为获得系统模型，进行中间数据处理(例如，找出零点和极点或确定系统矩阵)。计算机的广泛应用使得这一优势已不如多年前那么重要。然而，对于相对简单的系统，频率响应仍经常是最有效率的设计方法。该方法的另一个优势是，控制系统的指标可以根据系统的频率响应特性直接得到。因此，频域设计方法能够直接确保系统指标符合要求，而不再需要将其转化为其他参数。

308

获取在所有情况下能够确定系统稳定性的基本理论是具有挑战性的，需要相当广泛的关于复变量的知识。然而，频率响应设计方法不需要设计者记住这些稳定性理论的细节，而且其稳定规则也相当简单。

概述

本章以讨论如何通过分析零极点来获得系统的频率响应作为开始。这一讨论的重要拓展就是如何利用伯德图以图形的形式展示频率响应。6.2 节和 6.3 节简要讨论稳定性，然后深入讨论奈奎斯特稳定判据的应用。6.4～6.6 节介绍稳定裕度的概念，讨论伯德图的幅相关系，研究动态系统的闭环频率响应。伯德图的幅相关系给出了对于补偿设计的一条简单规则：调整系统的频率响应的幅值，使之以斜率－1 穿越幅值恒为 1 的水平线。同根轨迹方法一样，6.7 节描述了加入动态补偿是如何调节频率响应的，以及提高系统稳定性和(或)误差特性的方法。

6.7.7 小节和 6.7.8 小节讨论了与频率响应相关的灵敏度问题，包括关于灵敏度函数和鲁棒稳定性的内容。接下来的两节分析了系统的时滞和尼科尔斯表等一些额外的、略微前沿的内容，因此这两节也可以作为选读内容。最后一节 6.10 节是频率响应设计方法的简要历史。

6.1 频率响应

频率响应的基本概念已经在 3.1.2 小节中讨论过。本节将回顾这些基本概念，并将它们用在控制系统的设计中。

一个线性系统对于正弦输入的响应——称为系统的*频率响应*——可以从系统零极点的位置信息获得。

309

现给出一个系统描述如下：

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

其中：输入 $u(t)$是一个幅值为 A 的正弦波，

$$u(t) = A\sin(\omega_0 t)1(t)$$

这个正弦波的拉普拉斯变换为

$$U(s) = \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

在零初始条件下，系统输出的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = G(s)\,\frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \tag{6.1}$$

对式(6.1)进行部分分式展开将得到如下形式的等式(假设 $G(s)$的极点都是互不相等的)：

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s - p_1} + \frac{\alpha_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s - pn} + \frac{\alpha_0}{s + j\omega_0} + \frac{\alpha_0^*}{s - j\omega_0} \tag{6.2}$$

其中：p_1，p_2，…，p_n 是$G(s)$的极点，α_0 可以由执行部分分式展开得到；α_0^* 是 α_0 的共轭。对应于输出信号 $Y(s)$的时域响应为：

$$y(t) = \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{p_n t} + 2|\alpha_0|\cos(\omega_0 t + \phi), \quad t \geqslant 0 \tag{6.3}$$

其中：

$$\phi = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(\alpha_0)}{\mathrm{Re}(\alpha_0)}\right]$$

如果系统的所有极点都是稳定的(p_1，p_2，…，p_n 的实部小于 0)，那么自激响应将最终消失，因此系统的稳态响应将仅由式(6.3)中的正弦项决定，这个正弦项是由正弦激励引起的。例 3.6 确定了系统 $G(s)=1/(s+1)$在输入 $u=\sin(10t)$下的响应，并将这个响应描绘在图 3.5 中，这里又将其作为图 6.1 重新绘制了一遍。可以看出，e^{-t}作为$G(s)$对应响应的指数部分，在经过几个时间常数后就消失了，剩下的实质上只是单一的正弦项。例 3.6 说明了式(6.3)中剩下的正弦项可以表示为

310

$$y(t) = AM\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{6.4}$$

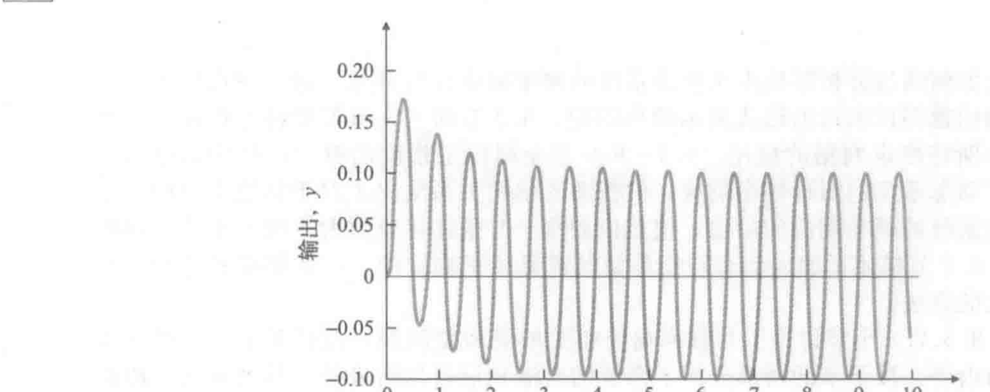


图 6.1　$G(s)=1/(s+1)$对于输入 $u=\sin(10t)$的响应

其中：

$$M = |G(j\omega_0)| = |G(s)|_{s=j\omega_0} = \sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega_0)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[G(j\omega_0)]\}^2} \tag{6.5}$$

$$\phi = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega_0)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega_0)]}\right] = \angle G(j\omega_0) \tag{6.6}$$

在极坐标形式下，有

$$G(j\omega_0) = Me^{j\phi} \tag{6.7}$$

式(6.4)表明，具有传递函数 $G(s)$的稳定系统，被幅值为 1、频率为 ω_0 的正弦曲线激励

后，当其响应达到稳态之后，得到一个正弦输出，该正弦输出在频率 ω_0 处的幅值为 $M(\omega_0)$，相位为 $\phi(\omega_0)$。事实上，输出 y 和输入 u 是具有相同频率的正弦曲线，且输出的幅值比 M 和相位 ϕ 与输入幅值 A 无关，这一结果是由于 $G(s)$ 是线性定常系统造成的。如果被激励的系统是非线性或者时变系统，那么输出可能包含输入频率以外的频率，并且输出输入比可能与输入幅值有关。

更一般地，幅值 M 由 $|G(j\omega)|$ 给出，且相位 ϕ 由 $\angle G(j\omega)$ 给出；复数量 $G(s)$ 的幅值与角度是由 s 沿着虚轴 $(s=j\omega)$ 取值计算的。系统的频率响应由这些关于频率的函数组成，这反映出系统对于一个任意频率的正弦输入的响应。我们对分析系统的频率响应感兴趣，不仅仅是因为它可以帮助理解系统对于正弦输入是如何响应的，也是因为计算 s 沿着 $j\omega$ 轴取值时 $G(s)$ 的值被证实对确定闭环系统的稳定性是非常有用的。正如我们在第 3 章中所见，$j\omega$ 轴是稳定与不稳定的边界；在 6.4 节中，我们将看到，通过计算 $G(j\omega)$ 所提供的信息，我们可以根据开环的 $G(s)$ 确定闭环稳定性。 311

例 6.1　电容的频率响应特性

考虑如下式所描述的电容：

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

其中：v 是电压输入；i 是电流输出。确定电容的正弦稳态响应。

解答。 这个电路的传递函数为

$$\frac{I(s)}{V(s)} = G(s) = Cs$$

于是，

$$G(j\omega) = Cj\omega$$

计算幅值和相位，我们得到

$$M = |Cj\omega| = C\omega, \quad \phi = \angle(Cj\omega) = 90^\circ$$

对于单位幅值的正弦输入 v，输出 i 也是正弦曲线，其幅值为 $C\omega$，且输出相位将超前输入 90°。注意，对于这个例子，幅值与输入频率成比例，而相位与频率无关。◀

例 6.2　一个超前补偿器的频率响应特性

回顾第 5 章（式(5.70)）的超前补偿的传递函数，它等价于

$$D_c(s) = K\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}, \quad \alpha < 1 \tag{6.8}$$

(1) 以解析的方法确定其频率响应特性并从结果讨论希望得到什么结论？

(2) 对 $0.1 \leqslant \omega \leqslant 10$，用 Matlab 绘制 $D_c(j\omega)$，令 $K=1$，$T=1$，$\alpha=0.1$。并验证由(1)问中的分析所预测出的特性。

解答。

(1) 解析求值。将 $s=j\omega$ 代入式(6.8)中，得

$$D_c(j\omega) = K\frac{Tj\omega+1}{\alpha Tj\omega+1}$$

312

根据式(6.5)和式(6.6)可得幅值为

$$M = |D_c| = |K|\frac{\sqrt{1+(\omega T)^2}}{\sqrt{1+(\alpha\omega T)^2}}$$

且相位为

$$\phi = \angle(1+j\omega T) - \angle(1+j\alpha\omega T) = \arctan(\omega T) - \arctan(\alpha\omega T)$$

在很低的频率处，幅值恰好为 $|K|$，而在很高的频率处，幅值为 $|K/\alpha|$。因此，在非常高的频率处，幅值会更高。在很低的频率处，相位为零，且在很高的频率处相位又回到零。在中间频率处，$\arctan(\cdot)$ 函数的取值表明 ϕ 为正值。这些正是超前补偿的一般特性。

(2) 计算机求值。前面曾经给出了为例 3.6 进行频率响应计算的一个 Matlab 语句。类似超前补偿的频率响应的语句如下。

```
s = tf('s');
sysD = (s + 1)/ (s/10 + 1);
w=logspace(-1,2);                % determines frequencies over
                                   range of interest
[mag,phase] = bode(sysD,w);      % computes magnitude and phase
                                   over frequency range of interest
loglog(w,squeeze(mag)),grid;
axis([0.1 100 1 10])
semilogx(w,squeeze(phase)),grid;
axis([0.1 100 0 60])
```

运行产生频率响应的幅值与相位的曲线如图 6.2 所示。

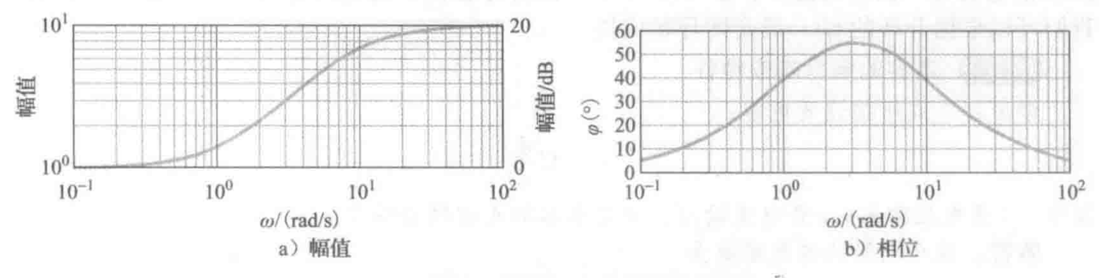


图 6.2 例 6.2 中超前补偿的幅值和相位

分析表明，低频幅值应该为 $K(=1)$，高频幅值应该为 $K/\alpha(=10)$，这两个结论都可以被幅值图证实。相位图也可以证实相位在高频处和低频处接近 0，且在中间值处为正。◀

在一些情况下，我们并不能得到好的系统模型，于是就希望通过用实验的方法来确定频率响应的幅值和相位，这时我们可以用带有变化频率的正弦曲线来激励系统。幅值 $M(\omega)$由测量在稳态下的任意频率的输出正弦曲线对输入正弦曲线的比值给出。相位 $\phi(\omega)$是输入与输出信号的相位测量差值⊖。

许多关于系统动态响应的信息可从传递函数的幅值 $M(\omega)$和相位 $\phi(\omega)$的信息中得知。在最简单的情况下，如果信号是正弦曲线，那么 M 和 ϕ 就可完全描述其响应。此外，如果输入是周期性的，则可构造傅里叶级数将输入分解为正弦曲线的和，根据每一部分的正弦曲线，计算 $M(\omega)$与 $\phi(\omega)$，这样就可以构建整体的响应。对于暂态输入，理解 M 和 ϕ 意义的最好途径就是，将频率响应$G(\mathrm{j}\omega)$与由拉普拉斯变换计算出的暂态响应相联系。例如，在图 3.19b 所示曲线中，我们描绘了系统的阶跃响应对于变化的 ζ 值的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s/\omega_n)^2+2\zeta(s/\omega_n)+1} \tag{6.9}$$

这些暂态曲线都是以 $\omega_n t$ 为时间轴进行标准化的。我们对于这些相同的 ζ 绘制了 $M(\omega)$和 $\phi(\omega)$的曲线，如图 6.3 所示，有助于看到暂态响应特性所对应的频率响应有何特点。具体地，图 3.19b和图 6.3 指出了阻尼比对系统时域响应的影响以及对相应的频率响应的影响。它们表明，系统的阻尼比可以由暂态响应的超调或由频率响应的幅值中的峰值来确定[见图 6.3a]。此外，从频率响应可以看出，ω_n 近似等于带宽——幅值从低频段的取值开始明显下降时的频率(我们将在下一段中更正式地定义带宽)。因此，上升时间可以由带宽来估计。我们也可看出，对于 $\zeta<0.5$，频域上的峰值超调近似为 $1/(2\zeta)$，所以阶跃响应中的峰值超调可由频率响应的峰值超调来估计。因此，我们看到，频率响应曲线与暂态响应曲线包含了本质上相同的信息。

⊖ 安捷伦科技公司生产了一种叫做频谱分析仪的设备，它能自动完成这些实验步骤，并加快分析过程。

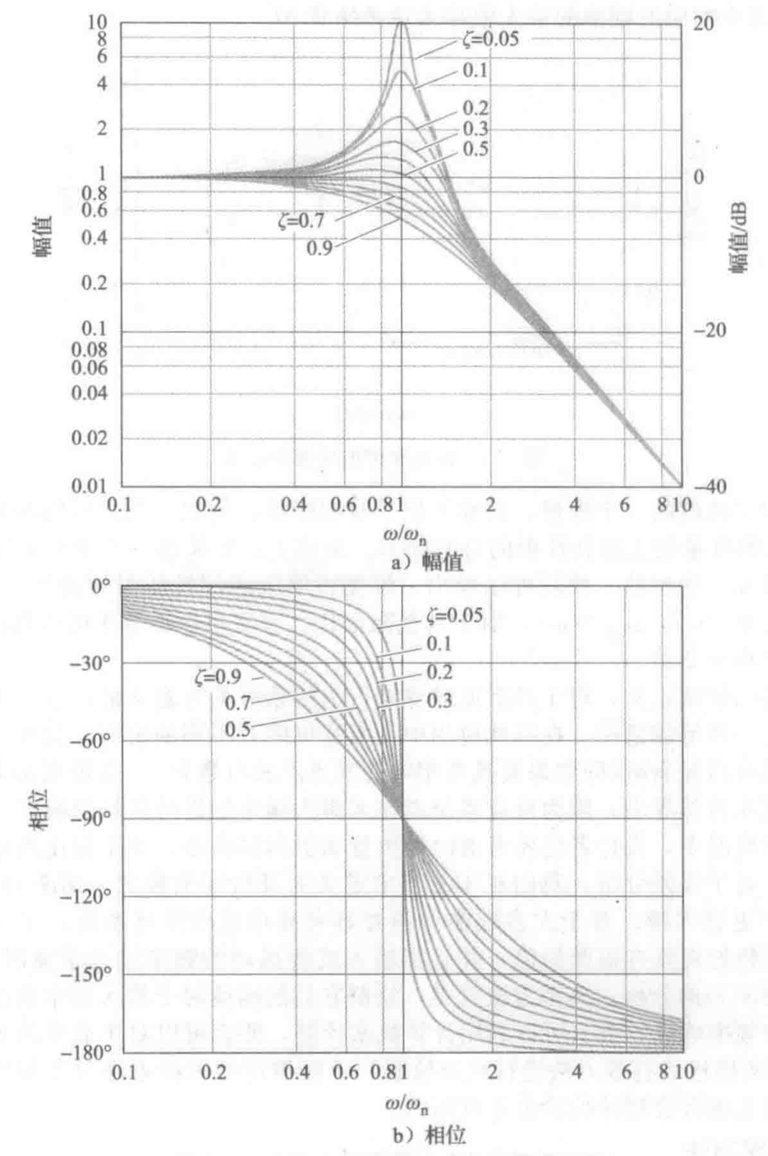


图 6.3　式(6.9)的频率响应的幅值和相位

就系统的频率响应而言，对于系统性能的一个自然的指标就是带宽，它被定义为，在系统的输出以一种令人满意的方式跟踪一个正弦输入的前提下，输入信号所能达到的最大频率。按照惯例，对于图 6.4 所示的带有正弦输入 r 的系统，带宽就是输入 r 的某一频率，在该频率处，输出 y 减小到输入的 0.707[⊖]。图 6.5 对于闭环传递函数

图 6.4　简化系统的示意图

$$\frac{Y(s)}{R(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

的频率响应形象地描绘了这个想法。此图是绝大多数闭环系统的典型情况：(1) 在较低的激励频率处，输出跟随输入（$|\mathcal{T}| \approx 1$）；(2) 在较高的激励频率处，输出停止跟随输入

⊖ 若将 1Ω 电阻上的电压作为输出量，则功率为 v^2，当 $|v| = 0.707$ 时，功率为原来的 0.5 倍。按照惯例，这称为半功率点。

($|T|<1$)。频率响应的幅值的最大值称为谐振峰值 M_r。

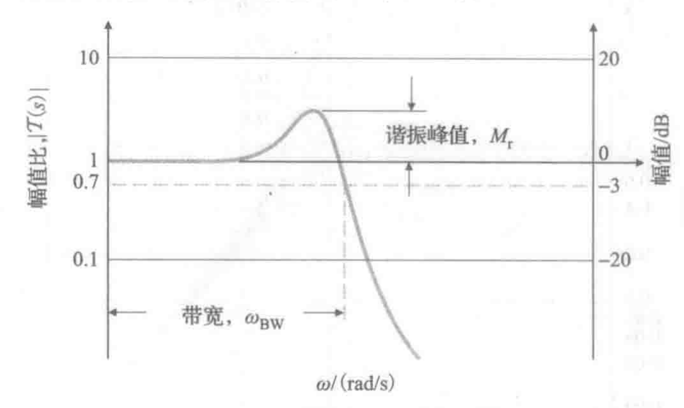


图 6.5　带宽和谐振峰值的定义

带宽是响应速度的一个度量，因此类似于时域度量，例如，上升时间和峰值时间，或作为 s 平面上的度量的主导特征根的自然频率。事实上，如果图 6.4 中的 $KG(s)$ 满足其闭环响应是由图 6.3 给出的，我们可以看出，带宽将等于闭环特征根的自然频率(即对于一个闭环阻尼比 $\zeta=0.7$，$\omega_{BW}=\omega_n$)。对于其他阻尼比，带宽也近似等于闭环特征根的自然频率，误差一般小于 2 倍。

313～316

这里所述的带宽定义，对于具有低通滤波行为的系统是有意义的，这对于任何的物理控制系统都是一种可能情况。在其他应用中，带宽可能有不同的定义。另外，如果系统的理想模型不具有高频衰减(即如果其具有相同的零点和极点数目)，其带宽是无穷大的，然而这不会出现在自然界中，因为没有系统能在无穷大频率处进行良好的响应。

在许多的情况中，设计者主要考虑的是由扰动引起的误差，而不是由跟踪输入的能力引起的误差。对于误差分析，我们对 4.1 节中定义的灵敏度函数之一的$\mathcal{S}(s)$，更感兴趣，而不是对$\mathcal{T}(s)$更感兴趣。对于大多数在低频处具有高增益的开环系统，在一个扰动输入下，$\mathcal{S}(s)$在低频处将具有很低的值，并且当输入或者扰动的频率接近带宽时，该值增加。对于$\mathcal{T}(s)$或者$\mathcal{S}(s)$的分析，典型方法就是，绘制它们的响应对于输入频率的图像。用于控制系统设计的频率响应，要么可以利用计算机来计算，要么可以对于简单的系统利用下面 6.1.1 小节中所描述的有效方法进行快速绘制。下面描述的这种方法对于加快设计过程与在计算机输出上进行合理性检验也是有用的。

6.1.1　伯德图方法

如何呈现系统的频率响应一直是一个问题，对于这个问题，人们已经研究了很长时间。在计算机出现以前，这都是由手工完成的；因此，能够快速完成绘图曾经显得很有用处。最有用的用于手工绘制的技术是由 H. W. 伯德在贝尔实验室于 1932～1942 年这段时间中发展的。这种技术使得绘图变得快捷，且对于控制系统设计而言，这种技术也是足够准确的。大多数的设计者现今都有使用电脑程序的途径，从而减少了对于手工绘图的需求；然而，培养良好的直观认识能力，从而快速辨识计算机结果的错误依然是重要的，为此需要执行合理性检验的能力且在某些情况用手工确定近似结果。

伯德图方法中的主要思想就是以对数刻度画幅值曲线，以线性刻度画相位曲线。这种方法允许我们将每个单独项以图形的形式简单地叠加起来，从而绘制一个高阶的 $G(\mathrm{j}\omega)$ 上述方法在附录 B 中进行了讨论。这种叠加方法是可行的，因为带有零极点因子的复杂表达可写在极坐标(或矢量)形式中，如：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2}{\boldsymbol{s}_3\boldsymbol{s}_4\boldsymbol{s}_5}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2}}{r_3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_3}r_4\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_4}r_5\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_5}}=\left(\frac{r_1r_2}{r_3r_4r_5}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5)}\tag{6.10}$$

以上黑体代表一个矢量。从式(6.10)注意到，将各项的相位直接叠加起来从而获得复合表达的相位，$G(\mathrm{j}\omega)$。此外，因为

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{r_1 r_2}{r_3 r_4 r_5}$$

于是得到

$$\log_{10}|G(\mathrm{j}\omega)| = \log_{10} r_1 + \log_{10} r_2 - \log_{10} r_3 - \log_{10} r_4 - \log_{10} r_5 \tag{6.11}$$

317

我们看到，各项对数的叠加给出了复合表达的幅值的对数。频率响应通常以两条曲线来表示：幅值的对数对于 $\lg\omega$(以下 $\log_{10}()$简称为 $\lg()$)的曲线和相位对于 $\lg\omega$ 的变化而变化曲线。这两条曲线一起组成了系统的一个伯德图。因为

$$\lg M e^{\mathrm{j}\phi} = \lg M + \mathrm{j}\phi \lg e \tag{6.12}$$

我们看到伯德图展现了 $G(\mathrm{j}\omega)$的对数值的实部和虚部。在电子学中，标准上以分贝(dB)或“功率 dB”度量功率增益[⊖]：

$$|G|_{\mathrm{dB}} = 10\lg\frac{P_2}{P_1} \tag{6.13}$$

其中：P_1 和 P_2 为输入和输出功率。因为功率是与电压的平方成正比的，所以功率增益也可由

$$|G|_{\mathrm{dB}} = 20\lg\frac{V_2}{V_1} \tag{6.14}$$

给出。因此，我们在绘制伯德图时，以分贝对 $\lg\omega$ 绘制幅值曲线，以度对 $\lg\omega$ 绘制相位曲线。在本书中，我们以 $\lg|G|$ 对 $\lg\omega$ 的形式给出伯德图；另外，我们在幅值图的右端标记了以分贝为单位的轴，这样读者可以选择自己偏好的表示方式来进行阅读。然而，对于频率响应图，我们并非绘制功率图，式(6.14)可能有些令人误解。如果幅值数据是由 $\lg|G|$ 导出的，那么习惯上将它们画在 lg 刻度上，但是确定坐标刻度仅与 $|G|$ 有关(不带“lg”)。如果幅值数据是以 dB 为单位给出的，那么垂直刻度就是线性的，满足 $|G|$ 的一个 10 倍频代表 20dB。

用伯德图研究系统频率响应特性的优势如下。

(1) 动态补偿器的设计可完全基于伯德图。

(2) 伯德图可通过实验的方法确定。

(3) 系统伯德图可通过一系列(串)简单叠加完成，相当方便。

(4) 相对于线性刻度，对数刻度可提供了更大的频率范围，使得这些频率可以仅在一张图中展示。

对控制系统工程师而言，理解伯德图技术很重要，有几个原因：这些知识使工程师不仅可以处理简单问题，而且可以在计算机结果上对更多复杂情况进行合理性检验。通常近似值能被用于快速描绘频率响应与推断稳定性，也可用于确定所需的动态补偿的形式。最后，对于绘图方法的理解可用于解释由实验方法获得的频率响应数据。

318

第 5 章中，我们写过开环传递函数的形式为

$$KG(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots} \tag{6.15}$$

因为它曾是由关于增益 K 的根轨迹来确定稳定程度的最方便的形式。在讨论频率响应时，我们仅对于沿 $\mathrm{j}\omega$ 轴计算 $G(s)$感兴趣，所以为了更加方便起见，以 $\mathrm{j}\omega$ 代替 s，且将传递函数写成伯德形式，即

$$KG(\mathrm{j}\omega) = K_o(\mathrm{j}\omega)^n\frac{(\mathrm{j}\omega\tau_1+1)(\mathrm{j}\omega\tau_2+1)\cdots}{(\mathrm{j}\omega\tau_a+1)(\mathrm{j}\omega\tau_b+1)\cdots} \tag{6.16}$$

这种形式导致增益 K_o 与在很低频率处的传递函数的幅值直接相关。事实上，对于 $n=0$ 的

[⊖] 贝尔实验室的研究人员最初用 bel(以实验室创始人 Alexander Graham Bell 的名字命名)来衡量功率增益。然而，这个单位实在是太大了，因此我们采用分贝或 dB(1/10bel)来作为更合适的单位。这一单位有时也简写为 db。

系统，K_o 就是式(6.16)中在 $\omega=0$ 处的增益，也等于系统的直流增益。尽管直接的计算将会把式(6.15)形式的传递函数转化为一个等价的式(6.16)形式的传递函数，但请注意，在这两个表达式中 K 和 K_o 通常并不会取到相同的值。

传递函数还可以根据式(6.10)和式(6.11)写出。例如，令

$$KG(\mathrm{j}\omega)=K_o\frac{\mathrm{j}\omega\tau_1+1}{(\mathrm{j}\omega)^2(\mathrm{j}\omega\tau_a+1)} \tag{6.17}$$

那么

$$\angle KG(\mathrm{j}\omega)=\angle K_o+\angle(\mathrm{j}\omega\tau_1+1)-\angle(\mathrm{j}\omega)^2-\angle(\mathrm{j}\omega\tau_a+1) \tag{6.18}$$

且

$$\begin{aligned}\lg|KG(\mathrm{j}\omega)|=&\lg|K_o|+\lg|\mathrm{j}\omega\tau_1+1|-\lg|(\mathrm{j}\omega)^2|\\&-\lg|\mathrm{j}\omega\tau_a+1|\end{aligned} \tag{6.19}$$

在分贝单位下，式(6.19)变成

$$\begin{aligned}|KG(\mathrm{j}\omega)|_{\mathrm{dB}}=&20\lg|K_o|+20\lg|\mathrm{j}\omega\tau_1+1|-20\lg|(\mathrm{j}\omega)^2|\\&-20\lg|\mathrm{j}\omega\tau_a+1|\end{aligned} \tag{6.20}$$

目前为止，我们所讨论过的各种系统的所有传递函数都可由下面三类的项组合而成：

(1) $K_o(\mathrm{j}\omega)^n$；

(2) $(\mathrm{j}\omega\tau+1)^{\pm1}$；

319

(3) $\left[\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_n}+1\right]^{\pm1}$。

首先我们将讨论每个单独项的绘图以及这些项对于包含所有上述项的复合图的影响；然后我们将介绍如何绘制复合曲线。

(1) 对于 $K_o(\mathrm{j}\omega)^n$，因为

$$\lg K_o|(\mathrm{j}\omega)^n|=\lg K_o+n\lg|\mathrm{j}\omega|$$

所以，该项的幅值图是一条斜率为 $n\times$(20dB/10 倍频)的直线。n 取不同的值，如图 6.6 所示。$K_o(\mathrm{j}\omega)^n$ 是唯一一类影响最低频率处的斜率的项，这是因为所有其他类的项在此区域均为常数。绘制这条曲线的最简单的方法就是定位频率 $\omega=1$ 且在该频率处画出 $\lg K_o$。之后通过该点画斜率为 n 的直线[⊖]。$(\mathrm{j}\omega)^n$ 的相位是 $\varphi=n\times90°$；它与斜率无关，因此相位曲线是一条水平直线：当 $n=-1$ 时，相位为 $-90°$；当 $n=-2$ 时，相位为 $-180°$；当 $n=+1$ 时，相位为 $+90°$ 等等。

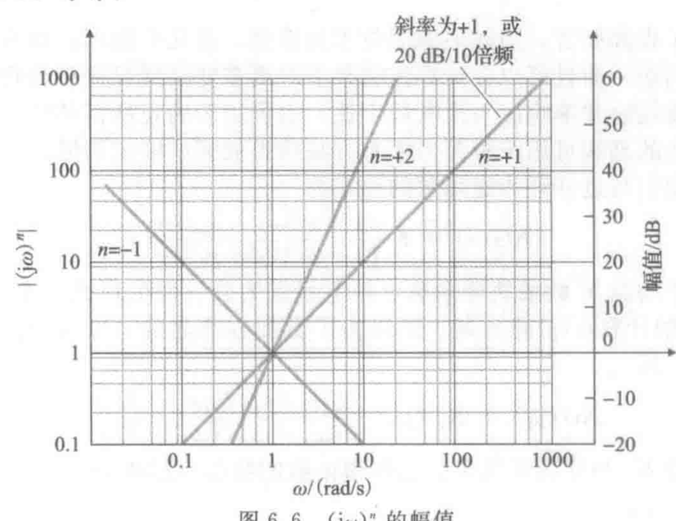


图 6.6 $(\mathrm{j}\omega)^n$ 的幅值

⊖ 以分贝作单位，斜率为 $n\times$20dB/10 倍频或 $n\times$6dB/2 倍频(一个 2 倍频代表频率改变 2 倍)。

(2) 对于 $(j\omega t+1)$，该项的幅值在频率很低处趋近于一条渐近线且在频率很高处趋近于另一条渐近线。

(a) 对于 $\omega\tau\ll1$，$j\omega\tau+1\approx1$。

(b) 对于 $\omega\tau\gg1$，$j\omega\tau+1\approx j\omega\tau$。

如果我们称 $\omega=1/\tau$ 为分离点，则我们知道分离点以下的幅值曲线近似为常数(=1)，而分离点以上的幅值曲线表现为与第一类的 $K_o(j\omega)^n$ 项相似。$G(s)=10s+1$ 的例子画在图 6.7 中，该图说明了两条渐近线在分离点处是如何相交的，以及分离点处的实际的幅值曲线落在渐近线上方 1.4 倍(或 +3dB)处。(若该项在分母上，实际曲线将在分离处的渐近线下方 0.707 或 −3dB 处)。注意，该项对分离点下方的复合幅值曲线仅有微小的影响，这是因为在该区域，它的值等于 1(=0dB)。该项的幅值曲线在高频处的斜率为 +1(或 +20dB/10 倍频)。相位曲线也可利用跟随低频和高频渐近线简单画出：

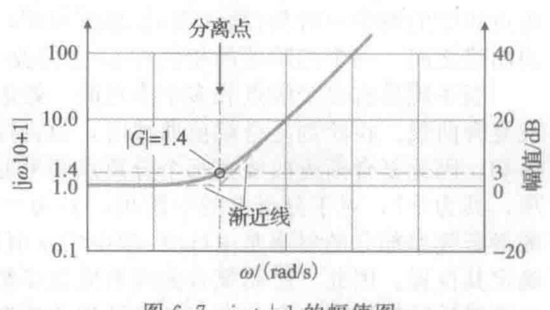


图 6.7　$j\omega t+1$ 的幅值图；$\tau=10$

(a) 对于 $\omega\tau\ll1$，$\angle1=0°$。

(b) 对于 $\omega\tau\gg1$，$\angle j\omega\tau=90°$。

(c) 对于 $\omega\tau\approx1$，$\angle(j\omega\tau+1)\approx45°$。

在 $\omega\tau\approx1$ 处，$\angle(j\omega+1)$ 曲线与一条渐近线相切，该渐近线从 $\omega\tau=0.2$ 处取值为 0°运动到 $\omega\tau=5$ 处取值为90°，如图 6.8 所示。图中也展示了相位图的三条渐近线(虚线)并说明了实际曲线在它们的交点处偏离渐近线 11°。这类项在低于分离点的频率处，对于复合相位与幅值曲线的影响都没有超过 10 倍，这是因为在低频段，该项的幅值是 1(或 0dB)且相位小于 5°。

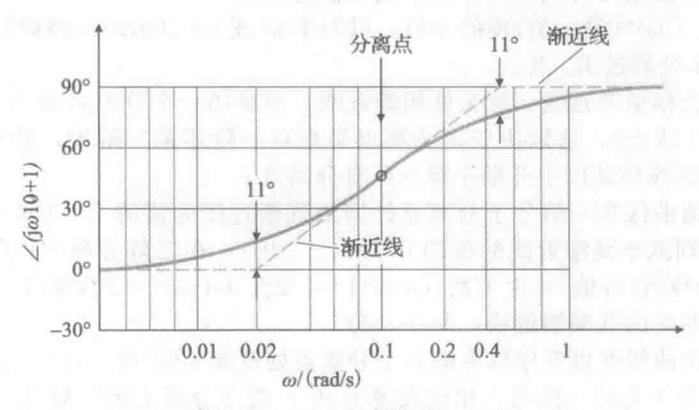


图 6.8　$j\omega t+1$ 的相位图；$\tau=10$

320
~
321

(3) $[(j\omega/\omega_n)^2+2\zeta(j\omega/\omega_n)+1]^{\pm1}$。这一项的表现方式相似于第二类项，但在细节上有所不同：其分离点为 $\omega=\omega_n$。幅值曲线在分离点处幅值以 +2(+40dB/10 倍频)改变斜率(若该项在分母上，则为 −2 或 −40dB/10 倍频)。相位变化为 ±180°，并且贯穿分离点区域的过渡曲线随阻尼比 ζ 变化。图 6.3 展现了当该项在分母上时，几个不同阻尼比 ζ 下的幅值和相位。注意到分离点频率之上的幅值渐近线具有斜率 −2(或 −40dB/10 倍频)，并且贯穿分离点区域的过渡曲线很大程度上依赖于阻尼比。对于这类分母上的二阶项，注意到

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{2\zeta},\quad \omega=\omega_n \tag{6.21}$$

则可通过上式给出一个简单的确定这个过渡曲线的方法。当该项处于分子上时，幅值将会是图 6.3a 所示曲线的倒数。

在绘制相位曲线的过渡曲线时，不存在如式(6.21)的简单规则，因此我们将需要参考图 6.3b 所示曲线来绘制一个准确的相位图。然而，我们可以得到一个简单的绘制过渡曲线的粗略想法，注意到当 $\zeta=0$ 时，它为一个阶跃函数，而当 $\zeta=1$ 时，其符合具有相同分离点频率的两个一阶项(第二类)的绘图规则；所有 ζ 的中间值的曲线落在这两条极端情况的曲线之间。一个二阶项的相位在 ω_n 处总是 $\pm 90°$。

当系统具有多个极点和多个零点时，绘制频率响应需要将各部分的频率响应曲线组合成复合曲线。在绘制复合幅值曲线时，值得注意的是渐近线的斜率等于各单独曲线的斜率的和。因此复合渐近曲线在每个分离点频率处具有整数的斜率改变量：对于分子上的一阶项，其为 $+1$，对于分母上的一阶项，其为 -1；且对于二阶项，其为 ± 2。另外，渐近线的最低频率部分的斜率是由 $(j\omega)^n$ 项中的 n 值决定的，且可通过绘制 $\omega=1$ 处的点 $K_o\omega^n$ 来确定其位置。因此，绘制复合曲线的完整步骤为：画出渐近线的最低频的部分，然后按频率渐增的顺序依次在各分离点处连续地改变渐近线的斜率，以及最后使用前面介绍的用于第二类和第三类的过渡曲线的绘制规则来画出实际曲线。

复合相位曲线就是各单独曲线的叠加和。将各单独项的相位曲线在图上排列出来，以便复合相位尽可能地接近于各单独项的曲线，这样就可以求得这些曲线的叠加和。绘制复合相位的快速但粗略的方法是：从低于最低频的分离点处开始画相位曲线并令其为 $n\times 90°$。然后按照频率递增的顺序，在各分离点处使相位具有阶跃性的改变。对于一阶项，其相位的阶跃改变量为 $\pm 90°$ 且对于二阶项为 $\pm 180°$。分子上的分离点象征相位的正的阶跃变化，而分母上的分离点象征着负的相位阶跃变化[⊖]。到目前为止，绘图规则仅考虑了左半平面的零极点。对于右半平的奇点，绘图规则将会有所变化，这将在本节的最后加以讨论。

322

伯德图规则总结

(1) 将传递函数改写为式(6.16)所给出的伯德形式。

(2) 确定 $K_o(j\omega)^n$(第一类)项的 n 值。以斜率 n(或 $n\times$20dB/10 倍频)画低频段的渐近线，使其在 $\omega=1$ 处通过 K_o 点。

(3) 完成复合幅值渐近线。延长低频渐近线，直至第一个分离点处为止。然后将斜率阶跃式地增加 ± 1 或 ± 2，这取决于该分离点是来自一阶还是二阶项，是来自分子还是分母。继续绘制渐近线使其以上升顺序穿过所有分离点。

(4) 近似幅值曲线在一阶分子分离点处增加到渐近线的值的 1.4 倍(+3dB)，在一阶分母分离点处，则减小到渐近线的值的 0.707(−3dB)。在二阶分母(分子)分离点处，根据图 6.3a，谐振峰值(谷值)可由关系 $|G(j\omega)|=1/2\zeta(|G(j\omega)|=2\zeta)$ 得到。

(5) 画相位曲线的低频渐近线，$\phi=n\times 90°$。

(6) 近似相位曲线在以升序排列的各个分离点处改变 $\pm 90°$ 或 $\pm 180°$，并将其作为一种绘图参考。对于分子上的一阶项，相位改变 $+90°$；对于分母上的一阶项，改变 $-90°$。对于二阶项，改变 $\pm 180°$。

(7) 画出每个单独相位曲线的渐近线，以便确定它们对应于步骤(6)中所述的相位阶跃的相位改变是接近近似曲线还是远离近似曲线。每个单独的相位曲线如图 6.8 或图 6.3b 所示。

(8) 直观地叠加各个相位曲线。如果要求有大约 $\pm 5°$ 的精度，可以使用网格绘制。如果较低的精度是可以接受的，则可通过目测完成复合曲线。应该清楚，曲线起始于最低频渐近线，而终止于最高频渐近线，且其接近于中间频率的渐近线的程度取决于各分离点之间的相互接近程度。

⊖ 这种近似方法是由巴黎的同事向我们提出的。

例 6.3 实零极点的伯德图

绘制系统的幅值和相位伯德图，其传递函数为

$$KG(s)=\frac{2000(s+0.5)}{s(s+10)(s+50)}$$

323

解答。

(1) 我们将传递函数改写成如式(6.16)的伯德形式，即

$$KG(j\omega)=\frac{2[(j\omega/0.5)+1]}{j\omega[(j\omega/10)+1][(j\omega/50)+1]}$$

(2) 我们注意到，$j\omega$ 项是一阶的，并且在分母上，所以 $n=-1$。因此由第一项定义的低频渐近线为

$$KG(j\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

因为最低频分离点在 $\omega=0.5$ 处，所以该渐近线对于 $\omega<0.1$ 是有效的。该项幅值图具有斜率为-1(或-20dB/10 倍频)的渐近线。由于渐近线通过 $\omega=1$，幅值为 2 的点，我们可以以此确定其幅值，尽管复合曲线并不通过该点，这是由于分离点在 $\omega=0.5$ 处造成的，如图 6.9a所示。

(3) 我们得到余下的渐近线，也如图 6.9a 所示：第一个分离点在 $\omega=0.5$ 处，而且其为分子上一阶项，所以在此处有$+1$的斜率变化。因此，我们画一条斜率为 0 的直线与原来的斜率为-1 的直线相交。之后我们画一条斜率为-1 的直线与之前的那条线相交于 $\omega=10$。最后我们画斜率为-2 的直线与之前的斜率为-1 的直线相交于 $\omega=50$。

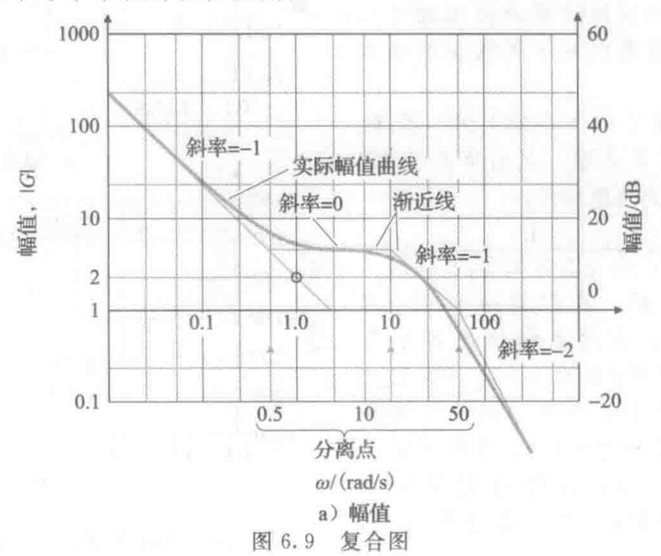
(4) 在远离分离点处，实际曲线大致与渐近线相切，在 $\omega=0.5$ 的分离点处，实际曲线在位于渐近线上方的 1.4 倍($+3$dB)处，在 $\omega=10$ 和 $\omega=50$ 的分离点处，为 0.707 倍(-3dB)。

(5) 因为 $2/j\omega$ 的相位为$-90°$，所以图 6.9b 所示的相位曲线在最低频率处以$-90°$开始。

(6) 结果如图 6.9c 所示。

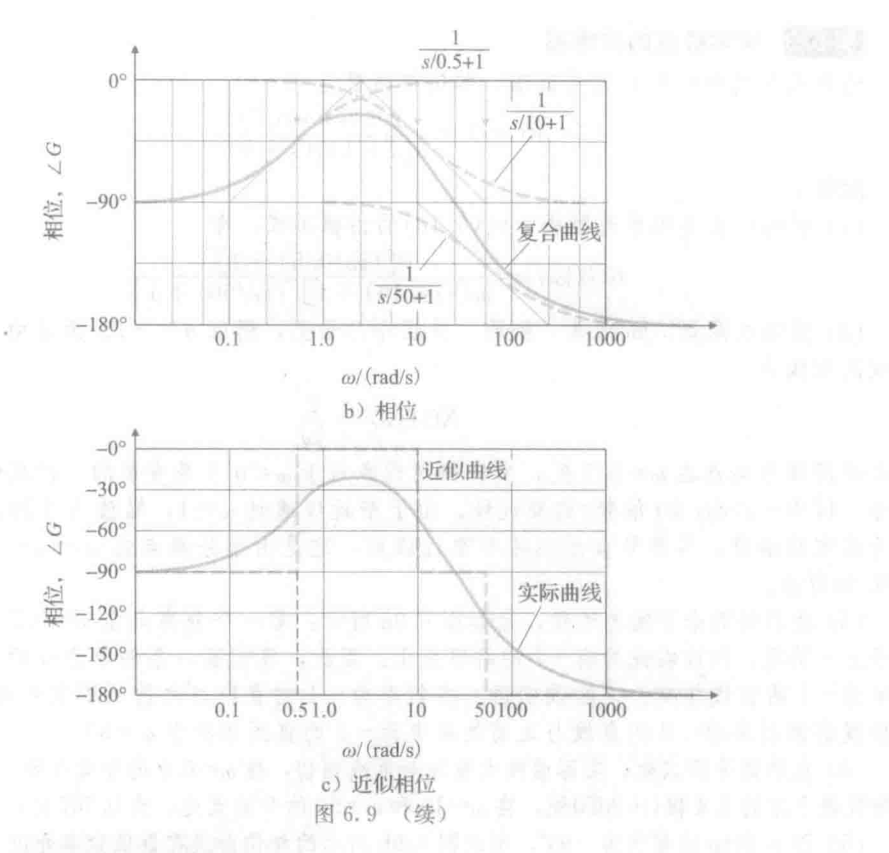
(7) 每个相位曲线如图 6.9b 的虚线所示，它们对每一项都具有正确的相位改变，将它们竖直地排列起来，以便使它们的相位改变量对应于图 6.9c 所示的近似曲线的相位的阶跃改变。值得注意的是，复合曲线接近于每一单个的曲线。

(8) 将图中每个虚线简单叠加起来得到图 6.9b 所示实线的复合曲线。从图中可以看到，将各单独的相位曲线在垂直方向上排列，使所求的图形叠加变得非常简单，这是因为复合曲线依次接近于每个单独的相位曲线。



a）幅值

图 6.9 复合图



b）相位

c）近似相位

图 6.9 （续）

例 6.4 具有复极点的伯德图

作为第二个例子，画出如下系统的频率响应：

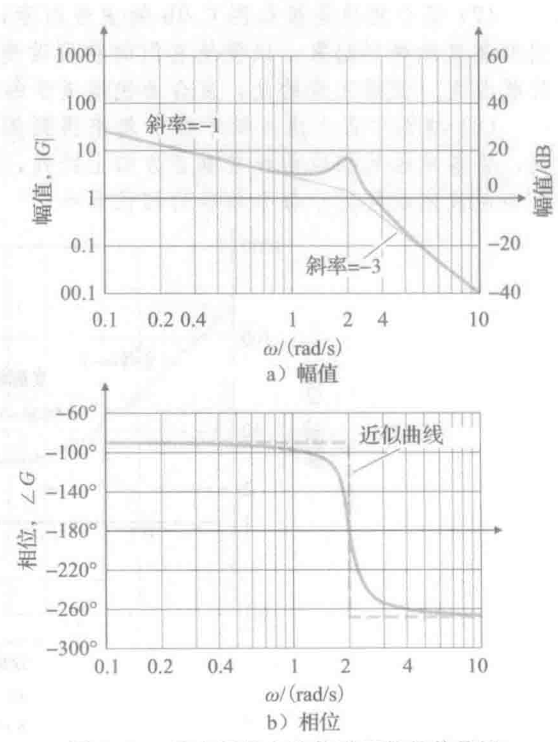
$$KG(s)=\frac{10}{s[s^2+0.4s+4]} \quad (6.22)$$

解答。对于像这样的系统，其伯德图的绘制要比之前例子中的系统更加困难，这是因为渐近线之间的过渡曲线依赖于阻尼比；但是可以应用例 6.3 所阐述的基本方法。

这个系统包含了一个分母上的二阶项。下面执行所有的绘图步骤，我们将式(6.22)改写成如式(6.16)的伯德形式：

$$KG(s)=\frac{10}{4}\frac{1}{s(s^2/4+2\times0.1s/2+1)}$$

从低频渐近线开始，我们有 $n=-1$ 和 $|G(j\omega)|\approx2.5/\omega$。该项的幅值图斜率为 -1(-20dB/10 倍频)且过 $\omega=1$、幅值为 2.5 的点，如图 6.10a 所示。对于二阶极点，注意到 $\omega_n=2$ 和 $\zeta=0.1$。在极点的分离点频率处，$\omega=2$，渐近线斜率变为 -3(-60dB/10 倍频)。在极点分离点处，



a）幅值

b）相位

图 6.10 具有复极点的传递函数的伯德图

实际曲线的幅值与渐近线上的幅值比为$1/2\zeta=1/0.2=5$。对于此例，对应于$1/s$这项的相位曲线从$\phi=-90°$开始，之后在$\omega=2$处下降到$-180°$，这是由于如图 6.10b所示的极点导致的，在更高的频率处，曲线趋近于$-270°$。由于阻尼比较小，所以阶梯近似是一种很好的近似方法。真正的复合相位曲线如图 6.10b 所示。◀

324～326

例 6.5　复零极点的伯德图：带柔性附件的人造卫星

作为第三个例子，画出一个带有二阶项的系统的伯德图。传递函数描述了一个由小阻尼比弹簧连接的两个质量相等的物体所组成的机械系统。施加的外力和位置检测都作用在同一个物体上。对于传递函数，选择时间标度，可使复零点的谐振频率等于 1。该传递函数为

$$KG(s)=\frac{0.01(s^2+0.01s+1)}{s^2[(s^2/4)+0.02(s/2)+1]}$$

解答。下面执行所有的绘图步骤，我们从低频渐近线$0.01/\omega^2$开始。渐近线斜率为-2(-40dB/10 倍频)，并且过$\omega=1$、幅值为 0.01 的点，如图 6.11a 所示。在零点的分离点处，$\omega=1$，斜率变为 0，并一直保持到极点的分离点$\omega=2$处，斜率变回-2。为了修正得到实际的曲线，我们将零点的分离点$\omega=1$处的幅值画在渐近线下方的幅值比为$2\zeta=0.01$处。在极点的分离点$\omega=2$处，将幅值画在渐近线上方的幅值比为$1/(2\zeta)=1/0.02=50$处。幅值曲线上有一对峰值：一个负脉冲，后面跟随着一个正脉冲。图 6.11b表明了系统的相位曲线从$\phi=-180°$(对应$1/s^2$项)开始，由于具有零点，在$\omega=1$处，相位跳变 180°，达$\phi=0°$，由于具有极点，在$\omega=2$处相位减少 180°重新回到$\phi=-180°$。因为系统的阻尼比很小，所以阶梯近似是极为理想的(我们并未在图 6.11b 上未画出此近似曲线，这是因为不容易与实际相位曲线区分)。因此，实际复合相位曲线在$\omega=1$和$\omega=2$之间接近于方波。

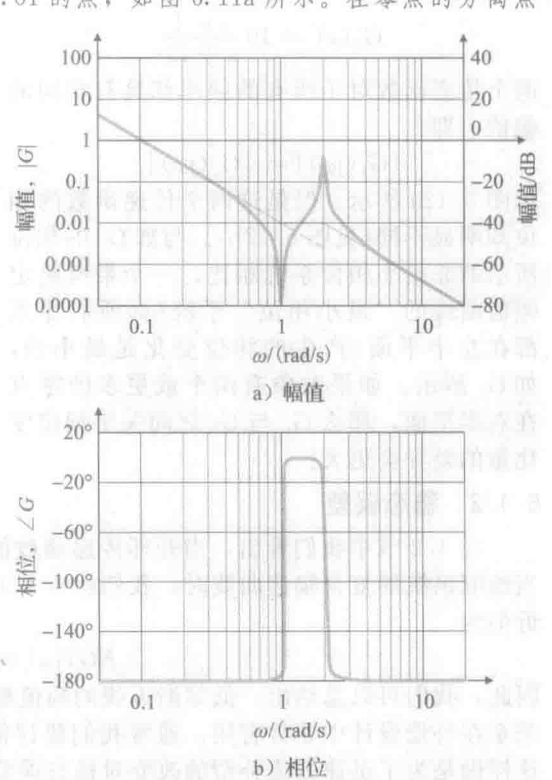


图 6.11　具有复零极点的传递函数的伯德图

在实际的设计中，伯德图是由计算机来绘制的。然而掌握确定伯德图行为的这种能力是一种有用的技术，因为它使得设计者能够看出补偿参数的改变对于频率响应的影响。允许设计者更快地实现最好的设计。◀

例 6.6　复零极点的计算机辅助伯德图

利用 Matlab 重新完成例 6.5 的内容。

解答。要使用 Matlab 得到伯德图，我们要调用函数 bode，其语句如下。

327

```
s = tf('s');
sysG = 0.01*(s^2 + 0.01*s + 1)/((s^2)*((s^2 )/4 + 0.01*s + 1));
[mag, phase, w] = bode(sysG);
loglog(w,squeeze(mag))
semilogx(w,squeeze(phase))
```

这些命令会得到一个与图 6.11 所示的极为相符的伯德图。若要得到以 dB 为单位的幅值曲线，最后的三行可用如下语句替换。

```
bode(sysG).
```

◀

非最小相位系统

对于一个具有右半平面零点的系统，在计算输入频率从零到无穷大的频率响应时，其相位经历的改变，要比同幅值下的所有零极点都在左半平面的系统的要大。这样的系统称为非最小相位系统。这个概念可根据附录WA[⊖]中的图WA.3的结构推导出来。当零点在右半平面时，在零点的分离点处，相位是减小的，而不是像零点处于左半平面的系统那样，相位一般是增加的。考虑传递函数为

$$G_1(s)=10\,\frac{s+1}{s+10}$$

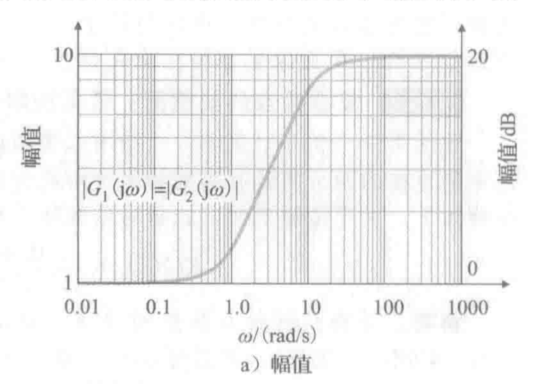
$$G_2(s)=10\,\frac{s-1}{s+10}$$

两个传递函数对于所有的频率都具有相同的幅值，即

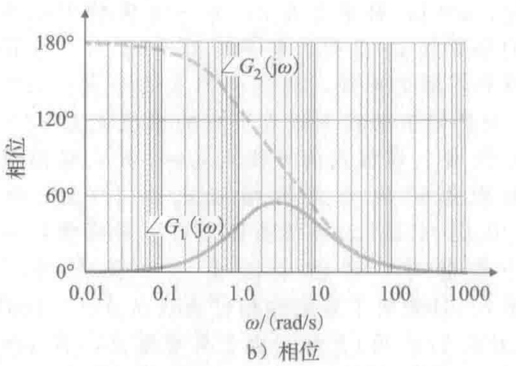
$$|G_1(\mathrm{j}\omega)|=|G_2(\mathrm{j}\omega)|$$

如图6.12a所示。但是这两个传递函数的相位却明显不同(见图6.12b)。与如G_2的相位所示的非最小相位系统相比，一个带有给定幅值曲线的“最小相位”系统(即所有零点都在左半平面)产生的相位变化是最小的，如G_1所示。如果对象有两个或更多的零点在右半平面，那么G_1与G_2之间关于相位变化量的差异会更大。

328
~
329



a）幅值



b）相位

图6.12 最小和非最小相位系统的伯德图

6.1.2 稳态误差

在4.2节中我们看出，当开环传递函数的增益增加时，反馈系统的稳态误差会减小。当绘制系统的复合幅值曲线时，我们从6.1.1小节得知，在很低的频率处，开环传递函数近似为

$$KG(\mathrm{j}\omega)\approx K_o(\mathrm{j}\omega)^n \tag{6.23}$$

因此，我们可以总结出，低频渐近线的幅值越大，则闭环系统的稳态误差就会越小。这个关系在补偿设计中非常有用。通常我们要评估用于提高稳定性的几种可相互替代的方法，这样做是为了迅速知道补偿的改变对稳态误差的影响。

对于一个由式(6.16)的形式给出的系统——即在式(6.23)中，$n=0$(一个0型系统)——低频渐近线是一个常数且其开环系统的增益K_o等于位置误差常数K_p。对于带有单位阶跃输入的单位反馈系统，根据在4.2.1小节曾使用的终值定理(3.1.6小节)，稳态误差可以由下式给出：

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$

对于一个4.2.1小节中定义的1型单位反馈系统，其中式(6.23)中的$n=-1$，其低频渐近线斜率为-1。根据式(6.23)，低频渐近线的幅值是与增益相关的；因此，我们可以直接从伯德图上再次读到增益K_o/ω。式(4.37)告诉我们速度误差常数为

$$K_v=K_o$$

⊖ 见www.fpe7e.com。

其中对于一个带有单位斜坡输入的单位反馈系统，稳态误差为

$$e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$

在 1 型系统中，确定 K_v 的值的最简单的方法就是读取低频渐近线在 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 处的幅值，这是因为这条渐近线就是 $A(\omega)=K_v/\omega$。在有些情况中，最低频率的分离点的频率将小于 $\omega=1\mathrm{rad/s}$；因此，需要将渐近线延长至 $\omega=1\mathrm{rad/s}$ 处以便直接读出 K_v。或者，也可以在低频渐近线上的任意频率处读出幅值，然后根据 $K_v=\omega A(\omega)$来进行计算。

例 6.7 计算 K_v

作为一个确定稳态误差的例子，一个开环系统的伯德图如图 6.13 所示。假设有如图 6.4所示的单位反馈系统，确定速度误差常数 K_v。

330

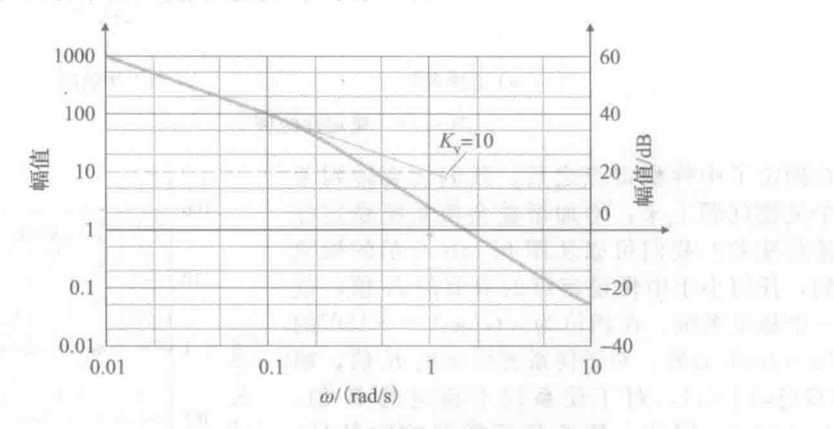


图 6.13 由系统 $KG(s)=\frac{10}{s(s+1)}$的伯德图确定 K_v

解答。因为低频处的斜率为−1，我们知道系统为 1 型系统。低频渐近线的延长线在幅值为 10 处穿过 $\omega=1\mathrm{rad/s}$。因此，$K_v=10$，并且单位反馈系统对单位斜坡输入的稳态误差将为 0.1。或者，在 $\omega=0.01$ 处，我们有 $|A(\omega)|=1000$；因此，根据式(6.23)我们得到

$$K_o=K_v\approx\omega|A(\omega)|=0.01(1000)=10$$

6.2 中性稳定

在电子通信时代早期，大多数设备的性能是由它们的频率响应来评判的。因此，很自然地，在引入反馈放大器时，检验反馈存在时的稳定性就要基于它的响应。

假设系统的闭环传递函数已知。那么将它的分母分解因式，我们可以通过简单地观察分母在分解因式形式下(因为因子直接给出了系统的特征根)的特征根的实部的正负来判断系统的稳定性。然而，闭环传递函数经常是未知的；实际上，理解根轨迹方法的主要目的在于能够通过开环传递函数得到闭环传递函数分母的因式。当然，另一种判断闭环稳定性的方法就是计算开环传递函数的频率响应 $KG(j\omega)$，然后对响应进行检测。注意到这种方法也不需要对闭环传递函数的分母分解因式。在这一节中我们将介绍这个方法的基本原理。

假设我们有一个如图 6.14a 定义的系统，其根轨迹如图 6.14b 所示；即如果 K 大于 2，系统不稳定。其中性稳定点位于虚轴上，即 $K=2$ 且 $s=j1.0$。此外，我们知道 5.1 节介绍的根轨迹上的所有点都具有以下性质：

331

$$|KG(s)|=1,\quad \angle G(s)=180^\circ$$

在中性稳定点处，我们知道这些根轨迹条件对于 $s=j\omega$ 成立，所以，

$$|KG(j\omega)|=1,\quad \angle G(j\omega)=180^\circ \tag{6.24}$$

因此一个中性稳定(即所定义的 K 使得闭环特征根落在虚轴上)的系统的伯德图会满足

式(6.24)的条件。图 6.15 画出了系统在不同 K 值下的频率响应，其根轨迹画在图 6.14b 中。对应于 $K=2$ 时的幅值响应曲线在 $\omega=1$ 处经过幅值为 1 的点，在相同的频率处，相位曲线经过 180°，如式(6.24)中所述。

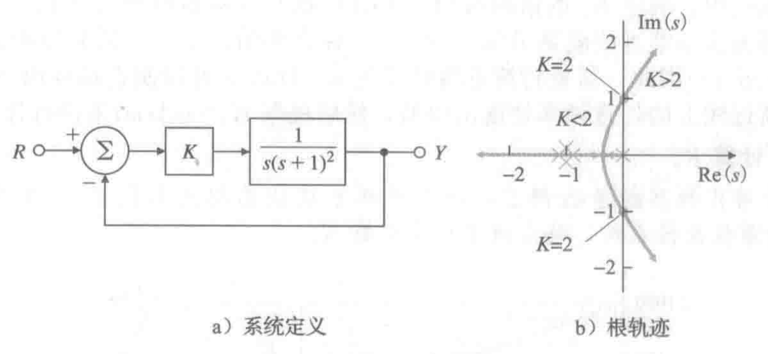


图 6.14　稳定性的例子

在确定了中性稳定点之后，我们就要转到考虑一个关键问题上来：增加增益会使系统稳定性变好还是变差？我们可以从图 6.14b 所示的根轨迹看到，任何小于中性稳定点的取值的 K 值，就对应一个稳定系统。在相位为 $\angle G(\mathrm{j}\omega)=-180°$ 的频率($\omega=1\mathrm{rad/s}$)处，对于使系统稳定的 K 值，幅值 $|KG(\mathrm{j}\omega)|<1$，对于使系统不稳定的 K 值，$|KG(\mathrm{j}\omega)|>1$。因此，基于开环频率响应特性，我们有如下试验性的稳定条件：

$$|KG(\mathrm{j}\omega)|<1, \quad \angle G(\mathrm{j}\omega)=-180° \tag{6.25}$$

这一稳定准则适用于所有的增大增益会导致不稳定且 $|KG(\mathrm{j}\omega)|$ 只穿过幅值(=1)的直线一次的系统，也就是最常见的系统。然而，也存在这样的系统，增大增益可以导致系统由不稳定转变到稳定，稳定条件为

$$|KG(\mathrm{j}\omega)|>1, \quad \angle G(\mathrm{j}\omega)=-180° \tag{6.26}$$

也存在 $|KG(\mathrm{j}\omega)|$ 曲线多于一次地穿过幅值(=1)的直线的情况。解决这种不确定问题的一种方法就是简要绘制根轨迹图，这种方法通常足以解决这个问题。另外的更精确的解决这个不明确问题的方法就是利用奈奎斯特(Nyquist)稳定判据，这也就是下一节的主要内容。然而，由于奈奎斯特稳定判据的应用是十分复杂的，因此，在学习奈奎斯特稳定判据时，重要的是要牢记本节内容，也就是说，对于绝大多数系统，闭环稳定性和开环频率响应之间存在一种简单的关系。

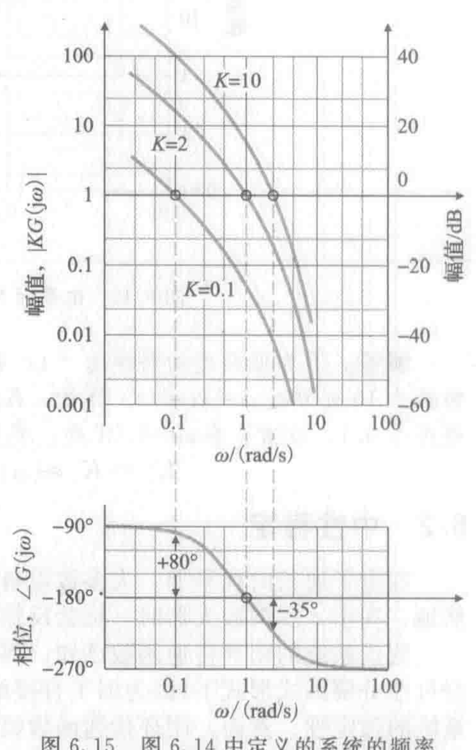


图 6.15　图 6.14 中定义的系统的频率响应的幅值和相位

6.3　奈奎斯特稳定判据

对于大多数系统，如我们在之前章节看到过的系统，增加增益最终会导致系统不稳定。正是在反馈控制设计的早期，增益与稳定裕度之间的这种关系曾被假定是普遍存在的。但是设计者们在实验室中偶然发现这个关系自相矛盾了；也就是，当增益减小时，放大器会变得不稳定。这一争议性的观测结果引起了设计者们的困惑，这引起了当时贝尔电话实验室的奈奎斯特于 1932 年对此问题进行了研究。他的研究解释了这一偶然现象且得

332
~
333

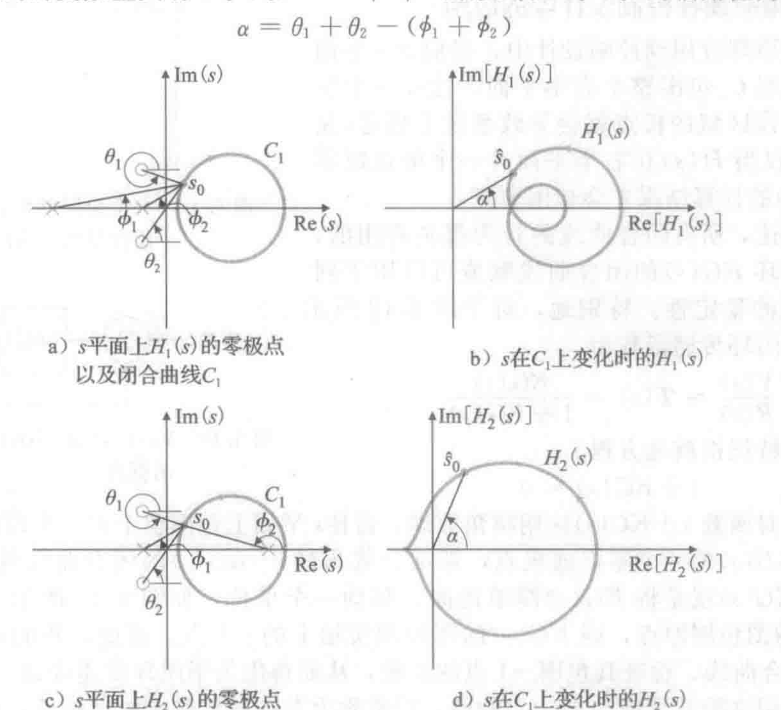
到了一种更加复杂且严密的分析方法。自然地，他的判据被称为奈奎斯特稳定判据。它是以复变函数的辐角原理[㊀]为基础的，我们将在本节对辐角原理作简要介绍，更详尽的介绍在 www.fpe7e.com 附录 WD 中。

奈奎斯特稳定判据将开环频率响应与系统右半平面的闭环极点的个数联系起来。学习奈奎斯特稳定判据将允许读者从一个复杂系统的频率响应来判断稳定性，这些复杂系统，可能具有一次或多次谐振，其幅值曲线可能多次穿越幅值为1的直线，和(或)其相位曲线可能多次穿越相位为180°的直线。对于这样的系统，利用奈奎斯特稳定判据，就可以通过频率响应判断其稳定性。此方法对处理开环不稳定系统、非最小相位系统和具有纯时滞(传输时延)的系统都十分有用。

6.3.1 辐角原理

考虑传递函数 $H_1(s)$，其零极点在 s 平面上的位置如图 6.16a 所示。当 s 沿闭合曲线 C_1 顺时针方向取值时，计算 $H_1(s)$ 的值(因此，称为闭合曲线赋值)。选择 s_0[㊁]为测试点来进行计算。得到的复数量具有 $H_1(s_0)=\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|e^{j\alpha}$ 的形式。$H_1(s_0)$ 的辐角值为

$$\alpha=\theta_1+\theta_2-(\phi_1+\phi_2)$$



a) s平面上$H_1(s)$的零极点以及闭合曲线C_1

b) s在C_1上变化时的$H_1(s)$

c) s平面上$H_2(s)$的零极点以及闭合曲线C_1

d) s在C_1上变化时的$H_2(s)$

图 6.16 闭合曲线赋值

当 s 从 s_0 开始，以顺时针方向遍历 C_1 运动时，图 6.16b 中的 $H_1(s)$ 的角度 α 将会改变(增加或减小)，但只要 C_1 的内部没有极点或零点，角度就不会经历一个 360°的改变。这是因为组成 α 的角度中没有一个角度可以运动一周。当 s 遍历 C_1 运动时，角度 θ_1、θ_2、ϕ_1、ϕ_2 或增加或减小，但当 s 重新回到 s_0 时，这些角度都变回自己原来的值，并未转 360°。这就是说，$H_1(s)$ 的图(图 6.16b)不会包围原点。这一结论来源于以下事实，α 是图 6.16a 所示的那些角的和，所以当 s 完成了一个对 C_1 的完整遍历之后，能够使 α 改变 360°的唯一方法就是，C_1 包围一个极点或零点。

㊀ 有时也称为"Cauchy 辐角原理"。

㊁ 原书中图 6.16 中 S_0 的下标中正文中也不一致。——译者注

现在考虑函数 $H_2(s)$，它的零极点分布如图 6.16c 所示。注意，在 C_1 内部它有一个奇(极)点。我们再次从测试点 s_0 开始。当 s 顺时针方向遍历 C_1 时，角度 θ_1、θ_2 和 ϕ_1 对于 α 的作用是变化的，但是一旦 s 回到 s_0 时，它们也回到了各自的起始值。相比之下，由 C_1 中的极点产生的角 ϕ_2，在经过 C_1 的一个完整的遍历之后，经历 $-360°$ 的改变。因此，$H_2(s)$ 的辐角也经历了相同的改变，这导致了 $H_2(s)$ 逆时针包围原点一周，如图 6.16d 所示。如果闭合曲线 C_1 包含的不是一个极点而是一个零点，复变函数的行为是相似的。这样，在 $H_2(s)$－平面中，C_1 的映射也会包围原点一周，不过这次的方向是顺时针的。

因此我们得到辐角原理的实质是：

一个复变函数的闭合曲线映射将包围原点 $Z-P$ 次，其中 Z 和 P 是函数在闭合曲线内部的零点数与极点数

例如，如果 C_1 内部的零极点个数相等，那么角度相互抵消，也就不存在对原点的包围。

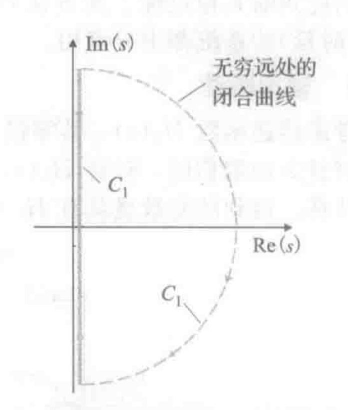


图 6.17 一个包围整个右半平面的闭合曲线 C_1 的 s 平面图

6.3.2 辐角原理在控制设计中的应用

将辐角原理应用到控制设计中，我们令 s 平面中的闭合曲线 C_1 包围整个右半平面，这样一个位于 s 平面中该区域的极点就会导致系统不稳定(见图 6.17)。仅当 $H(s)$ 在右半平面有一个极点或零点时，$H(s)$ 的计算结果才会包围原点。

如前所述，所有闭合曲线的行为都是有用的，这是由于开环 $KG(s)$ 的闭合曲线赋值可以用于判断闭环系统的稳定性。特别地，对于图 6.18 所示的系统，其闭环传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

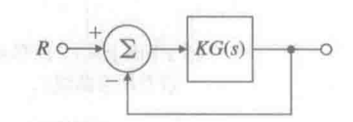


图 6.18 $Y(s)/R(s)=KG(s)/[1+KG(s)]$ 的框图

因此，闭环特征根就是方程

$$1+KG(s)=0$$

的解且我们对函数 $1+KG(s)$ 应用辐角原理。若使 s 平面上包围整个右半平面的闭合赋值曲线包含 $1+KG(s)$ 的一个零点或极点，那么计算出的 $1+KG(s)$ 的闭合曲线就会包围原点。注意，$1+KG(s)$ 就是将 $KG(s)$ 简单地向右移动一个单位，如图 6.19 所示。所以，如果 $1+KG(s)$ 的图包围原点，则 $KG(s)$ 的图包围实轴上的 -1 点。因此，我们可以画出开环 $KG(s)$ 的闭合曲线，检查其包围 -1 点的周数，从而得出关于闭环传递函数 $1+KG(s)$ 包围原点周数。用这种方法描绘 $KG(s)$ 的值，通常称为奈奎斯特图或极坐标图，这是因为我们画的是 $KG(s)$ 的幅值相对于它的角度的图。

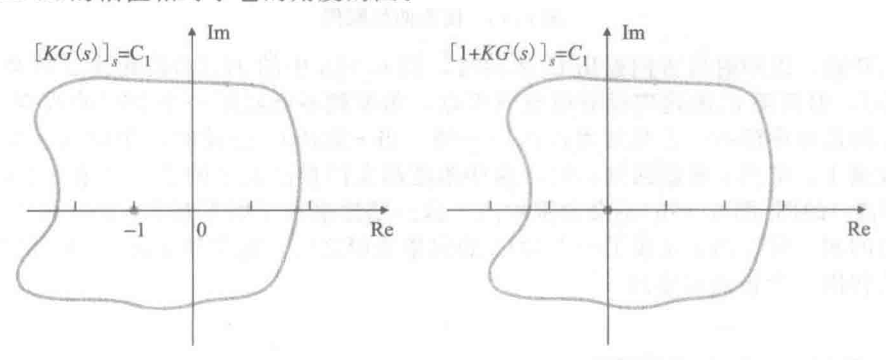


图 6.19 $KG(s)$ 和 $1+KG(s)$ 的奈奎斯特图

334
~
336

为了判断曲线对于原点的包围是由零点还是极点引起的，我们将 $1+KG(s)$ 写成关于 $KG(s)$ 的零极点形式，即

$$1+KG(s)=1+K\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{a(s)+Kb(s)}{a(s)} \tag{6.27}$$

式(6.27)表明，$1+KG(s)$ 的极点也是 $G(s)$ 的极点。有理由假设 $G(s)$ 的极点(或 $a(s)$ 的因子)是已知的，并以此求得它在右半平面的极点分布。现在假设 $G(s)$ 在右半平面没有极点，那么 $KG(s)$ 包围 -1 点一周就说明 $1+KG(s)$ 在右半平面有一个零点，因此也存在一个不稳定的闭环系统的特征根。

注意到顺时针方向的闭合曲线 C_1 包围了 $1+KG(s)$ 的一个零点——也就是如果一个闭环系统的特征根——从而导致 $KG(s)$ 顺时针包围 -1 点，这样我们就可以推广上述想法。同样的，如果 C_1 包围了 $1+KG(s)$ 的一个极点——也就是如果系统有一个不稳定的开环极点——那么 $KG(s)$ 就会逆时针包围 -1 点一周。此外，如果 $1+KG(s)$ 有两个极点或零点在右半平面，那么 $KG(s)$ 就会包围 -1 点两次，等等。顺时针包围的周数 N，等于其位于右半平面的零点(闭环系统特征根)的个数 Z，减去位于右半平面的开环极点个数 P，即

$$N=Z-P$$

这就是奈奎斯特稳定判据的核心思想。

任何 $KG(s)$ 所代表的物理系统在无穷大频率处都具有零响应(即极点个数大于零点个数)，根据上述事实，就可以得到一个绘制 $KG(s)$ 的简便方法。这意味着，当 s 在 C_1 的无穷远处的大圆弧部分取值(见图 6.17)时，$KG(s)$ 对于那一部分的 C_1 变成了原点附近的具有无穷小值的点。因此，我们令 s 由 $-\mathrm{j}\infty$ 至 $+\mathrm{j}\infty$(实际上是由 $-\mathrm{j}\omega_h$ 到 $+\mathrm{j}\omega_h$，其中 ω_h 足够大以至于对于所有 $\omega>\omega_h$，满足 $|KG(\mathrm{j}\omega)|$ 远远小于 1)遍历虚轴，就可以完成对物理系统 $KG(s)$ 的完全赋值。在 6.1 节中，求 $KG(s)$ 的频率响应中就曾讨论过 s 从 0 到 $+\mathrm{j}\infty$ 时 $KG(s)$ 的取值。因为 $G(-\mathrm{j}\omega)$ 是 $G(\mathrm{j}\omega)$ 的共轭复数，我们可以通过将 $0\leqslant s\leqslant+\mathrm{j}\infty$ 的部分关于实轴做对称求得 $-\mathrm{j}\infty\leqslant s<0$ 的部分，从而获得完整的 $KG(s)$ 图。因此我们看到，在所有情况下，都可以通过考察极坐标图中的开环传递函数的频率响应来判断闭环稳定性。在某些应用中，物理系统的模型经过了简化，以至于移除了一些高频动态特性。这样所得到的降阶传递函数可能具有相同数目的零极点。在这种情况下，就需要考虑 C_1 在无穷远处的大圆弧。

实际中，许多系统都表现得与 6.2 节所述的系统类似，所以读者不必执行完整的 $KG(s)$ 赋值并检查包围 -1 点的圈数；对于频率响应的简单观测就足以判断稳定性。然而，对于一个复杂系统，6.2 节所给出的最简单的规则就变得不明确了，读者就要进行全面的分析，总结如下：

337

确定奈奎斯特图的步骤如下。

(1) 对于 $-\mathrm{j}\infty\leqslant s\leqslant+\mathrm{j}\infty$ 画 $KG(s)$，首先对于 $\omega=0$ 至 ω_h 计算 $KG(\mathrm{j}\omega)$，其中 ω_h 要足够大，以满足对于任意 $\omega>\omega_h$，$KG(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值都小到可以被忽略的程度。然后将图像关于实轴作对称，并将其加入到之前的图像当中。对于任何物理系统，$KG(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值在高频处都将会是很小的。奈奎斯特图将总会关于实轴对称。通常奈奎斯特图可以通过 Matlab 中的 m 文件 NYQUIST 产生。

(2) 计算奈奎斯特图顺时针包围 -1 点的周数，记周数为 N。具体过程：在任意方向上画从 -1 点到 $+\infty$ 的一条直线。然后计算这条直线从左向右穿越 $KG(s)$ 的次数。如果包围是逆时针方向的，则 N 是负的。

(3) 确定 $G(s)$ 不稳定(右半平面)的极点数，其个数记为 P。

(4) 计算不稳定的闭环极特征根的个数 Z，有

$$Z=N+P \tag{6.28}$$

为了使系统稳定，我们希望有 $Z=0$；也就是说，在右半平面没有特征方程的根。

现在，我们将对一些例子用奈奎斯特图来判断稳定性，在这一过程中需要严格执行上述步骤。

例 6.8　奈奎斯特图用于二阶系统

确定图 6.20 所定义系统的稳定性。

解答。图 6.20 所示的系统的根轨迹如图 6.21 所示。这表明系统对于任意的 K 值都是稳定的。对于 $K=1$，$KG(s)$ 的频率响应的幅值画在图 6.22a 中，其相位画在图 6.22b 中；这就是在我们感兴趣的频率范围内给出系统频率响应与表示 $G(s)$ 取值的典型的伯德方法。图 6.23 以奈奎斯特(极坐标)图的形式再次画出了这些信息。注意图 6.23 中点 A，B，C，D 和点 E 是如何从伯德图映射到奈奎斯特图的。位于实轴下方的，从 $G(s)=+1(\omega=0)$ 到 $G(s)=0(\omega=+\infty)$ 的圆弧可以根据图 6.22 得到。图 6.17 中的 C_1 在无穷远处的圆弧部分，在图 6.23 中转变为 $G(s)=0$。因此，只要简单地将实轴下方的圆弧关于实轴做对称，就可以完成当 s 遍历 C_1 时的 $G(s)$ 的连续赋值。这样就产生了闭合曲线在实轴之上的部分，完成了奈奎斯特(极坐标)图。因为图上没有包围 -1 点，所以 $N=0$。又因为在右半平面不存在 $G(s)$ 的极点，则 $P=0$。由式(6.28)我们总结出 $Z=0$，这说明对于 $K=1$，闭环系统没有不稳定的特征根。此外，不同的 K 值会简单改变极坐标图的幅值大小，但是没有正的 K 值会导致其包围 -1 点，这是因为当 $KG(s)=0$ 时，极坐标图总会穿越负实轴。因此，奈奎斯特稳定判据证实了根轨迹方法所得到的结论：对于所有的 $K>0$，闭环系统是稳定的。

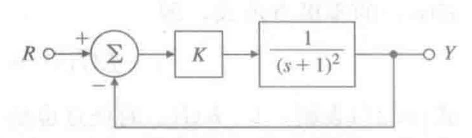


图 6.20　例 6.8 的控制系统

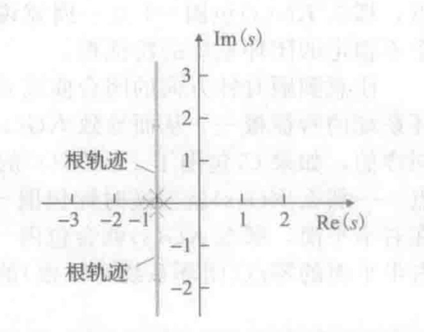


图 6.21　$G(s)=1/(s+1)^2$ 关于 K 的根轨迹

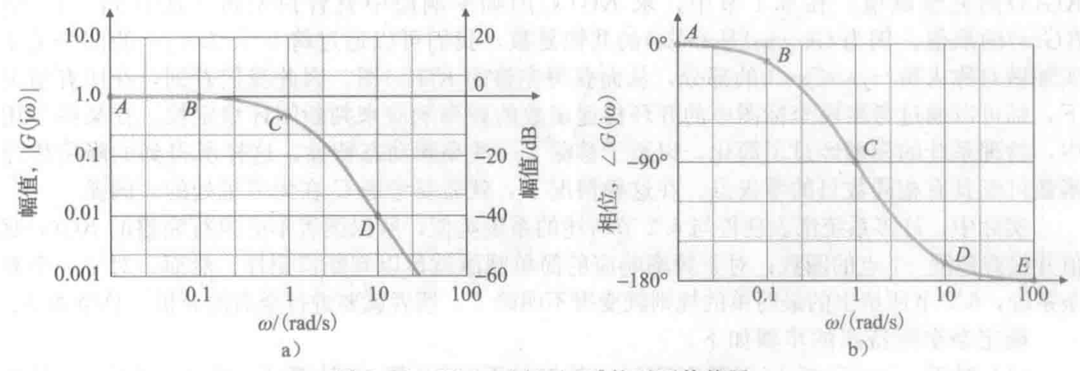


图 6.22　$G(s)=1/(s+1)^2$ 的开环伯德图

产生奈奎斯特图的 Matlab 语句为

```
s = tf('s');
sysG = 1/(s+1)^2;
nyquist(sysG);
```

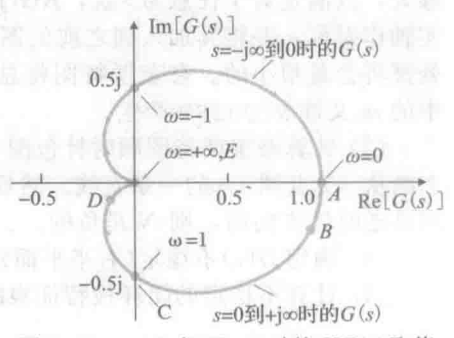


图 6.23　$s=C_1$ 与 $K=1$ 时的 $KG(s)$ 取值的奈奎斯特图[⊖]

通常，控制系统设计工程师对于确定使系统稳定的增益 K 的范围要比检测某一特定的 K 值下的稳定性更感兴趣。为了满足这一要求，而避免对多个增益值画多个奈奎斯特图，可以将判据稍做改动。为此我们用 K 来刻画 $KG(s)$，同时对增益 K 的某一范围，检测 $G(s)$ 来确定稳定性。因为 $KG(s)$ 包围 -1

⊖ 这个奈奎斯特图的形状是一个心脏形曲线，即心形的平面曲线。这个名称是由 de Castillon 在 1741 年的“Philosophical Transactions of the Royal Society”中首先使用的。心脏形曲线这个名称也在光学中使用。

点等价于$G(s)$包围$-1/K$点，所以上述方法是可行的。因此，我们仅需考虑$G(s)$并计算其包围$-1/K$点的周数，而不需要处理$KG(s)$。

338～340

将上述想法应用于例 6.8，我们看到，奈奎斯特图不会包围$-1/K$点。对于正的K，$-1/K$点将沿负实轴移动，因此$G(s)$不会包围$-1/K$点。

也存在某些$K<0$的值，对于它们，奈奎斯特图表明了系统是稳定的；特别地，如$-1<K<0$。这个结果可通过绘制0°轨迹来验证。

例 6.9　奈奎斯特图用于三阶系统

作为第二个例子，考虑系统$G(s)=1/[s(s+1)^2]$，其闭环系统定义在图 6.24 中。通过奈奎斯特判据判断其稳定性。

图 6.24　例 6.9 的控制系统

解答。系统与在 6.2 节中所讨论过的系统相同。图 6.14b 所示的根轨迹表明，系统对于小的K值是稳定的，但是对于大的K值是不稳定的。图 6.25 中的$G(s)$的幅值与相位被转移到奈奎斯特图中，如图 6.26 所示。注意图 6.25 所示的伯德图上的点 A、B、C、D 和 E 是如何映射到图 6.26 所示的奈奎斯特图上的。另外，无穷远处的大圆弧是由开环极点$s=0$引起的。这个极点在$\omega=0$处产生了$G(s)$的一个无穷大的幅值；事实上，虚轴上的任何处的一个极点都将在无穷远处产生一个圆弧。为了正确判断$-1/K$点的包围周数，我们必须在正确的半平面上画出这个圆弧：它是如图 6.26 所示那样穿越正实轴，还是穿越负实轴？也有必要确定这个圆弧是扫过180°(见图 6.26)、360°还是540°。

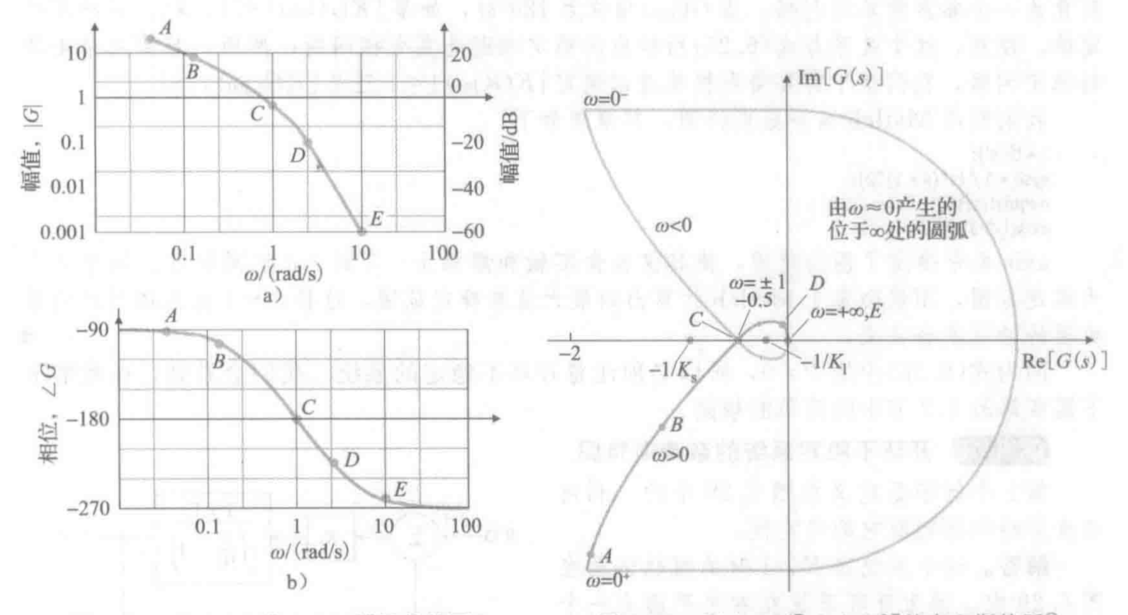


图 6.25　$G(s)=1/[s(s+1)^2]$的伯德图　　图 6.26　$G(s)=1/[s(s+1)^2]$的奈奎斯特图[⊖]

一个简单的巧妙方法就可以充分回答这个问题。我们调整闭合曲线C_1，使其在极点周围有一个在右侧(见图 6.27)或者在左侧的小绕行。在右侧或者左侧对最终稳定问题没有影响，但是为了方便起见，应该令其从右侧绕过原点，因为这使得闭合曲线C_1内部没有极点，同时使得P值等于0。由于$G(s)$的相位是s与各个极点连线的角度和的相反数，我们看到，奈奎斯特图的赋值结果在刚好位于$s=0$的极点下方处为$+90°$，之后穿越正实轴，在刚好位于该极点上方处变化到$-90°$。如果$s=0$处有两个极点，那么奈奎斯特图在无穷远处将有一个完

⊖ 这个奈奎斯特图是一个环索线，即“扭曲的带子”。这个曲线是由 Barrow 于 1670 年首先研究的。

整的 360°圆弧，对于三个或更多极点的情况，可依此类推。此外，对于虚轴上的任意位置的一个极点，也会出现 180°的顺时针圆弧，但与图 6.26 所示的例子的方向不同。

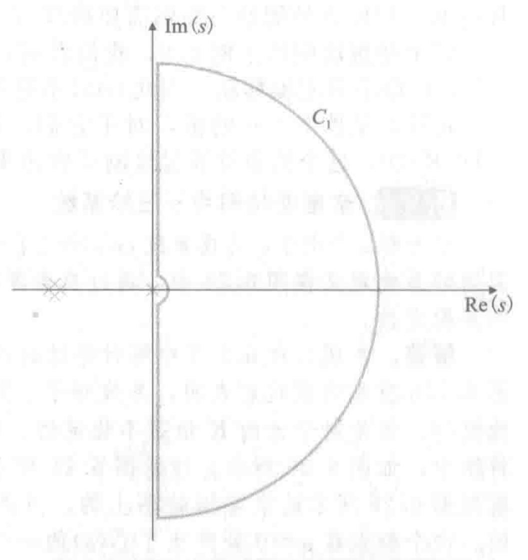


图 6.27 例 6.9 中系统的包围右半平面的闭合曲线 C_1

奈奎斯特图在 $\omega=1$ 处穿越实轴，同时 $|G|=0.5$，如伯德图所示。当 $K>0$，$-1/K$ 的位置有两种可能情况：在奈奎斯特图的两个封闭的环形中，或者完全在奈奎斯特闭合曲线之外。对于大的 K 值（见图 6.26 的 K_1），$-0.5<-1/K<0$将会落在两个封闭的环形中；因此 $N=2$ 且 $Z=2$，这说明存在两个不稳定的特征根。这发生于 $K>2$ 时。对于小的 K 值（见图 6.26 的 K_s），$-1/K$ 落在封闭的环形之外；因此 $N=0$，且所有的特征根都是稳定的。所有这些信息都同图 6.14b 所示的根轨迹一致（当 $K<0$ 时，$-1/K$ 落在正实轴上，那么 $N=1$，这意味着 $Z=1$ 且系统有一个不稳定的特征根。0°根轨迹可以证实这个结果）。

对于这个系统以及许多类似的系统，基于开环频率响应，用于判断稳定性的包围判据可简化为一个非常简单的判据：当 $G(j\omega)$相位为 180°时，如果 $|KG(j\omega)|<1$，那么系统是稳定的。注意，这个关系与式(6.25)所给出的稳定准则是完全相同的；然而，若使用奈奎斯特稳定判据，我们就不需要得到根轨迹以确定 $|KG(j\omega)|<1$ 还是 $|KG(j\omega)|>1$。

我们利用 Matlab 画奈奎斯特图。其语句如下。

341~343

```
s = tf('s');
sysG = 1 / (s*(s + 1)^2);
nyquist(sysG)
axis([-3 3 -3 3])
```

axis 命令确定了图的范围，使其仅包含实轴和虚轴上−3 到+3 之间的点。如果不人为规定范围，图就会基于 Matlab 计算出的最大值来确定范围，这样在−1 点区域附近的最重要的特征就会丢失。◀

因为式(6.28)中的 $P\neq 0$，所以必须注意开环不稳定的系统。我们会看到，在此情况下需要修改 6.2 节中的简单的规则。

例 6.10 开环不稳定系统的奈奎斯特图

第三个例子是定义在图 6.28 中的。利用奈奎斯特判据判断它的稳定性。

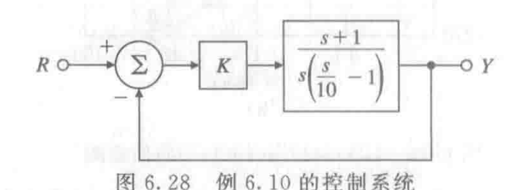


图 6.28 例 6.10 的控制系统

解答。这个系统当 $K>1$ 时的根轨迹画在图 6.29 中。因为开环系统在右半平面有一个极点，所以它是不稳定的。开环伯德图如图 6.30所示。注意 $|KG(j\omega)|$ 的表现行为与极点处于左半平面时的相同。然而，$\angle G(j\omega)$增加 90°而不是像通常那样在极点处减小。任何带有右半平面极点的系统都是不稳定的；因此通过实验的方法来确定它的频率响应是很困难[⊖]的，这是因为对于正弦输入，系统从来不会达到一个稳态正弦响应。然而根据 6.1 节的规则来计算传递函数的幅值和相位是可行的。因为式(6.28)中的 P 为+1，所以右半平

⊖ 若要通过实验的方法确定一个不稳定的控制对象的频率响应，就要对其加入镇定反馈，之后测量输入输出的幅值与相位，并为整个系统提供一定范围的频率的输入。

面的极点影响了奈奎斯特包围判据。

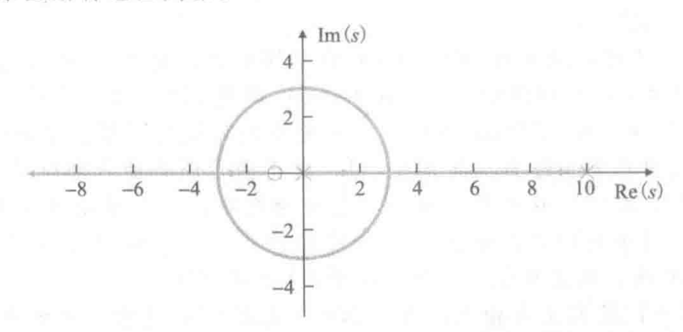
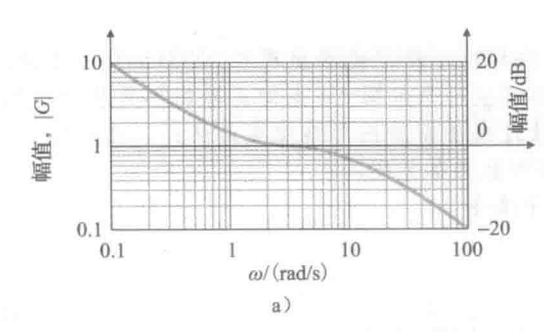


图 6.29　$G(s)=(s+1)/s[(s/10-1)]$的根轨迹



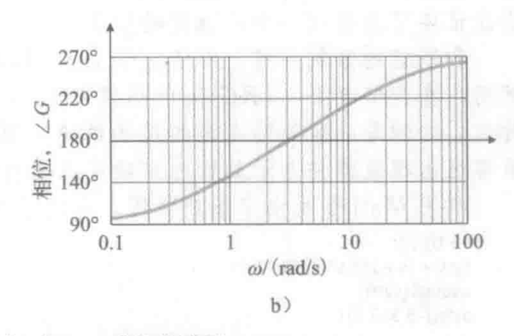
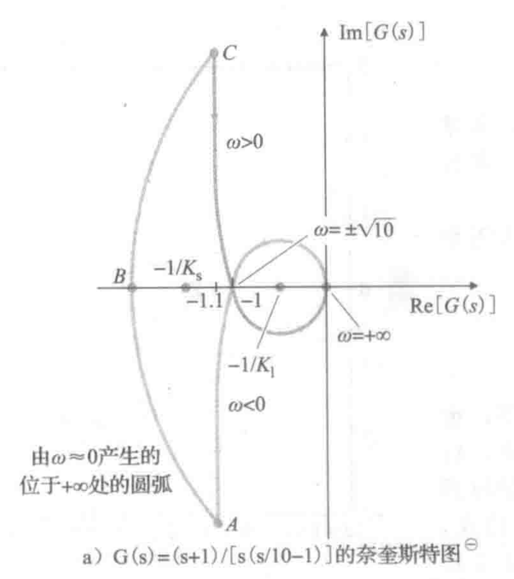
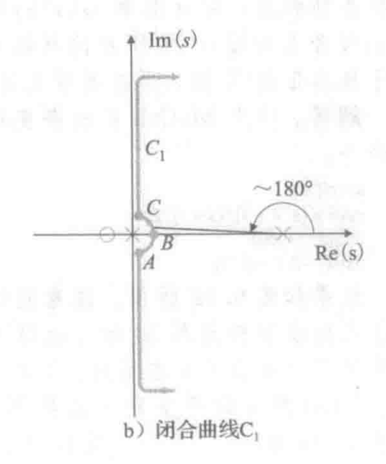


图 6.30　$G(s)=(s+1)/s[(s/10-1)]$的伯德图

像前几个例子那样，我们将图 6.30 所示的频率响应信息转化到图 6.31a 所示的奈奎斯特图中。和之前一样，图 6.31b 中 C_1绕过 $s=0$ 的极点，这在图 6.31a 中的无穷远处产生了一个大圆弧。这个圆弧穿越负实轴，这是由于右半平面极点导致了 180°的相位改变，如图 6.31b 所示。



a）G(s)=(s+1)/[s(s/10−1)]的奈奎斯特图[⊖]



b）闭合曲线C_1

图 6.31　例 6.10

⊖ 这个奈奎斯特图的形状是一个环索线。

实轴穿越出现在$|G(s)|=1$处，这是因为在伯德图中，当$\angle G(s)=180°$时，$|G(s)|=1$，这发生于$\omega\approx 3\text{rad/s}$处。

闭合曲线展示了两种依赖于$K(>0)$值的不同行为。对于大的K值（见图6.31a的K_1），其逆时针方向包围-1（图中为$-1/K_1$）一周；因此$N=-1$。然而，由于右半平面的极点，即$P=1$，则$Z=N+P=0$，所以没有不稳定的系统特征根且系统对于$K>1$稳定。对于小的K值（见图6.31a的K_s）有$N=+1$，这是由于闭合曲线顺时针包围-1点（图中为$-1/K_s$）一周，且$Z=2$，这表明有两个不稳定特征根。这些结论可以由图6.29所示的根轨迹定性验证，其中我们可以看出，小的K值产生了根轨迹位于右半平面（不稳定）的部分，且对于大K值，两支根轨迹都向左半平面（稳定）穿越。

若$K<0$，则$-1/K$在正实轴上，所以$N=0$且$Z=1$，这表明系统将有一个不稳定的闭环极点。0°根轨迹表明，当从$s=+10$的极点运动到无穷远处时，根轨迹的一支消失了；因此证实了总会有一个不稳定特征根。

和所有的系统一样，对于$\angle G(j\omega)=180°$的相位，稳定边界出现在$|KG(j\omega)|=1$处。然而，在此情况下，$|KG(j\omega)|$必须大于1，以产生一个包围-1点的正确的周数从而达到稳定。这种与一般规则完全相反的结论可以通过奈奎斯特图严格确定；然而，在实际中，通常画出根轨迹并基于其行为来确定正确的规则会更加方便。

344～346

利用Matlab画出奈奎斯特图，可使用以下命令：

```
s = tf('s');
sysG = (s + 1)/(s*(s/10 - 1));
nyquist(sysG)
axis([-3 3 -3 3])
```

◀

例6.10中右半平面极点的存在，影响了相位曲线的伯德图绘制规则，以及包围周数与不稳定闭环特征根之间的关系，这是因为式(6.28)中的$P=1$。但我们不带有任何改变地应用了奈奎斯特稳定判据。对于右半平面存在零点的系统，这依然是正确的；即一个非最小相位系统的零点对奈奎斯特稳定判据没有影响，但伯德图的绘制规则受到了影响。

例6.11　奈奎斯特图的特性

找到三阶系统

$$G(s)=\frac{s^2+3}{(s+1)^2}$$

的奈奎斯特图，并使其和$G(s)$的特性一致。如果$G(s)$包含在如图6.18所示的反馈系统当中，判断对于所有正的K值，系统是否稳定。

解答。使用Matlab画出奈奎斯特图，采用如下命令：

```
s = tf('s')
sysG = (s^2 + 3)/(s + 1)^2;
nyquist(sysG)
axis([-2 3 -3 3])
```

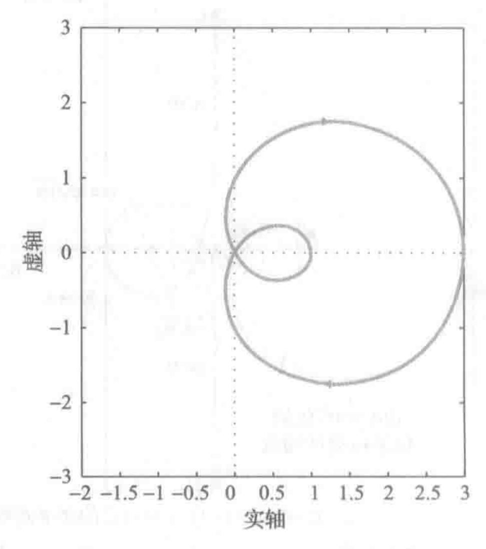


图6.32　例6.11的奈奎斯特图[⊖]

结果如图6.32所示。注意到这种情况下，由于原点处没有极点和$j\omega$轴上也没有任何极点，所以在无穷远处也不存在圆弧。又注意到，与伯德图$(s=+j\omega)$相关的奈奎斯特曲线起始于(3，0)点，终止于(1，0)点，因此，其以0°的相位角度开始并结束。因为$G(s)$的分子和分母是同阶的，而且

⊖　这个奈奎斯特图的形状是帕斯卡蜗线，事实上是由第三作者的儿子指出的，当时他就读于10年级的三角学班级。帕斯卡蜗线是由Dürer于1525年首先提出的。

没有在原点处的奇点。所以伯德图以一个零相位开始与结束。另外注意到，当 s 通过 $\pm j\sqrt{3}$ 时，奈奎斯特图通过(0, 0)点，因为当 s 在一个零点处时，奈奎斯特图的幅值等于零。此外注意到当 s 接近(0, 0)时，奈奎斯特图的相位为$-120°$，当 s 离开(0, 0)时，其相位为$+60°$。这种行为的出现是因为当 s 通过在 $j\omega$ 轴上的零点时，伯德图的相位将会跳变$+180°$。当图离开起始点(3, 0)时，相位首先减小，这是因为最低频率的奇点是 $s=-1$ 处的极点。

改变增益 K 将会增加或减小奈奎斯特图的幅值，但是它永远不可能穿越负实轴。因此，对于正的 K，闭环系统将总是稳定的。练习：通过手工绘制一个简略的根轨迹概略图来验证这些结论。◀

6.4 稳定裕度

大部分控制系统设计的表现形式，大致与6.2节所述的系统以及6.3节的例6.9的表现形式类似，即对于所有小的增益值，系统是稳定的，而且在增益增加至某一临界点后，系统将变为不稳定。明确的知道使一个控制系统保持稳定的裕度是至关重要的。对于这样的系统，两个通常用来度量稳定裕度的量与式(6.25)的稳定准则是直接相关的：增益裕度GM和相位裕度PM。本节中我们将会定义和使用这两个概念来研究系统设计。另外一种稳定性的度量最初是由史密斯(Smith)于1958年定义的，他将这两个裕度合并为一个，称为矢量裕度(有时也叫做复合裕度)，从而给出了复杂情况下的一种更好的稳定性说明。

347~348

增益裕度(GM)就是系统达到不稳定前增益所能增加的(在某些情况下为减小)倍数。对于典型情况，它可从伯德图中直接读出(见图6.15)，即在$\angle G(j\omega)=-180°$的频率处，测量$|KG(j\omega)|$曲线和幅值$=1$的直线间的垂直距离。我们从图中可以看出，当$K=0.1$时，由于$|KG(j\omega)|=0.05$，则GM=20(或26dB)。当$K=2$时，系统是中性稳定的且$|KG(j\omega)|=1$，因此GM=1(0dB)。当$K=10$时，$|KG(j\omega)|=5$，GM=0.2(−14dB)且系统是不稳定的。注意到，对于这个典型系统，GM是系统达到不稳定前增益 K 所能增加的倍数；因此$|GM|<1$(或$|GM|<0$dB)代表了一个不稳定的系统。GM也能够通过关于 K 的根轨迹来确定，为此要注意 K 的两个值：(1) 根轨迹穿越 $j\omega$ 轴的点处的 K 值和(2)标称闭环极点处的 K 值。GM就是这两个值的比值。

另一个表示稳定裕度的度量是相位裕度(PM)。它是当$|KG(j\omega)|=1$时，$G(j\omega)$的相位超过$-180°$的值，同时它也是度量对式(6.25)的稳定条件的满足程度的一种可替代的方法。对于图6.15中的情况，我们看到当$K=0.1$时，PM≈80°，当$K=2$时，PM=0°和当$K=10$时，PM=−35°。稳定性需要正的PM。

稳定裕度也可以依照奈奎斯特图定义。图6.33表明，GM和PM是关于复数量$G(j\omega)$靠近−1点的远近程度的度量，它是另一种表述公式(6.24)所描述的中性稳定点的方法。我们再次看到，GM表示在获得不稳定结果前增益可以增加多少，这与例6.9中的结论是一样的。PM就是$KG(j\omega)$穿越圆$|KG(s)|=1$时，$G(j\omega)$的相位和180°之间的差值。正的PM值表示稳定情况(即不带有奈奎斯特包围)。所以我们可以看出，这两个裕度是从两个方面度量奈奎斯特图和−1点的距离；GM沿着水平轴度量，而PM沿着单位圆度量。

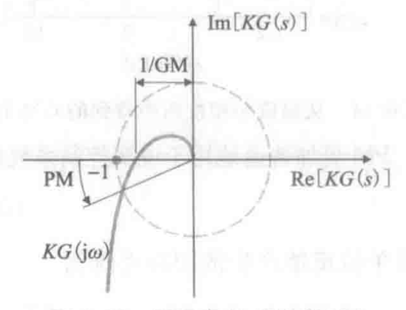


图6.33 用于定义GM和PM的奈奎斯特图

从伯德图直接确定这些稳定裕度的值，要比利用奈奎斯特图简单。术语穿越频率 ω_c，通常用来指幅值为1或0dB处的频率。虽然穿越频率可以很容易地由开环频率响应图来确定，但这个频率和闭环系统的带宽以及系统的响应速度高度相关。闭环系统的带宽定义在6.1节

已给出，它和穿越频率的详细关系将在 6.6 节中讨论。

除了 $K=1$ 的情况以外，图 6.34 所示的开环频率响应数据与图 6.25 所画的是同一个数据。从图 6.34 中来看，PM（$=22°$）和 GM（$=2$）的值是显而易见的且同那些可以从图 6.26所示的奈奎斯特图上得到的结论相符。在 -0.5 点处的实轴穿越对应的 GM 为 1/0.5或 2，且 PM 可通过在图上测量 $G(\mathrm{j}\omega)$ 穿越幅值$=1$ 的圆时的角度来计算。

频率响应设计的一个有用的方面是，可以计算增益变化的影响。实际上，我们可以根据图 6.34 对任意 K 值确定 PM，而不用重新绘制幅值或者相位信息。我们仅需对于所选择试验的 K 值，在图上标明 $|KG(\mathrm{j}\omega)|=1$ 的位置即可，如图 6.35 的虚线所示。此时，可以看出，$K=5$ 产生一个不稳定的 PM 为 $-22°$，而一个 $K=0.5$ 的增益，产生了一个 $+45°$ 的 PM。此外，若要得到某个 PM（假设为 70°），可简单地读出期望的 PM 处的频率所对应的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 值（这里 $\omega=0.2\mathrm{rad/s}$ 产生 PM$=70°$，且在该处 $|G(\mathrm{j}\omega)|=5$），并注意到在此频率处的幅值是 $1/K$。因此一个 70°的 PM 可由 $K=0.2$ 得到。

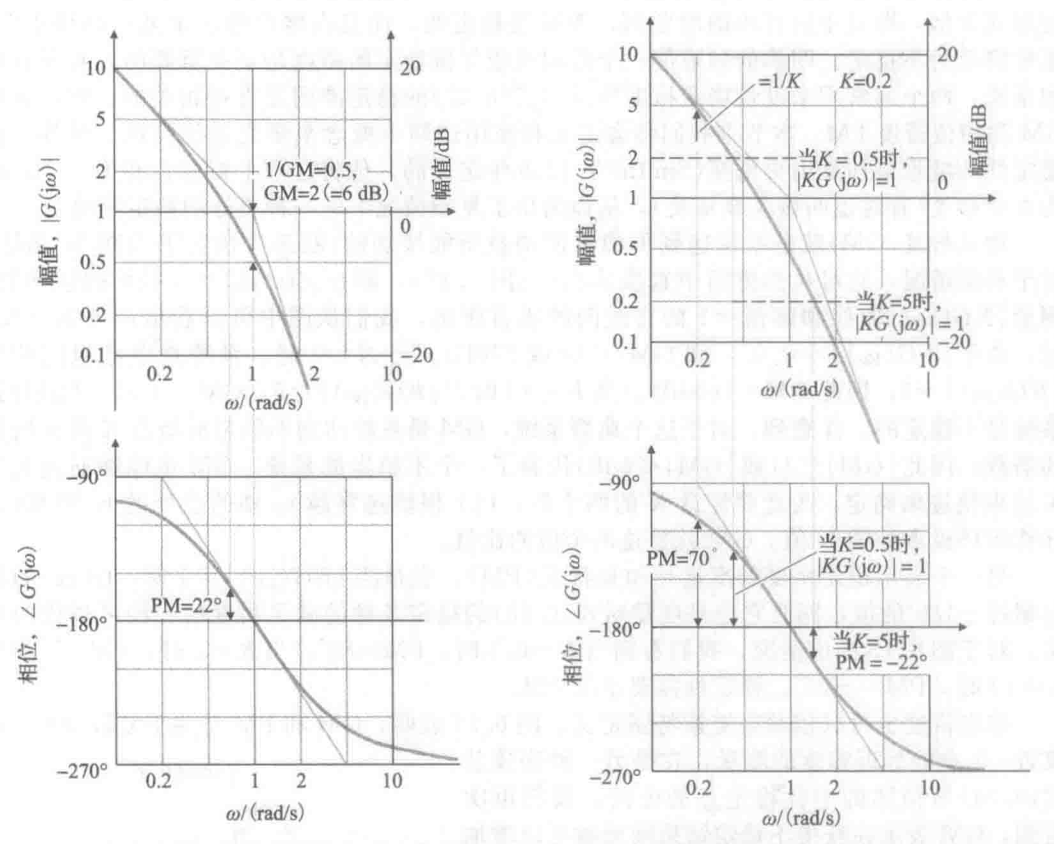


图 6.34　从幅值和相位图中得到的 GM 和 PM　　图 6.35　根据频率响应数据的 PM 对 K 的变化图

PM 更加普遍地用于说明控制系统性能，因为它与系统的阻尼比相关。对于开环二阶系统

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \tag{6.29}$$

使用单位反馈产生的闭环系统为

349～351

$$\mathcal{T}(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{6.30}$$

可以证明，在此系统中 PM 和 ζ 之间的关系为

$$\mathrm{PM}=\arctan\left[\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right] \tag{6.31}$$

且将这个函数画在图 6.36 中。可以注意到，在到大约 PM＝60°之前，函数近似为一条直线。虚线表示对于这个函数的直线近似，其中：

$$\zeta \approx \frac{PM}{100} \tag{6.32}$$

清楚的是，这种近似对于约为 70°以下的 PM 成立。此外，式(6.31)也只对于式(6.30)的二阶系统才是准确的。尽管具有诸多局限，式(6.32)仍经常当作将 PM 与闭环阻尼比相关联起来的经验法则来使用。在进行控制系统的初步设计时，这个经验法则是非常有用的，然而，当检验设计的实际阻尼比以及其他方面的性能时，这一经验法则也是重要的。

二阶系统(由式(6.29)给出)的 GM 为无穷大(GM＝＋∞)，因为当频率增加时，相位曲线不穿越－180°。这对于任何的一阶或二阶系统都成立。

基于系统的 PM，我们可从谐振峰值 M_r 和 ζ 之间的关系中，得到一个帮助评估控制系统的额外数据，如图 6.3 所示。注意，此图适用于与式(6.30)的同类的系统(式(6.9))。我们可以将图 6.36 中的信息转化为 M_r 与 PM 相关联的形式。它同阶跃响应超调 M_p 一起画在图 6.37 中。因此，给定 PM，可以对一个无零点的二阶系统确定其闭环阶跃响应的超调，这提供了一个可用于任何系统的简单估计方法。

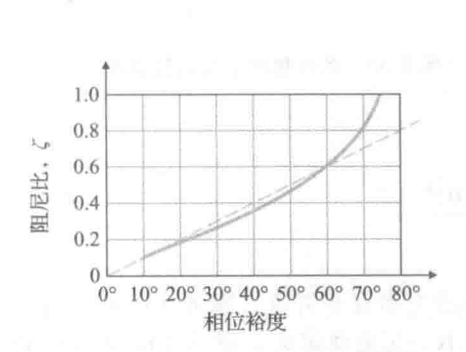


图 6.36　阻尼比随 PM 的变化图

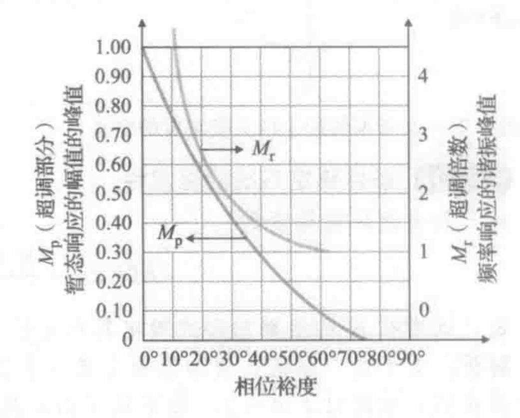


图 6.37　$T(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$的暂态响应超调($M_p$)与频率响应谐振峰值($M_r$)随 PM 变化图

当判断一个控制系统的镇定是否满意的时候，许多工程师直接想到用 PM 来判断。就此而言，PM＝30°一般认为是达到满意的最低值。此外，某些 PM 经常被特别地描述为反馈系统设计的指标。另外，使用 PM 判断设计系统的稳定性时，设计者一般也考虑如何满足系统响应速度的指标，如在 6.1 节所讨论的带宽。依照前面所讨论的频率响应参数，穿越频率是最好的描述响应速度的指标。这个想法将会在 6.6 节和 6.7 节中进行更进一步的讨论。

在某些情况下，PM 和 GM 对于表现稳定性没有什么帮助。对于一阶和二阶系统，相位不会穿越 180°的直线，所以，GM 总是＋∞，这就不是一个有用的设计参数。对于高阶系统，可能存在多个满足 $|KG(j\omega)|=1$ 或 $\angle KG(j\omega)=180°$ 的频率，且需要对之前定义的裕度进行再次说明。一个例子可以在图 10.12 中看到，其中幅值穿越 1 三次。在这种情况下，以第一次穿越来定义 PM，因为在这个穿越处，PM 是三个值中最小的，从而也是稳定性的最保守评估。一个基于图 10.12 中数据的奈奎斯特图表明，奈奎斯特曲线最靠近－1 点的部分是表征稳定性的重要指标，因此使用穿越频率产生的 PM 的最小值是合理的选择。另外，6.9 节中讨论的尼科尔斯图可以用来解决任何稳定裕度中的不确定性问题。在应用图 6.33 所描述的定义时，一个设计者最好具有判断能力。实际上，只能通过检查奈奎斯特图或尼科尔斯图来找到与－1 点的最接近的点才能严格确定系统的实际稳定裕度。

为帮助分析这个问题，史密斯于 1958 年提出了**矢量裕度**的概念(有时称为复合裕度)，

他将其定义为奈奎斯特图距−1点的最短距离[⊖]。图6.38生动地描述了这个概念。由于矢量裕度是一个单一的裕度参数，因此它排除了联合使用PM和GM来评估稳定性时所带来的模棱两可的情况。由于难于计算，之前未得到广泛的应用。然而，随着计算机辅助的广泛应用，采用矢量裕度来描述稳定程度的想法就更加可行了。

352~353

在某些实际例子中，增益的增加可以使系统稳定。如我们在第5章中所述，这些系统叫做条件稳定系统。这种系统的一个具有代表性的根轨迹就如图6.39所示。对于一个根轨迹上的点，例如，A点，增益的增加会把不稳定的根带进左半平面，从而使系统稳定。对于B点，无论增益增加还是减少，都会使系统变得不稳定。因此，存在多个GM，它们所对应的情况是增益减小或是增益增加，图6.33中GM的定义就是无效的。

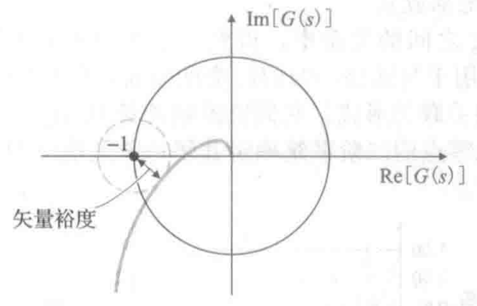


图6.38 奈奎斯特图上的矢量裕度的定义

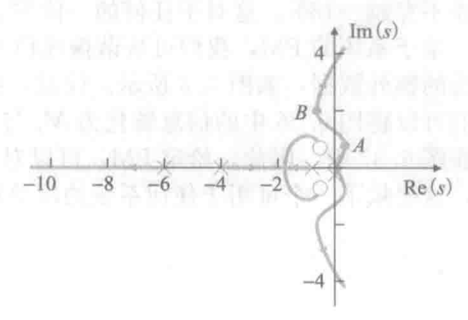


图6.39 条件稳定系统的根轨迹

例6.12 条件稳定系统的稳定性

对于具有开环传递函数

$$KG(s)=\frac{K(s+10)^2}{s^3}$$

的系统，以增益K的函数的形式确定其稳定性。

解答。对于这个系统，增加增益会使得系统由不稳定向稳定转变。图6.40a所示的根轨迹图表明，系统对于$K<5$，是不稳定的，且对于$K>5$是稳定的。图6.40b所示的奈奎斯特图是对于稳定值$K=7$绘制的。根据图6.33来判断裕度，可以得到$PM=+10°$(稳定)和$GM=0.7$(不稳定)。根据之前讨论的稳定性规则，这两个裕度在系统稳定性上得到了矛盾的表示结果。

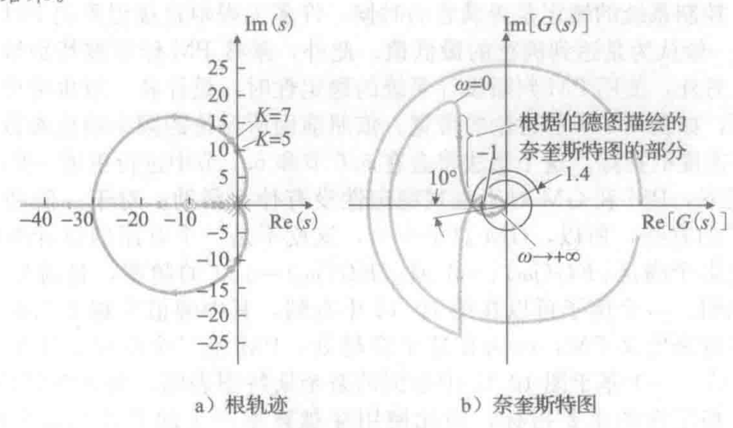


图6.40 增加增益使系统由不稳定趋于稳定

⊖ 该值与系统设计中的灵敏度函数的使用以及鲁棒稳定性概念联系相关。这些都将在6.9节中作为选读内容加以讨论。

我们可以通过数图 6.40b 中的奈奎斯特图包围 −1 点的周数来解决这一矛盾。奈奎斯特图顺时针和逆时针各包围 −1 点一周，即总的包围周数就是 0。因此，就不存在对于 −1 点的包围，这证实了当 $K=7$ 时，系统是稳定的。对于像这样的系统，最好借助根轨迹图和(或)是奈奎斯特图(而不是伯德图)来判断稳定性。◀

例 6.13　奈奎斯特图用于具有多个穿越频率系统

对于系统

$$G(s)=\frac{85(s+1)(s^2+2s+43.25)}{s^2(s^2+2s+82)(s^2+2s+101)}=\frac{85(s+1)(s+1\pm 6.5\mathrm{j})}{s^2(s+1\pm 9\mathrm{j})(s+1\pm 10\mathrm{j})}$$

画出其奈奎斯特图并判断稳定裕度。

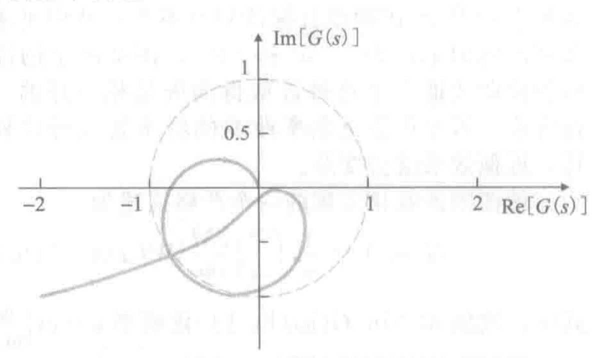


图 6.41　例 6.13 中复杂系统的奈奎斯特图

解答。 奈奎斯特图(见图 6.41)定性地表明，存在 3 个关于幅值 = 1 的圆的穿越频率，因此将会有三个对应的 PM 值。这个系统的伯德图(见图 6.42)表明，三个关于幅值 = 1 的穿越分别在 0.75、9.0rad/s 和 10.1rad/s 处，并且指出 PM 值分别为 37°，80°和 40°。在此例中，稳定性的关键表示量就是当奈奎斯特图穿越实轴时，其与 −1 点的接近程度。因为在奈奎斯特图仅有一个关于实轴的穿越(因此在相位图也有一个关于 −180°直线的穿越)，所以只有一个 GM 值。根据伯德图，我们看到相位在 $\omega=10.4$rad/s 处穿越 −180°，其中幅值为 0.79。因此，GM 为 1/0.79 = 1.26，这是本例中最有用的稳定裕度。注意，如果有多个关于 −180°的穿越，那么在各个关于 −180°的穿越处所确定的 GM 的最小值将是 GM 准确值，因为此处当增益增加时，系统将变得的不稳定(见 Tischler，2012 年，226 页)。◀

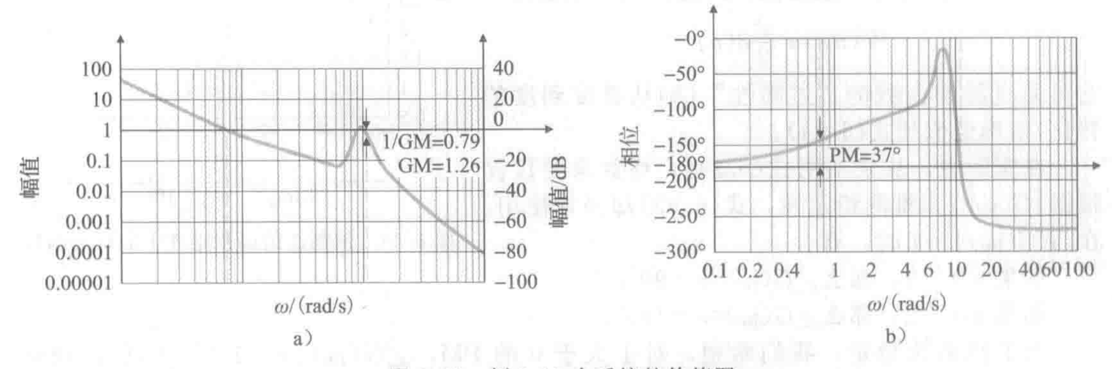


图 6.42　例 6.13 中系统的伯德图

总之，许多系统的表现行为大致类似于例 6.9，且对于这样的系统，GM 和 PM 是完全唯一确定的且是有用的。也存在更多的复杂系统的例子，它们的伯德图具有多个关于幅值为 1 或 −180°的穿越，对于这类系统，图 6.33 所定义的稳定判据就不太清楚了；因此我们需要确定所有 GM 和 PM 的可能值，之后利用奈奎斯特稳定判据来深入理解和确定正确的稳定裕度。

354 ~ 356

6.5　伯德图的幅相关系

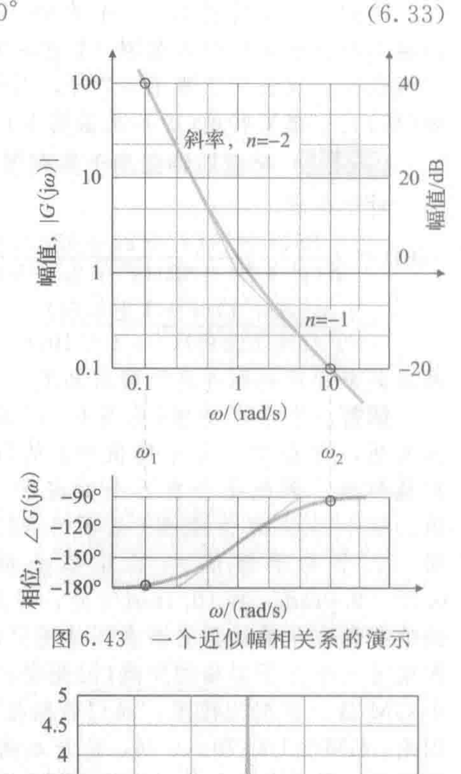
伯德的一个重要贡献就是如下定理。

对于任意的稳定的最小相位系统(在右半平面不存在零点或极点的系统)，$G(\mathrm{j}\omega)$的相位和 $G(\mathrm{j}\omega)$的幅值存在唯一的对应关系。

当 lg-lg 刻度下的 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 对 ω 的斜率在 10 倍频程内保持不变，那么这种关系就变得尤其简单，可由下式给出：

$$\angle G(\mathrm{j}\omega) \approx n \times 90^\circ \tag{6.33}$$

其中：n 是 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 的斜率，单位为频率每变化 10 倍时幅值的 10 倍变化量。例如，在单独考虑图 6.43 所示的幅值曲线时，我们看到式(6.33)可应用于两个频率，即 $\omega_1=0.1(n=-2)$ 和 $\omega_2=10(n=-1)$，这两点相距 10 倍频程且保持斜率不变，从而可求出相位的近似值，为 $-180°$ 和 $-90°$。图中所示的准确的相位曲线证实了这种近似得的确是相当好的。它也说明，若在更靠近斜率改变的频率处执行这种估计，近似效果就会变差。



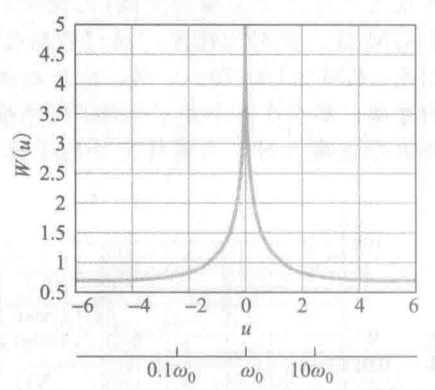


图 6.43　一个近似幅相关系的演示

伯德图的幅相定理的一个严格描述为

$$\angle G(\mathrm{j}\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u}\right)W(u)\mathrm{d}u \tag{6.34}$$

其中：幅值 $M=\ln|G(\mathrm{j}\omega)|$；归一化频率 $u=\ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$；$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u}\approx n$，即式(6.33)定义的斜率；权重函数 $W(u)=\ln\left(\frac{\coth|u|}{2}\right)$。

图 6.44 所示是一个权重函数 $W(u)$ 的曲线，它表示相位对于斜率的依赖程度：在 ω_0 处，相位最依赖于斜率；在临近的频率处，相位虽然也依赖于斜率，但这种依赖程度比较小。此图也说明权重可以由一个在 ω_0 的脉冲函数近似。其近似权重函数为

$$W(u) \approx \frac{\pi^2}{2}\delta(u)$$

它可通过脉冲函数的“过筛性”（和从弧度到度的转化）精确近似到式(6.34)。

图 6.44　伯德图的幅相定理中的权重函数

在实际中，从来不用式(6.34)，而如果要仅仅根据 $|G(\mathrm{j}\omega)|$ 来推测稳定性，式(6.33)却经常使用。在 $|KG(\mathrm{j}\omega)|=1$ 时，有

如果 $n=-1$，那么 $\angle G(\mathrm{j}\omega)\approx-90°$，

如果 $n=-2$，那么 $\angle G(\mathrm{j}\omega)\approx-180°$。

357～358

为了使系统稳定，我们希望，对于大于 0 的 PM，$\angle G(\mathrm{j}\omega)>-180°$。因此，调整 $|KG(\mathrm{j}\omega)|$ 曲线，使之在穿越频率处（即 $|KG(\mathrm{j}\omega)|=1$ 处），斜率为 -1。如果对于穿越频率上下 10 倍频程内，斜率都是 -1，那么 $\mathrm{PM}\approx 90°$；然而为了保证合理的 PM，通常有必要对以穿越频率为中心的 10 倍频程内，保持斜率为 -1（-20dB/10 倍频）。因此得到一个非常简单的设计准则。

调整幅值曲线 $|KG(\mathrm{j}\omega)|$ 的斜率，使之在附近的 10 倍频程内以斜率为 -1 穿过幅值 1 的直线。

通常这一准则足以提供一个可接受的相位裕度，因此也提供了满意的系统阻尼比。要得到期望的响应速度，穿越点要校正到如式(3.60)定义的频率处，这样才能产生期望的带宽或响应速度。回顾之前的内容可以发现，自然频率 ω_n、带宽和穿越频率都是近似相等的，这些将会在 6.6 节中进行进一步讨论。

例 6.14　航天器姿态控制的简单设计准则的使用

对于图 6.45 所定义的航天器姿态控制问题，找到合适的 $KD(s)$ 的表达式，提供良好

的阻尼比，并使带宽近似为0.2rad/s。另外，确定使得灵敏度函数$\mathcal{S}=0.7(-3\text{dB})$处的频率。这个频率通常称为“干扰抑制带宽”或$\omega_{\text{DRB}}$。

解答。因为航天器的频率响应的幅值(见图6.46)在各频率处的斜率都为-2(-40dB/10倍频)，所以，明显地，需要重新改造幅值曲线。完成这一目标的最简单的补偿方法是由比例和微分项(一个PD补偿器)组成的，它们给出了如下关系：

$$KD_c(s)=K(T_Ds+1) \tag{6.35}$$

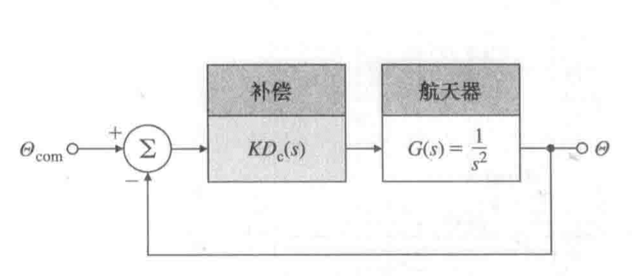


图6.45 航天器姿态控制系统

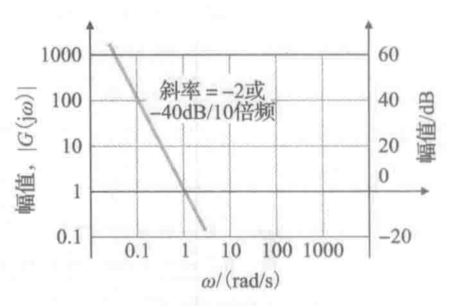


图6.46 航天器频率响应的幅值

调整增益K以产生期望的带宽，同时调整分离点$\omega_1=1/T_D$，以产生在穿越频率处的-1的斜率。目前，为达到期望指标的实际设计过程是非常简单的：选择一个K的值以提供在0.2rad/s处的穿越频率，同时选择一个ω_1，使之约为穿越频率的$\frac{1}{4}$，所以在穿越频率附近斜率将会为-1。图6.47显示了完成最终的补偿设计的步骤：

步骤1 画出$|G(j\omega)|$。

步骤2 以$\omega_1=0.05\text{rad/s}(T_D=20)$修改伯德图，以使其包含$|D_c(j\omega)|$，这样，在$\omega=0.2$rad/s处，斜率$\approx -1$。

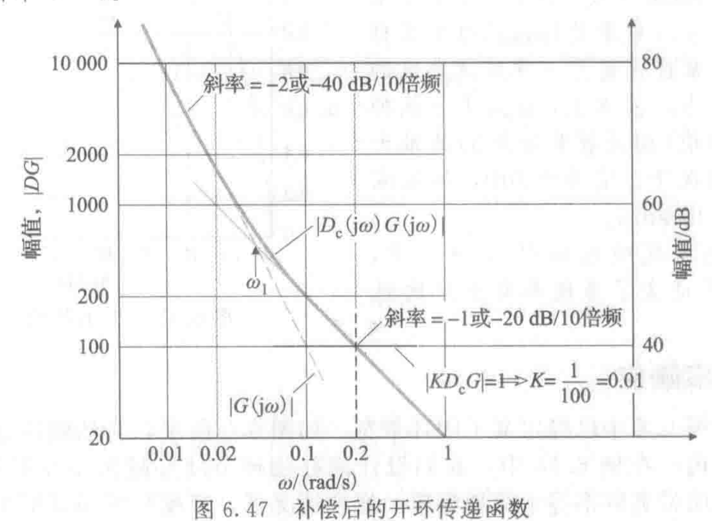


图6.47 补偿后的开环传递函数

步骤3 在$|D_cG|$曲线穿越$\omega=0.2$rad/s直线的位置，确定$|D_cG|=100$，这也是我们期望的穿越幅值为1的直线的位置。

步骤4 为使穿越频率在$\omega=0.2$rad/s处，计算：

$$K=\frac{1}{|D_cG|_{\omega=0.2}}=\frac{1}{100}=0.01$$

因此，

$$KD_c(s)=0.01(20s+1)$$

满足设计指标，完成设计。

若绘制 KD_cG 的相位曲线，我们要找到 PM=75°，这当然足以满足设计要求。这个结果的出现，是因为在以穿越频率为中心的 10 倍频范围内的幅值曲线斜率为−1。$\mathcal{T}(s)$的闭环频率响应的幅值图(见图 6.48)表明，在本例中，穿越频率和带宽几乎是完全相等的；因此就得到了所期望的 0.2rad/s 的带宽。灵敏度函数是由式(4.17)定义的，在这个问题中，有

$$\mathcal{S}=\frac{1}{1+KD_cG}$$

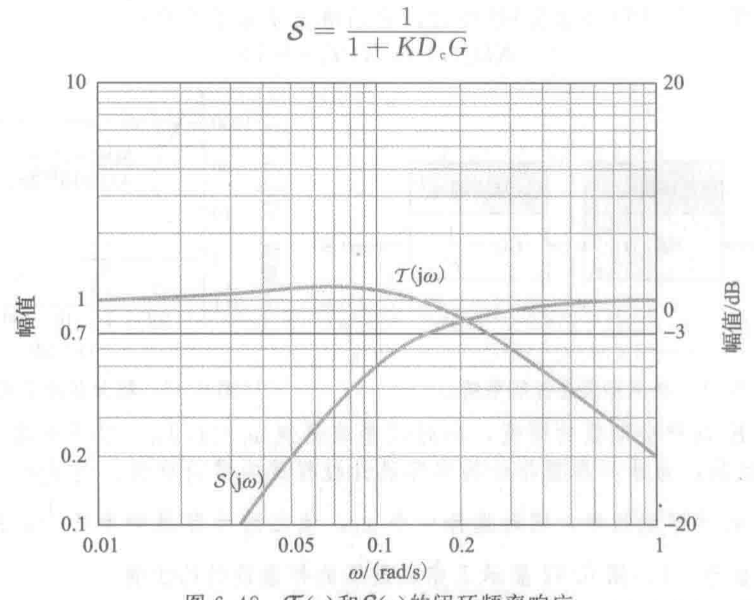


图 6.48　$\mathcal{T}(s)$和$\mathcal{S}(s)$的闭环频率响应

$\mathcal{S}(s)$也表示在图 6.48 上，从图上可以看出，在 ω=0.15rad/s 处，$\mathcal{S}$有一个 0.7 或 −3dB 的值。在某一频率处(ω_{DRB})的干扰抑制特性的概念经常被描述为一种反馈系统的可接受的设计要求。基本上，ω_{DRB} 是干扰抑制小于某一特定值(如灵敏度函数$\mathcal{S}$)的最大频率，在这种情况下，它为 −3dB，所以在本例中 ω_{DRB}=0.15rad/s。

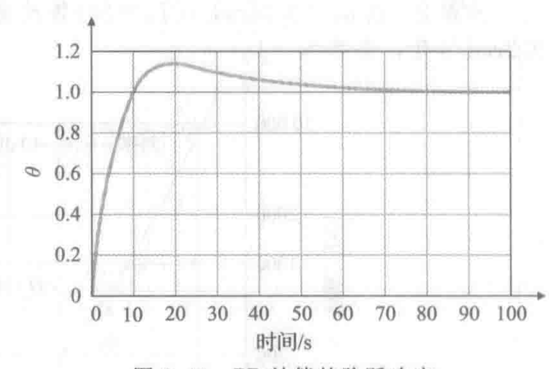


图 6.49　PD 补偿的阶跃响应

闭环系统的阶跃响应如图 6.49 所示，且其 14% 的超调证实了系统具有充足的阻尼比。◀

6.6　闭环频率响应

在 6.1 节和图 6.5 中已经定义了闭环带宽。如图 6.3 所示，自然频率总是在二阶系统带宽的 2 倍范围内。在例 6.14 中，我们设计的补偿环节使穿越频率在期望带宽频率处，通过计算已经证明带宽频率等于穿越频率。通常情况下，穿越频率和带宽频率的匹配并不像例 6.14 中那样好。我们可以通过一些观察建立更准确的对应关系。考虑这样的系统，其 $|KG(j\omega)|$ 具有如下典型性质：

$$\text{当 } \omega \ll \omega_c \text{ 时}, |KG(j\omega)| \gg 1$$
$$\text{当 } \omega \gg \omega_c \text{ 时}, |KG(j\omega)| \ll 1$$

其中，ω_c 是穿越频率。闭环频率响应的幅值近似为

$$|\mathcal{T}(j\omega)|=\left|\frac{KG(j\omega)}{1+KG(j\omega)}\right| \approx \begin{cases}1, & \omega \ll \omega_c \\ |KG|, & \omega \gg \omega_c\end{cases} \tag{6.36}$$

在穿越频率附近，其 $|KG(j\omega)|=1$，$|\mathcal{T}(j\omega)|$ 在很大程度上依赖于相位裕度 PM。PM=

90°意味着$\angle G(j\omega_c)=-90°$，则$|\mathcal{T}(j\omega_c)|=0.707$。另一方面，PM=45°满足$|\mathcal{T}(j\omega_c)|=1.31$。

根据式(6.36)的准确估计，生成$|\mathcal{T}(j\omega)|$的曲线如图6.50所示。图中PM较小时的带宽频率明显比ω_c稍大一些，但通常小于$2\omega_c$；因此，$\omega_c \leqslant \omega_{BW} \leqslant 2\omega_c$。

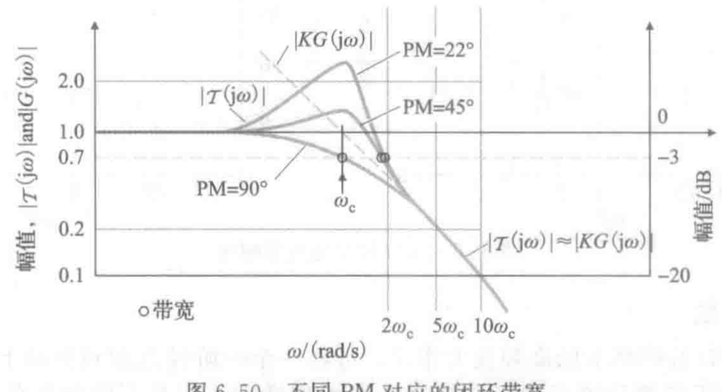


图6.50 不同PM对应的闭环带宽

359～362

另一个与闭环频率响应相关的性能指标是谐振峰值M_r，其定义如图6.5所示。如图6.3和图6.37所示，对于线性系统，M_r通常与系统的阻尼比有关。在实际中，M_r很少被使用；大多设计者更喜欢使用PM来评估系统的阻尼比，因为使系统产生非线性或引起延时的不合理因素通常对相位的削减比对幅值的削减更明显。

正如上一例子所示，在设计中得到确定的误差特征也是很重要的，并且这些经常是作为输入函数或扰动频率的函数来评估的。在一些情况下，控制系统的主函数用于调节输出以得到一个有扰动存在的准确恒定输入。对于这些情况，设计中应注意的关键问题应该是带有扰动输入的误差的闭环频率响应。

6.7 补偿

正如我们在第4章和第5章讨论过的，将动态元件(或补偿)加入到反馈控制器中以提高系统的稳定性和误差特征，因为只用比例反馈处理不能获得满意的特征。

4.3节讨论过基本的反馈类型：比例反馈、微分反馈和积分反馈。5.4节讨论过三种动态补偿环节：超前补偿，其近似于比例微分反馈(PD)，滞后补偿，其近似于比例积分控制(PI)，以及超前滞后环节，其有处理振荡的特殊特点。本节中我们讨论这些和其他几种关于频率响应特征的补偿环节。

频率响应稳定性分析通常需要考虑闭环系统的特征方程$1+KG(s)=0$。引入补偿环节，闭环特征方程变为$1+KD_c(s)G(s)=0$，本章之前讨论过的所有关于$KG(s)$频率响应都直接适用于补偿环节。我们称$L(s)$为环路增益，或系统开环传递函数，即$L(s)=KD_c(s)G(s)$。

6.7.1 PD补偿

我们首先通过使用PD控制频率响应讨论补偿设计。补偿器的传递函数为

$$D_c(s)=(T_D s+1) \tag{6.37}$$

363

如图5.22可知，补偿对二阶系统的根轨迹具有镇定作用。式(6.37)的频率响应特性如图6.51所示。通过增大相位，分离点频率$1/T_D$右侧相应的斜率变为+1，起到镇定的效果。通过定位$1/T_D$，增大的相位可位于穿越频率附近(即$|KD_c(s)G(s)|=1$)，因此增大了PM。

注意到，补偿环节的幅值会随着频率的增大而持续增加。这种特征是不希望得到的，因为该性质会放大系统中普遍存在的高频噪声。同时补偿环节作为一个连续传递函数，不能通过物理元件实现。这也是在5.4节中陈述的原因，关于纯微分补偿方式造成的问题。

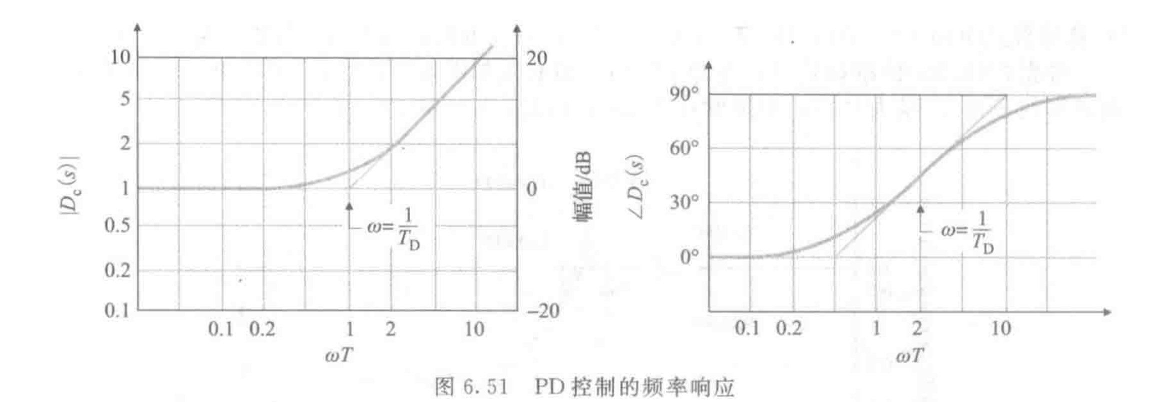


图 6.51　PD 控制的频率响应

6.7.2　超前补偿

为了减小 PD 补偿环节的高频放大作用，可将一个一阶极点加到分母上，使其频率充分大于 PD 补偿环节的分离点频率。这样虽然相位增大，但是高频率处的放大作用被限制。由此而生的超前补偿的传递函数为

364

$$D_c(s) = \frac{T_D s + 1}{\alpha T_D s + 1},\ \alpha < 1 \tag{6.38}$$

其中：$1/\alpha$ 是极点与零点的分离点频率之比。

图 6.52 所示的是该超前补偿的频率响应。值得注意的是，超前补偿仍可提供超前的相位，但在高频段的放大作用却更小了。超前补偿器通常都可以使用，即使系统阻尼比要求大幅度提高。

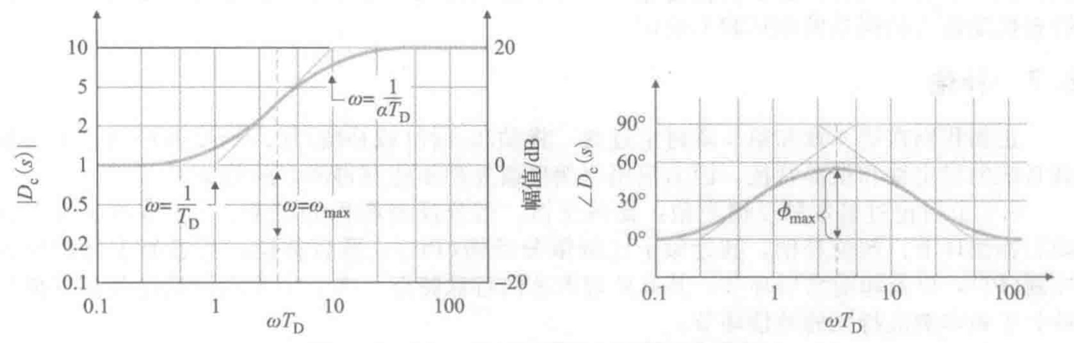


图 6.52　$1/\alpha=10$ 时超前补偿环节频率响应

加入式(6.38)的超前补偿环节后相位为

$$\phi = \arctan(T_D\omega) - \arctan(\alpha T_D\omega)$$

(见习题 6.44)相位取最大值时的频率值为

$$\omega_{max} = \frac{1}{T_D\sqrt{\alpha}} \tag{6.39}$$

最大超前相位是图 6.52 中$\angle D_c(s)$曲线的峰值，相对应，有

$$\sin\phi_{max} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{6.40}$$

或

$$\alpha = \frac{1-\sin\phi_{max}}{1+\sin\phi_{max}}$$

另一种方法如下：在对数坐标下，最大相位的频率位于两个分离点频率(有时称转角频率)的中点，即

365

$$\lg\omega_{\max} = \lg\frac{1/\sqrt{T_D}}{\sqrt{\alpha T_D}} = \lg\frac{1}{\sqrt{T_D}} + \lg\frac{1}{\sqrt{\alpha T_D}} = \frac{1}{2}\left[\lg\left(\frac{1}{T_D}\right) + \lg\left(\frac{1}{\alpha T_D}\right)\right] \quad (6.41)$$

如图 6.52 所示。或者，我们可以根据零极点的位置来确定这些结果。改写 $D_c(s)$ 为根轨迹形式用于分析，得到

$$D_c(s) = \frac{s+z}{s+p} \quad (6.42)$$

习题 6.44 表明：

$$\omega_{\max} = \sqrt{|z||p|} \quad (6.43)$$

且

$$\lg\omega_{\max} = \frac{1}{2}(\lg|z| + \lg|p|) \quad (6.44)$$

如果在式(6.39)和式(6.41)中取 $z=-1/T_D$ 和 $p=-1/(\alpha T_D)$，这些结果与前面的是一致的。

例如，某超前补偿器在 $s=-2(T_D=0.5)$处有一个零点，在 $s=-10\left(\alpha T_D=0.1，即\ \alpha=\frac{1}{5}\right)$处有一个极点，该补偿的最大超前相位位于：

$$\omega_{\max} = \sqrt{2\times 10} = 4.47\text{rad/s}$$

位于中点的超前相位值只依赖于式(6.40)中的 α，其绘制如图 6.53 所示。当 $\alpha=0.2$，如图 6.53 所示 $\phi_{\max}=40°$。注意由图，我们可以通过使用更大的超前比 $1/\alpha$ 的值来增大超前相位至 90°[⊖]；然而，图 6.52 显示增大 $1/\alpha$ 的值也在更高频率处产生更大的放大作用。因此我们的任务是选择一个 $1/\alpha$ 值，其能很好协调高频率段处的可接受的 PM 和噪声灵敏度。通常折中的方案是超前补偿提供 70°的最大相位。如果需要更大的相位，那么建议使用双重超前补偿，其中：

$$D_c(s) = \left(\frac{T_D s+1}{\alpha T_D s+1}\right)^2$$

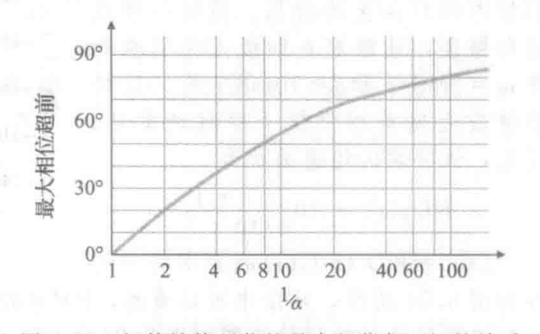


图 6.53　超前补偿环节的最大相位与 $1/\alpha$ 的关系

366

虽然系统有可以忽略的噪声，式(6.37)中的纯微分补偿是可接受的，但由于不可能建立一个纯微分器，连续补偿比式(6.37)会看起来更像式(6.38)。没有物理系统(机械或电气)会在无穷大的频率处，有无穷大的增益响应。所以在频率范围(或带宽)内存在限制，进而提供微分信息(或超前相位)。这在数字实现中也是可行的。这里，采样频率限制了高频放大作用，并基本上在补偿传递函数中加入了一个极点。

例 6.15　直流电机的超前补偿

作为设计超前补偿的例子，我们重新考虑 5.4.1 小节提出的超前补偿用于直流电动机的传递函数的设计。传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

这也表示卫星跟踪天线的模型(见图 3.60)。这次我们希望得到单位斜坡输入小于 0.1 的稳态误差。此外，期望超调量 $M_p<25\%$。确定超前补偿进而满足指标要求。

解答。稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+KD_c(s)G(s)}\right]R(s) \quad (6.45)$$

⊖　超前比为 $1/\alpha$。

其中：$R(s)=1/s^2$是单位斜坡，所以式(6.45)化简为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{s+KD_c(s)[1/(s+1)]}\right\}=\frac{1}{KD_c(0)}$$

因此，我们发现为了满足误差要求，补偿的稳态增益$KD_c(0)$不能小于10($K_v\geqslant 10$)，所以取$K=10$。超调量与相位裕度存在一定的关系，图6.37所示PM为45°时满足条件。图6.54所示的频率响应，如果补偿中没有加入超前相位，PM=20°。如果只加入相位且不影响幅值，我们将需要在$KG(s)$的穿越频率$\omega=3$rad/s处额外加一个仅25°的相位。然而，保持低频增益不变同时加入一个补偿器零，会使穿越频率增大，因此需要超前补偿的相位大于25°。为了可靠，设计超前补偿器提供40°的最大超前相位。如图6.53所示，$1/\alpha=5$。如果补偿器的最大超前相位等于穿越频率，我们会从补偿中得到最优的效果。通过一些试验和错误，选取零点和极点分别在频率$\omega=2$rad/s和$\omega=10$rad/s处，这样会使最大超前相位位于穿越频率处。因此，该补偿的传递函数为

$$KD_c(s)=10\,\frac{s/2+1}{s/10+1}$$

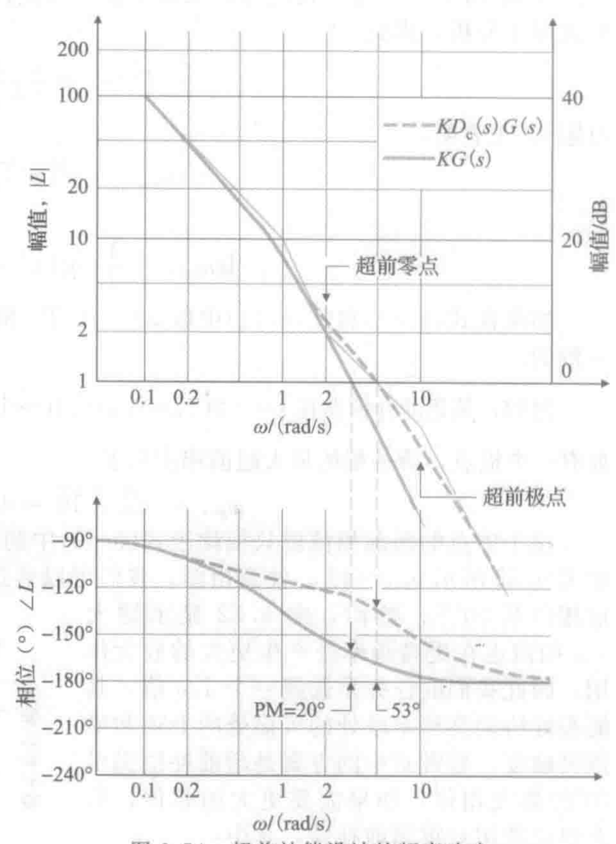


图6.54　超前补偿设计的频率响应

$L(s)=KD_c(s)G(s)$的频率响应特性如图6.54所示，从图中可以看到，PM=53°，满足设计要求。

该系统设计的根轨迹图如图5.24所示，为了便于观察，这里再绘制一遍，如图6.55所示，图中标出$K=10$时对应根的位置。绘制根轨迹并不是本例的要求，在此只想和第5章基于根轨迹的设计方法做个比较，其增益$K=14$。进一步比较，图6.56所示的是系统的时域响应，与图5.25相比，超前补偿设计的响应时间较慢，上升时间$t_r=0.33$s，而图5.25中阶跃响应的上升时间为$t_r=0.26$s。

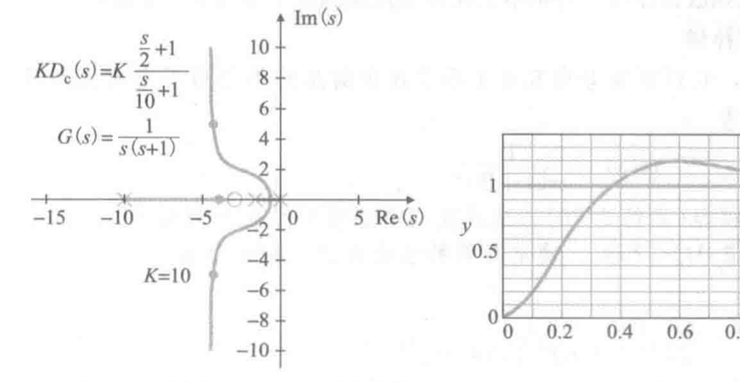


图6.55　超前补偿设计的根轨迹图

图6.56　例6.15的超前补偿设计的阶跃响应

例6.15的设计步骤可以总结如下。

(1) 确定低频增益，使稳定误差满足指标要求。

(2) 选择超前比 $1/\alpha$ 和零点值，在穿越频率处获得满意的相位裕度 PM。

(3) 极点位置在 $1/(\alpha T_D)$处。

该设计过程适用于许多情况。然而，应记住，在任何特殊设计中的设计步骤都需要因性能指标的特殊要求随之进行调整。

例 6.15 中有两个性能指标：超调量和稳态误差。我们将超调量转换成 PM，稳态误差的性能指标仍可以直接使用。本例中速度响应的性能指标没有给出；然而，它与稳态误差性能指标以相同的方式影响设计。正如我们之前 6.6 节指出的，响应速度或系统的带宽与穿越频率是直接相关的。图 6.54 所示穿越频率约为 5rad/s。我们可以通过增大增益 K，增大超前补偿器的极点和零点的频率以保持在穿越频率处-1的斜率。增大增益也会降低稳态误差进而优化指标要求。GM 没有引入到该问题中，因为仅考虑 PM 就充分确定了系统的稳定性。此外，GM 不可用于该系统，因为相位不会穿过 180°线，GM 总是无穷大的。

367～369

在超前补偿设计中，有三个主要参数：

(1) 穿越频率(ω_c)，用于确定带宽 ω_{BW}、上升时间 t_r 和调节时间 t_s。

(2) 相位裕度(PM)，用于确定系统的阻尼系数 ζ 和超调量 M_p。

(3) 低频增益，用于确定系统的稳态误差。

设计的目的是根据要求找出参数的最优值。实质上，超前补偿会增大 $\omega_c/\angle(0)$ ($=\omega_c/K_v$，对 1 系统)的值。这意味着，低频增益保持不变时，穿越频率将增大，或者，当穿越频率保持不变时，低频增益将减小。根据该对应关系，设计者可以假定这三个设计参数的其中一个为固定值，反复调节另两个参数直到满足性能指标为止。一种方法是确定低频增益以满足误差性能指标，同时加入一个超前补偿器来增大穿越频率处的 PM 值。另一种方法是选取穿越频率使其满足时域响应性能指标，再调节增益和超前特征以满足 PM 性能指标要求。总结设计步骤，它们适用于单一超前补偿就足够解决的一类问题。这种设计方式仅仅只是一个起点；设计者会发现有必要经过一系列反复试验才能得到所有满意的性能指标。

(1) 确定增益 K，使其满足误差或带宽的要求。

- 为了满足误差性能指标的要求，选取 K 值满足误差常数(K_p、K_v 或 K_a)，使其满足 e_{ss}误差性能指标的要求，或者另一种情况。
- 为了满足带宽的性能指标的要求，选定 K 值，使开环穿越频率为期望的闭环带宽的 1/2。

370

(2) 计算未补偿时系统的相位裕度，其中 K 值由步骤(1)得到。

(3) 考虑到留有一定的余量(约 10°左右)，确定所需的最大超前相位 ϕ_{max}。

(4) 根据式(6.40)或图 6.53 选定 α 值。

(5) 选取 ω_{max} 等于穿越频率；因此零点分离点频率为 $1/T_D=\omega_{max}\sqrt{\alpha}$，极点分离点频率为$1/(\alpha T_D)=\omega_{max}\sqrt{\alpha}$。

(6) 画出加入补偿环节后系统的频率特性曲线，检验相位裕度。

(7) 重复上面的设计，调整补偿器参数(零点、极点和增益)，直到满足所有的性能指标要求为止。如果需要可再加一个超前补偿器(即采用双重超前补偿)。

然而，上述步骤未必适用于实际中遇到的所有系统，通过一个系统的试探过程，通常会得出满意的补偿器。

例 6.16　超前补偿用于温度控制系统

三阶系统为

$$KG(s)=\frac{K}{(s/0.5+1)(s+1)(s/2+1)}$$

描述了一个典型的温度控制系统。设计一个超前补偿器，使得系统满足 $K_p=9$ 和 PM≥25°。

解答。按前面的设计步骤进行设计。

(1) 已知 K_p 的性能指标要求，可求得 K，即

$$K_p=\lim_{s\to 0}KG(s)=K=9$$

(2) 用 Matlab 代码画出未补偿时系统 $KG(s)$ 的伯德图，其中 $K=9$，和两种加入补偿后的情况一起，如图 6.57 所示，程序如下。

```
s = tf('s');
sysG = 9/((s/0.5 + 1)*(s + 1)*(s/2 + 1));
w=logspace(-1,1);
[mag,phase] = bode(sysG,w);
loglog(w,squeeze(mag)),grid;
semilogx(w,squeeze(phase)),grid;
```

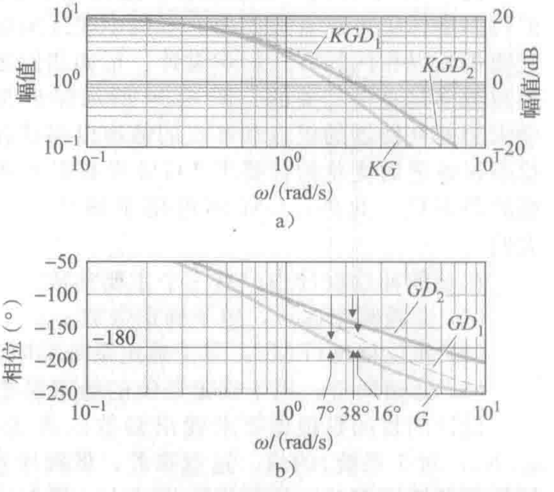


图 6.57　例 6.16 中超前补偿设计的伯德图

由于很难从伯德图中准确读出相位裕度 PM 和穿越频率，故调用下列 Matlab 指令：

```
[GM,PM,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
```

其中变量 PM 是相位裕度，W_{cp} 是幅值为 1 时的频率，GM 是开环幅值裕度，W_{cg} 是相位为 −180° 时的频率。运行结果为 GM= 1.25，PM = 7.14，W_{cg} = 1.87，W_{cp}=1.68。可用看出，未加补偿环节时，系统的相位裕度为 7°，穿越频率为 1.7rad/s。

(3) 为了留有 10°的余量，超前补偿器需要在穿越频率处提供 25°+10°−7°=28°的最大超前相位。因为超前补偿环节会使开环系统的穿越频率增大，在该点需要的相位更大，因此必须留有一定余量。

(4) 从图 6.53 可知，当 $\alpha=1/3$ 时在零点和极点的中点处产生约 30°的相位。

(5) 不妨先将零极点的分离点频率取为 1rad/s($T_D=1$)和 3rad/s($\alpha T_D=1/3$)。因此保持极点和零点是 3 倍的关系，即 $\alpha=1/3$，超前补偿器的传递函数为

$$D_1(s)=\frac{s+1}{s/3+1}=\frac{1}{0.333}\left(\frac{s+1}{s+3}\right)$$

(6) 由加入补偿环节 $D_1(s)$ 后系统的伯德图(见图 6.57 中间的曲线)可知，相位裕度为 16°，并没有得到期望的相位裕度 30°，因为超前补偿使穿越频率从 1.7rad/s 增大到 2.3rad/s。加入补偿 $D_1(s)$ 后系统的阶跃响应(见图 6.58)振荡很严重。

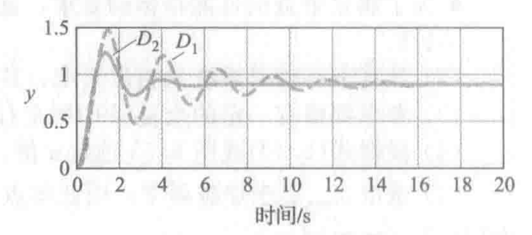


图 6.58　超前补偿的阶跃响应

(7) 重新选择相位补偿进行设计。为了避免穿越频率上升过快，将零点的位置稍微向右移动。当零点 $s=-1.5$，取 $\alpha=1/10$。可得到

$$D_2(s)=\frac{s/1.5+1}{s/15+1}=\frac{1}{0.1}\left(\frac{s+1.5}{s+15}\right)$$

加入补偿环节后系统的相位裕度为 38°，而且穿越频率轻微的降低到 2.2rad/s。图 6.57(上面的曲线)所示的是系统加入修正后补偿环节的频率特性曲线。由图 6.58 可以看出，PM 增大了，系统的振荡明显减弱了。◀

例 6.17　超前补偿用于 1 型伺服机构系统

考虑三阶系统，其传递函数为

$$KG(s)=K\frac{10}{s(s/2.5+1)(s/6+1)}$$

该系统主要针对直流电动机轴的位置传感器存在滞后的情况。设计一个超前补偿器，使得满足 PM=45°和 $K_v=10$。

解答。再次按前面的设计步骤进行设计。

(1) 已知，如果将 $KG(s)$中的 K 取为1，即满足 $K_v=10$。因此令 $K=1$，同时补偿环节的低频增益为1，即可得到满足 K_v 的要求。

(2) 系统的伯德图如图6.59所示。未补偿时系统的相位裕度约为−4°，穿越频率约为4rad/s。

(3) 为了PM留有5°的余量，超前补偿器应提供的最大超前相位为45°+5°−(−4°)=54°。

(4) 从图6.53可知，要满足最大超前相位为54°，α 必须取0.1。

(5) 加入补偿环节后的穿越频率 ω_c 会大于开环时的4rad/s。所以我们取补偿环节零极点的分离点频率分别为2rad/s和20rad/s。于是，备选补偿器的传递函数为

$$D_1(s)=\frac{s/2+1}{s/20+1}=\frac{1}{0.1}\frac{s+2}{s+20}$$

371~373

(6) 加入补偿环节 $D_1(s)$后系统的伯德图(见图6.59中间的曲线)表明系统的相位裕度是23°。单一的超前补偿器不能满足性能指标的要求，这是因为系统在高频段的斜率为−3。

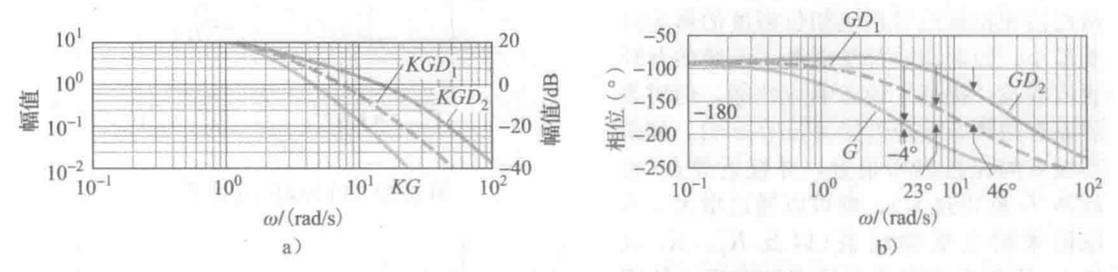


图6.59 例6.17中超前补偿设计的伯德图

(7) 该系统中，我们需要一个双重超前补偿器。补偿器的传递函数为

$$D_2(s)=\frac{1}{(0.1)^2}\frac{(s+2)(s+4)}{(s+20)(s+40)}=\frac{(s/2+1)(s/4+1)}{(s/20+1)(s/40+1)}$$

可得PM=46°，其伯德图如图6.59最上面的曲线所示。◀

例6.16和例6.17都是三阶系统，例6.17的补偿环节设计较为困难，这是因为误差要求 K_v 使穿越频率 ω_c 过大，以至于单一的超前补偿环节无法提供足够的相位补偿，也就无法得到满意的相位裕度。

6.7.3 PI补偿

在许多问题中，系统保持较低的带宽并减小稳态误差很重要。为此，采用PI补偿或滞后补偿器是很有效的。由式(4.73)可知，PI控制的传递函数为

$$D_c(s)=\frac{K}{s}\left(s+\frac{1}{T_I}\right) \tag{6.46}$$

因此其频率特性曲线如图6.60所示，PI控制补偿方式在零频率处有无穷大的增益，这样会减小稳态误差，这是所期望的。然而，会导致在分离点频率 $\omega=1/T_I$ 左侧，存在明显的相位延迟。因此为了减小这种相位延迟对系统相位裕度的影响，$1/T_I$ 通常较穿越频率应足够小。

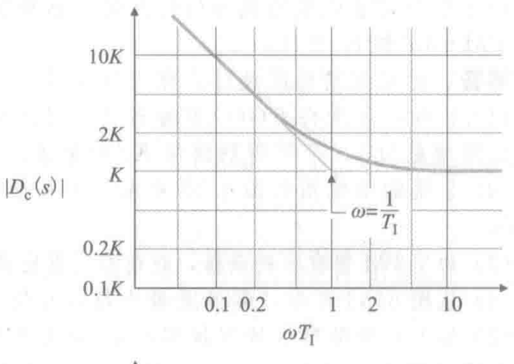
374

6.7.4 滞后补偿

如5.4节所讨论，滞后补偿近似于PI控制，其传递函数在式(5.72)的根轨迹函数设计已经给出，然而对于频率响应设计，滞后补偿环节的传递函数写成伯德形式更便于设计。其传递函数为

$$D_c(s)=\alpha\frac{T_1 s+1}{\alpha T_1 s+1},\quad \alpha>1 \tag{6.47}$$

其中：α 是零极点频率与分离点频率的比值。完整的滞后补偿控制器几乎都包含一个放大增益 K，可能还有其他加入滞后补偿环节的动态元件。虽然式(6.47)和式(6.38)中的超前补偿非常相似，然而由于式(6.47)的 $\alpha>1$ 导致极点的分离点频率小于零点频率。由图 6.61 可以看到，这将导致 $D_c(s)$ 在低频段的幅值增大而相位减小(滞后)。同时也使滞后补偿具备了积分控制的最主要特征：增大的低频增益。滞后补偿设计的主要目的就是在低频范围内提供增益因子 α，从而留给系统足够的相位裕度。当然，为了避免相位延迟，在选择参数时，零极点的分离点频率应尽量小于未加补偿前系统的穿越频率，从而使相位延迟对系统相位裕度的影响降到最小。因此滞后补偿提高了系统的开环直流增益，提高了稳态响应性能，但对系统原有的暂态响应性能并没有影响。如果零极点的位置靠得很近，并接近原点(也就是 T_1 取得过大)，则可以通过增大 α 的取值来增大低频增益(以及 K_p、K_v 或 K_a)，而不必改变闭环极点的分布，从而在保证系统暂态响应性能的同时，改善系统的稳态响应性能。



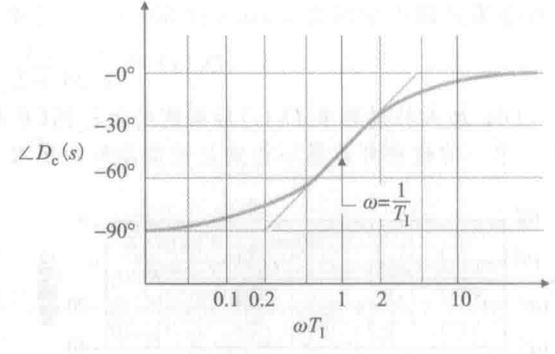


图 6.60　PI 控制频率响应

现在，我们总结一下进行滞后补偿设计的步骤。

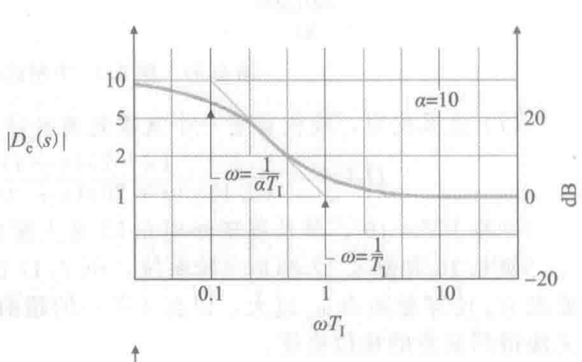
(1) 确定开环增益 K，使系统满足无补偿时相位裕度的要求。

(2) 画出未补偿系统的伯德图，此系统的穿越频率和步骤(1)的一样，计算低频增益。

(3) 确定 α 值，使系统满足低频增益误差的要求。

(4) 选择转角频率 $\omega=1/T_1$(滞后补偿器的零点)，使之比 ω_c 低 2 倍频程到 10 倍频程，ω_c 为期望的穿越频率。

(5) 另一个转角频率(滞后补偿器的极点位置)为 $\omega=1/(\alpha T_1)$。



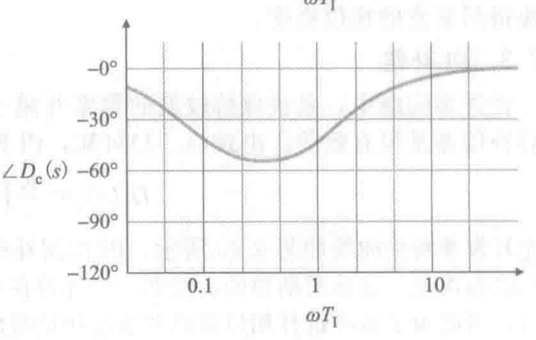
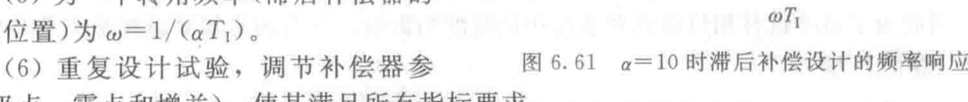


图 6.61　$\alpha=10$ 时滞后补偿设计的频率响应



(6) 重复设计试验，调节补偿器参数(极点、零点和增益)，使其满足所有指标要求。



例 6.18　滞后补偿用于温度控制系统

重新考虑例 6.16 中的三阶系统，传递函数为

$$KG(s)=\frac{K}{\left(\frac{1}{0.5}s+1\right)(s+1)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}$$

设计滞后补偿器，使得相位裕度不少于 40°且 $K_p=9$。

解答。按照前面的设计步骤进行设计。

(1) 图 6.57 所示为 $K=9$ 时 $KG(s)$的开环伯德图，由图可知，当调整穿越频率 $\omega_c\leqslant$ 1rad/s 时，相位裕度 PM>40°，为满足相位裕度性能指标的要求，这里取 $K=3$。

(2) $K=3$ 时，$KG(s)$的伯德图如图 6.62 所示。可以看到相位裕度约为 50°，低频增益为 3，用 Matlab 可得到准确的相位裕度：PM=53°。

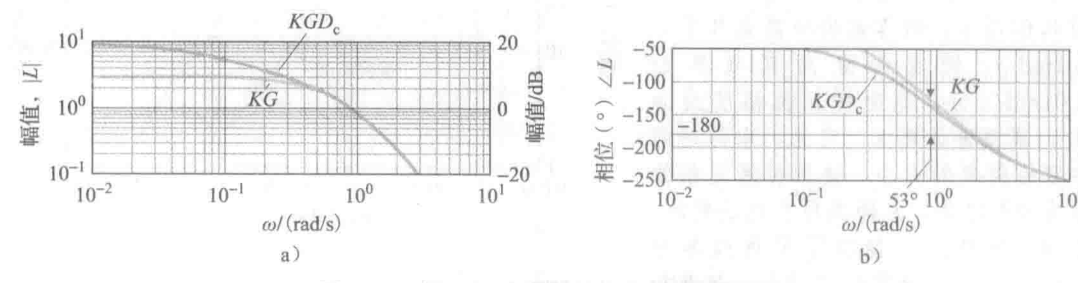


图 6.62 例 6.18 中滞后补偿设计的频率响应

(3) 低频增益需要放大 3 倍，因此滞后补偿中 α 应该取 3。

(4) 选定零点的转角频率。取其比期望穿越频率大约低 4/5，即转角频率为 0.2rad/s 时，$1/T_1=0.2$ 或 $T_1=5$。

(5) 极点的转角频率为 $\omega=1/\alpha T_1=1/15$rad/s。于是补偿器的传递函数为

$$D_c(s)=3\frac{5s+1}{15s+1}$$

图 6.62 所示的是加入补偿环节后系统的伯德图。可以看到，低频增益 $KD_c(0)G(0)=3K=9$，于是 $K_p=9$，并且相位裕度 PM 稍小于 44°，都满足性能指标要求。系统的阶跃响应曲线如图 6.63所示，根据相位裕度为 44°可知，系统具有良好的阻尼。

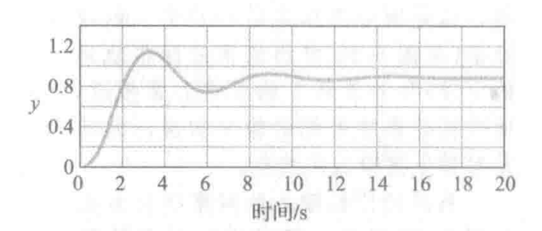


图 6.63 例 6.18 中滞后补偿设计的阶跃响应

(6) 本例不需要重新修正补偿参数。◀

注意，例 6.16 和例 6.18 都对同一个系统进行补偿设计，并且都有相同的稳态误差要求。只不过例 6.16 采用的是超前补偿，而例 6.18 采用的是滞后补偿。比较两次补偿后系统的穿越频率，可以得到这样的结果：采用超前补偿后系统的带宽约为滞后补偿后系统带宽的 3 倍。

在例 6.18 中已看到，滞后补偿的一个优点就是增大低频增益，优化系统的误差特征。然而实质上，滞后补偿降低了 $\omega_c/L(0)$（对 1 型系统而言，是 ω_c/K_v）。也就是说，如果 ω_c 保持不变，低频增益就要增大；同理，如果开环增益保持不变，那么穿越频率 ω_c 就会减小。因此，滞后补偿也可以解释为：通过减小穿越频率来获得较满意的相位裕度。设计过程可以改变。首先，选定低频增益，使之满足误差要求，然后为了获得足够的相位裕度，选定滞后补偿环节的零极点。下面的例子将采用这样的设计过程。当然，无论采用何种方法，其结果都应是一样的。

375 ~ 378

例 6.19 滞后补偿用于直流电动机

重新设计例 6.15 中的直流电动机的控制系统，这次使用滞后补偿，确定低频增益 $K_v=10$ 以满足误差要求，然后通过加入滞后补偿环节使相位裕度 PM=45°。并比较例

6.15 和例 6.19 的开环伯德幅值图和时间响应。

解答。$KG(s)$的频率特性曲线如图 6.64 所示，K 应取 10。可以看出未加补偿环节时穿越频率约为 3rad/s，相位裕度为 20°。因此设计者的任务就是调整滞后补偿环节的分离点频率，降低系统穿越频率，从而获得需要的相位裕度。前面已经讲过了，为了降低补偿部分的相位延迟所带来的影响，滞后补偿环节的零极点要远小于穿越频率。如图 6.64所示，当零点的分离点频率为 0.1rad/s，极点的分离点频率为 0.01rad/s 时，此时的相位裕度约为 50°，满足设计要求。可见，本例是调整穿越频率的大小，使相位满足相位裕度的要求的，从而实现系统稳定的。然而，注意这种情况下穿越频率为 $\omega_c \approx 0.8$rad/s，而图 6.15 中加入超前补偿环节的系统穿越频率为 $\omega_c \approx 5$rad/s。选择零极点位置 $1/T_1$ 的依据是使它们足够的小，从而减小穿越频率处的补偿导致的相位滞后的影响。然而，通常零极点的位置并不是比所需要的低，这是因为选择滞后补偿引入的特征根(与图 5.28 中相似系统的根轨迹的比较)和补偿环节的零点非常接近，而这将会影响系统的输出响应，尤其是对带干扰输入的响应。

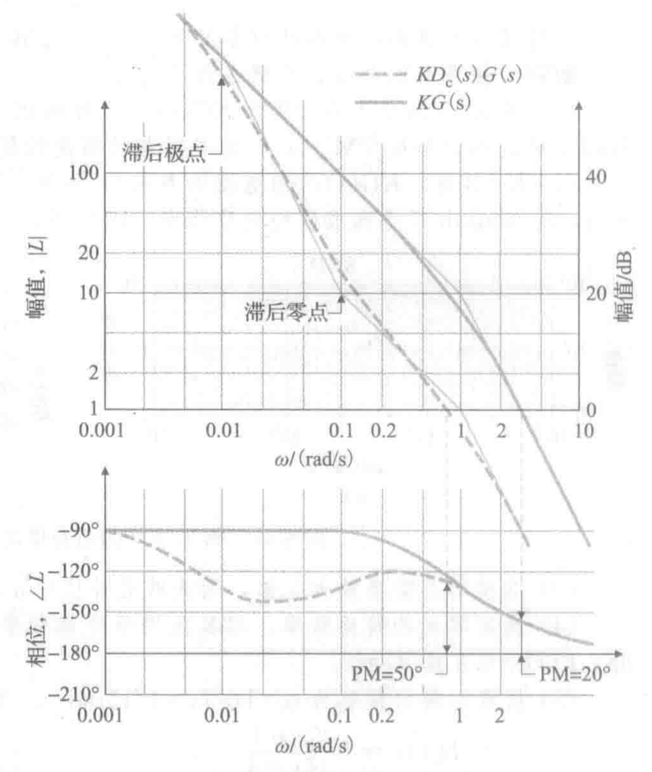


图 6.64　例 6.19 滞后补偿设计的频率响应

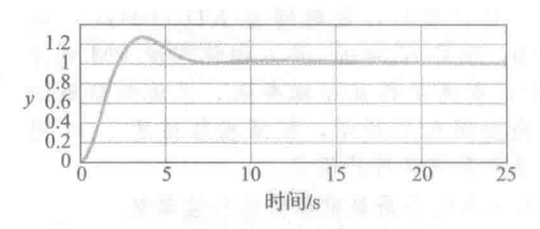


图 6.65　例 6.19 中滞后补偿设计的阶跃响应

系统的阶跃输入的频率响应曲线如图 6.65 所示。可以看到对于阶跃输入，系统是没有稳态误差的，因此它是 1 型系统。但滞后补偿引入的系统特征根导致系统经过了约 25s 才达到最终的稳态，其中上升时间 $t_r=2$s，而例 6.15 中 $t_r=0.33$s，上升时间不同是因为穿越频率不同。并且超调量 M_p 会比预期的稍大。图 6.37 中的二阶系统的 PM=50°，然而这样的性能表现是可以接受的。◀

正如我们之前看到的一个相似的情况，在例 6.15 和例 6.19 中，对相同的系统分别采用了完全不同的补偿形式，满足相同的性能指标。在例 6.15 中采用的是超前补偿，加入超前补偿环节后，得到的结果是系统穿越频率为 $\omega_c=5$rad/s($\omega_{BW}\approx 6$rad/s)。而例 6.19 采用的是滞后补偿，加入滞后补偿环节后的穿越频率为 $\omega_c=0.8$rad/s($\omega_{BW}\approx 0.9$rad/s)。两次设计的穿越频率是不同的，显然，根据对系统的上升时间或带宽的要求不同，补偿方式的选择(超前补偿还是滞后补偿)也不同。同样，如果调节时间过于缓慢，就需要采用超前补偿环节来代替滞后环节。

379 ~ 380

在实际的系统中，因为执行机构和传感器本身响应速度的限制，不可能把系统穿越频率提高到比补偿的速度响应频率还高。尽管线性理论的分析表明，几乎任何系统都可以进行补偿，事实上，如果元件高于其固有频率，系统会达到饱和。线性假设就不再有效，线

性化设计就会没想象得好用。当然，基于线性理论的设计也是没有意义的。因此，简单地增加系统增益以及加入超前补偿环节来获得足够相位裕度，并不是每次都可行的。更可取的方法是通过在系统中加入滞后补偿环节，使系统闭环带宽保持在理想的频率点上，从而满足误差要求。

6.7.5 PID 补偿

对于需要在 ω_c 处提高相位裕度并增加低频增益的系统，有效的方式是同时采用微分控制和积分控制。综合式(6.37)和式(6.46)，我们可以得到 PID 控制规律。其传递函数通常写为

$$D_c(s)=\frac{K}{s}\left[(T_D s+1)\left(s+\frac{1}{T_I}\right)\right] \tag{6.48}$$

它的频率特性曲线如图 6.66 所示。该形式和式(4.75)稍有不同，但影响却是很小的。这种补偿形式大致相当于同时采用超前和滞后补偿器，有时又称为超前滞后补偿。因此它可同时改善系统的暂态响应特性和稳态响应特性。

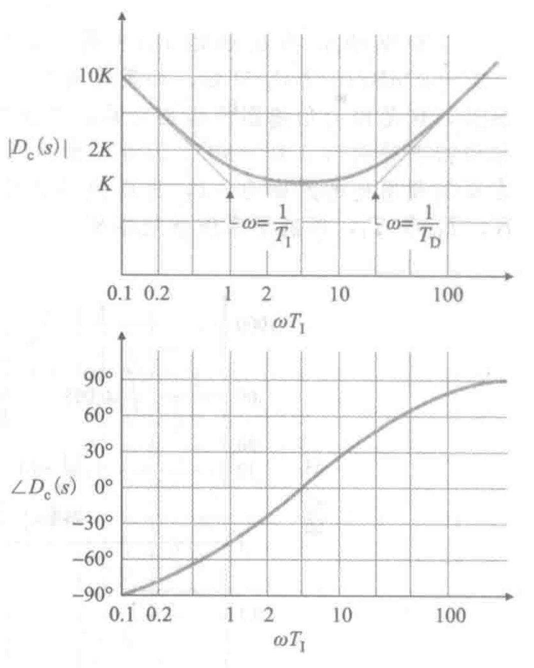


图 6.66 $T_I/T_D=20$ 的 PID 补偿的频率响应

例 6.20 PID 补偿用于航天器的姿态控制

在 6.5 节，曾对简化的航天器姿态控制系统进行过设计。本例中需考虑真实情况下的系统，考虑到系统中存在干扰转矩和传感器滞后作用，系统的框图如图 6.67 所示。

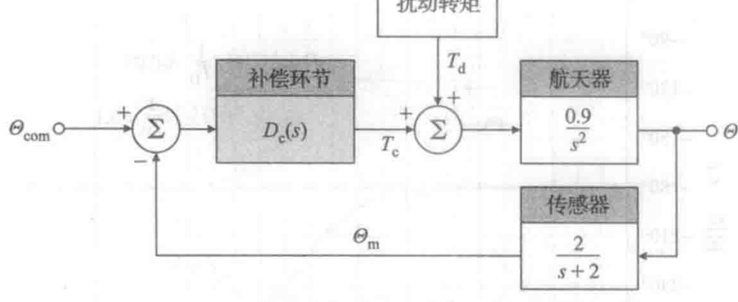


图 6.67 例 6.20 中航天器 PID 控制设计的系统框图

(1) 请设计 PID 控制器，消除干扰转矩的稳态误差，要求系统的相位裕度为 65°，同时系统的带宽要尽可能高。

(2) 画出系统的阶跃响应曲线和阶跃扰动响应曲线。

(3) 画出闭环频率响应，$\frac{\Theta}{\Theta_{com}}$，和灵敏度函数 S。

(4) 确定系统的 ω_{BW} 和 ω_{DRB}。

(5) 由于来自太阳能压力的扰动转矩和轨道速率($\omega=0.001\text{rad/s}$ 或者周期约为 100min)是相等的正弦信号。讨论该控制器对于减弱太阳能压力影响的作用。

解答。首先，考虑稳态误差。航天器要有稳定的姿态，总的输入转矩 T_d+T_c 必须为零。因此，如果 $T_d\neq0$，则 $T_c=-T_d$。唯一可实现的消除误差(即 $e=0$)的方法是 $D(s)$ 中包含有积分项。因此含有积分控制的补偿环节才可以满足稳态误差的要求。这在数学上可通过终值定理来验证(见习题 6.47)。

381
~
382

航天器和传感器的传递函数为

$$G(s)=\frac{0.9}{s^2},\quad H(s)=\left(\frac{2}{s+2}\right) \tag{6.49}$$

其频率响应曲线如图 6.68 所示，由图中曲线斜率为 −2（−40dB/10 倍频）和 −3（−60dB/10 倍频）可知，如果没有微分环节，无论 K 取任何值，系统都是不稳定的。显然，这是因为伯德图的幅相关系，即斜率为 −2 和 −3 时，相位分别为 −180° 和 −270°，相位裕度分别为 0° 和 −90°。因此，如 6.5 节介绍过的，需要加入微分控制，使幅频曲线在穿越频率处的斜率为 −1，进而使系统稳定。现在的任务是确定式(6.48)中的三个参数 K、T_D 和 T_I，以满足系统性能指标。

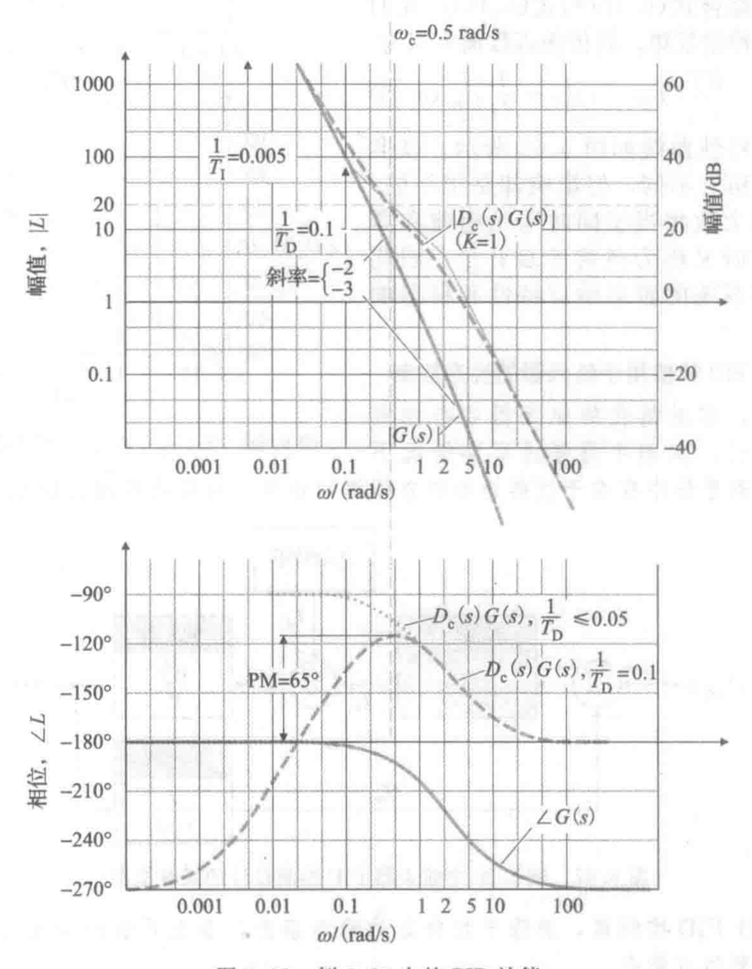


图 6.68　例 6.20 中的 PID 补偿

最简单的方法就是首先考虑相位裕度，在较高的频率点上，使系统的相位裕度为 65°。这主要通过调整 T_D 来实现，在 T_I 远大于 T_D 的情况下，T_I 对相位的影响是很小的。在相位调整好后，就可以根据穿越频率很容易地确定增益 K。

383

根据图 6.66 所示 PID 控制器的相频曲线，判断随着 T_D 取值变化 $D_c(s)G(s)$ 会有怎样的变化。当 $1/T_D \geqslant 2\text{rad/s}$ 时，PID 所提供的超前相位可以抵消传感器的相位延迟，$D_c(s)G(s)$ 的相位不会超过 −180°，系统仍然是不稳定的。当 $1/T_D \leqslant 0.01$ 时，$D_c(s)G(s)$ 的相位在一定的频率范围内接近 −90°，当频率范围更大一些时，相位将会超过 −115°，也就是说，系统的相位裕度的阈值是 65°。图 6.68 所示的是在 $1/T_D$ 取 0.1 时的特性曲线，可以看到要保证相位裕度为 65°，$1/T_D$ 的取值不能比 0.1 再大了，对于任意大于 0.1 的 $1/T_D$

取值，相位在任何频率处都不会达到 −115°(PM=65°)。当 $1/T_D$ 取 0.1 时，系统的相位裕度为 65°，穿越频率为 0.5rad/s。当 $1/T_D \ll 0.05$ 时，相频曲线如图 6.68 的虚线所示。如果 $1/T_D$ 取为 0.05，则穿越频率最大可近似取到 1rad/s。因此，$0.05<1/T_D<0.1$ 是 $1/T_D$ 较理想的取值范围，小于 0.05，系统的带宽不会再有明显的增大，而大于 0.1 就无法得到满意的相位裕度，在此不妨取 $1/T_D=0.1$。

取 $1/T_I$ 为 $1/T_D$ 的 1/20，即 $1/T_I=0.005$。如果 $1/T_I$ 与 $1/T_D$ 的比值再大一些，就会对穿越频率处的相位产生负面影响，从而降低相位裕度。此外，我们总是希望在低于穿越频率 ω_c 的频段上，系统有较大的幅值，这样可以保证系统有较快的暂态响应速度和较小的误差。因此在设计中 $1/T_I$ 与 $1/T_D$ 的取值应尽量大一些。为了使相位增加较大，取 $1/T_D=0.05$，这将允许 $1/T_I$ 有较大的值，可以使控制器的积分部分提供较快的响应。注意这个系统中传感器的分离点在 2rad/s 处，它会限制 $1/T_D$ 可以选择的最大值。习题 6.63 对这个系统使用了交替设计的方法。

剩下的任务就是确定 PID 控制器的比例系数 K 了。例 6.18 中选择 K 值是从满足系统的稳态误差的角度考虑的，而这里是为了得到期望的穿越频率，使系统的相位裕度为期望的 65°。在 6.6 节讨论过确定 K 的取值的过程。首先取 $K=1$，画出补偿后系统的幅频曲线，求出在期望穿越频率处的幅值，就是 $1/K$。从图 6.68 中，可以看出 $K=1$ 时，在 $\omega_c=0.5$rad/s 处，有 $|D(s)G(s)|=20$，因此 $1/K=20$，$K=0.05$。现在能够满足所有性能指标要求的 PID 控制器的表达式为

$$D_c(s)=\frac{0.05}{s}[(10s+1)(s+0.005)]$$

384

值得注意的是，如果降低系统增益，使 $\omega_c \leqslant 0.02$rad/s，那么对应相位就会小于 −180°，如图 6.68 所示，系统是不稳定的。这就是 6.4 节提到的条件稳定系统。将 K 作为参数，本系统和其他所有条件稳定系统的根轨迹图都可以显示出来，对于较小的增益 K，其根轨迹曲线会分布在右半平面。

$$T(s)=\frac{\Theta}{\Theta_{com}}=\frac{D_cG}{1+D_cGH}$$

图 6.69a 所示的是系统对于单位阶跃 Θ_{com} 的响应曲线，可以看到，相位裕度为 65°，保证了系统具有良好的阻尼比。系统对于阶跃扰动转矩 T_d 的响应为

$$\frac{\Theta}{T_d}=\frac{G}{1+D_cGH}$$

图 6.69b 所示的是系统在很小的阶跃扰动转矩 $T_d=0.0175$N·m 作用下的响应曲线。注意，积分控制最终导致系统的误差为零。但由于 $s=-0.005$ 附近都存在极点和零点，会使系统的这个过程很缓慢。这是由于积分项 $1/T_I$ 足够慢，没有过度地影响相位裕度。如果认为系统对干扰如此缓慢的响应速度无法忍受，可以增大 $1/T_I$ 以提升响应速度，但这也会减小系统的相位裕度和系统阻尼。此外也可以将 $1/T_D$ 取较小的值，在不牺牲期望

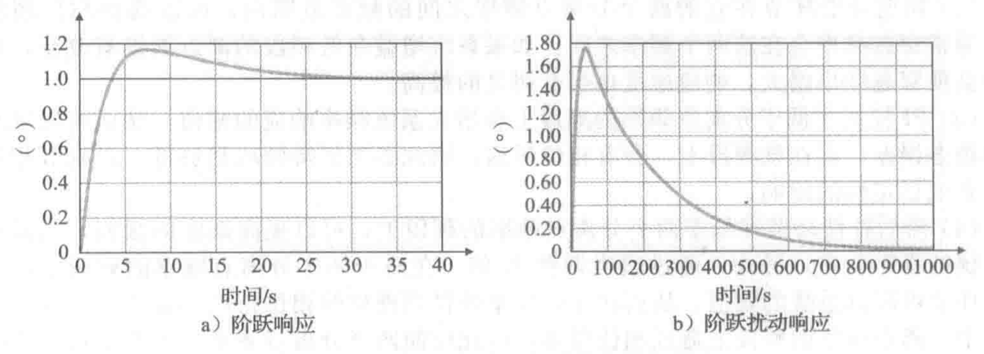


图 6.69　例 6.29 中 PID 补偿后的暂态响应

相位裕度的情况下，给一些额外的相位裕度并允许 $1/T_1$ 取较大的值。在习题 6.63 中将会给读者机会对该系统尝试其他的设计方法。

385

$\mathcal{T}(s)$和$\mathcal{S}(s)$的频率响应曲线如图 6.70 所示，其中：

$$\mathcal{S}(s)=\frac{1}{1+D_cGH}$$

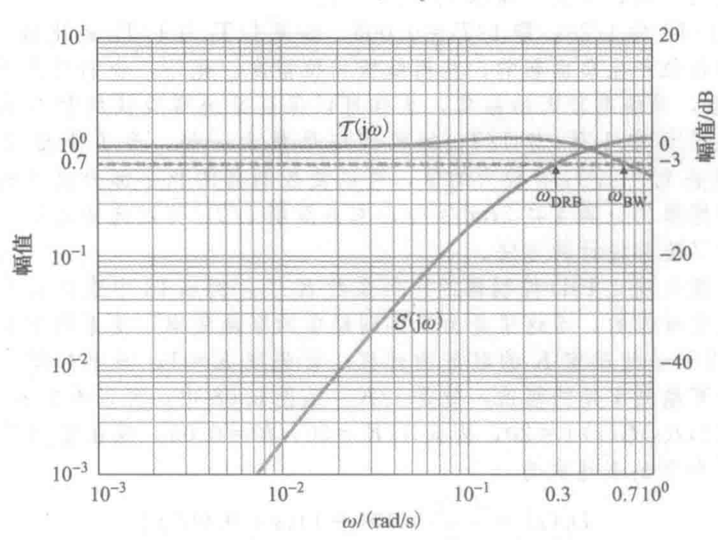


图 6.70 闭环传递函数$\mathcal{T}$(jω)的频率响应和灵敏度函数$\mathcal{S}$(jω)

当这两条曲线相交于幅值为 0.707(−3dB)线时，ω_{BW} 和 ω_{DRB} 被确定了，如图 6.70 所示。$\omega_{BW}=0.7$rad/s 和 $\omega_{DRB}=0.3$rad/s。大部分人造卫星的干扰的轨道周期速度是 0.001rad/s。从图中可以看出，灵敏度函数$\mathcal{S}$在此频率处近似为 10^{-5}，这说明了误差衰减较快。随着扰动频率的增加误差衰减减慢，当带宽约等于 0.7rad/s 时，误差几乎为零。从图 6.69b 可以看出，当轨道的周期为 100min 或 6000s 时，由于积分环节的作用，大约在 1000s 时，轨道阶跃误差基本为 0。因此，我们可以看出，轨道的扰动对这个控制器的影响很小。

注意设计过程中带宽受传感器的响应特性限制，它的带宽为 2rad/s。因此，提高误差特性的唯一途径就是提高带宽。另一方面，传感器带宽的提高可能会使高频传感器噪声剧烈变化。因此，设计者应该知道哪个特性(扰动误差或者传感器噪声误差)对整体系统更重要。◀

386

(1) PD 控制在高于分离点的各频率点上均可以提供相位超前补偿。如果系统增益在低频段的渐近线不变，那么 PD 补偿环节会增大穿越频率，提高系统的响应速度。但 PD 控制在高频段频率响应的幅值增大会增加系统对噪声的敏感度。

(2) 超前补偿环节在它的两个分离点频率之间的频率范围内，可以提供相位超前补偿，通常穿越频率会在这两个频率之间。如果系统增益在低频段的渐近线没有改变，超前补偿会使穿越频率增大，响应速度也会有明显的提高。

(3) PI 控制在低于分离点频率的频段上会增大系统频率响应的幅值，从而可以减小系统的稳态误差。但在该频段上，会有相位延迟，因此必须保持频率足够低，以降低相位延迟对系统稳定性的影响。

(4) 滞后补偿环节在低于两个分离点频率的频段上，可以提高系统的幅值，从而可降低系统的稳态误差。另外，通过适当调整 K 值，在高于两个分离点频率的频段上，滞后补偿环节可降低系统的幅值，从而在穿越频率处得到理想的相位裕度。滞后补偿环节也会在两个分离点频率的频段上造成相位延迟，因此应使两个分离点频率尽可能小，以减小其对相位裕度的影响。滞后补偿相对于超前补偿，通常会使系统的响应速度明显下降。

6.7.6 设计要素

从前面的设计可知，环路增益 $L(s)(=KD_cG)$ 在开环伯德图上的特征决定了系统的稳态误差、低频误差和动态响应的性能(包括稳定裕度)。在第4章曾提到，反馈设计的其他性能，包括降低传感器噪声的影响和系统参数的变化对系统性能的影响。

在已提出的不同设计方法中，由于控制输入和干扰输入是设计中重要组成部分，因此有必要对系统的稳态误差或低频误差进行研究。要满足特定的稳态误差要求，就应保证在较低的频段上系统的开环增益高于某下限。系统灵敏度问题要考虑高频段的增益。在第4章以及5.4节、6.7节中都简单地讨论过，要减小传感器噪声的影响，高频段的系统增益必须尽可能低。实际上，在设计超前补偿时，在纯微分控制的传递函数中加入一个极点，可以有效地抑制高频段的传感器噪声。为了高频噪声有更强的抑制作用，可以再加入一个极点，采用如下的形式。 387

$$D_c(s)=\frac{T_Ds+1}{(\alpha T_Ds+1)^2}$$

第二个影响高频增益的要素是许多系统存在高频动态现象，如机械谐振，这会影响系统的稳定性。在系统性能要求极高的设计中，系统模型中也包含高频动态特性，需对这些动态特性有充分认识，再设计补偿器。对于未知的高频动态特性，标准做法就是，保持系统高频段的增益尽可能低，在抑制传感器噪声中也是这样做的。这样做的原因从图6.71所示的典型系统的增益频率关系图可知。高频动态特性导致系统不稳定的唯一可能性就是，未知的高频谐振会引起幅值增加并使之超过1。相反地，只要保证所有未知的高频动态特性可以使系统幅值总低于1，就可以保证系统的稳定性。在 $D_c(s)$ 中额外增加极点，能够在高频段降低名义环路增益 (L)，那么也就减小了 G 中未知谐振导致系统不稳定的可能性。对于具有振荡现象的系统，通过修正高频段的幅值，使之不超过1，以保证系统稳定性，通常称为幅值或增益镇定。当然如果高频动态特性是可知的，那么精心设计的补偿环节可以改变某特定频率点上的相位，以避免奈奎斯特图包围−1点，尽管幅值超过了1，但系统仍然是稳定的。这种使系统保持稳定的方法，一般称为相位镇定。采用相位镇定面临的一个难题，就是很难对高频动态特性有足够的认识，况且它可能还是不断变化的。因此，这种设计方法更容易受系统模型中误差的影响，所以要将高频段的名义环路增益降到足够低。这可同时降低系统对模型不确定性和传感器噪声的敏感度。 388

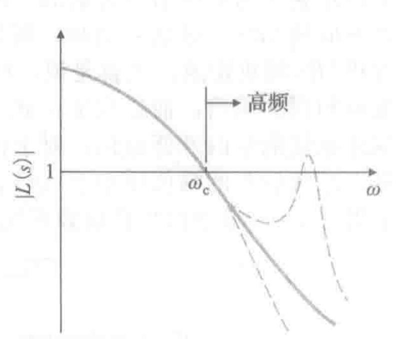


图6.71 高频被控对象不确定性的影响

图6.72所示的是高频行为和低频行为的灵敏度表现。可以看到，系统增益值应有下限，这可以保证系统有满意的稳态误差。而系统在高频段的增益也应有上限，这对抑制噪声有理想的效果，同时可降低因对象模型中存在的误差导致系统不稳定的可能性。为了处理方便，从频率响应的思路出发，将低频处的下限和高频处的上限定义为关于频率的函数 W_1 和 W_2^{-1}，并在系统的幅值曲线图上描述它们，如图6.72所示。在这两个频率之间的频段上，设计者应使增益曲线在要求的带宽附近穿越横轴，并且穿越处的渐近线斜率为−1或者稍小于−1。这样才能有理想的相位裕度，同时也就具有了满意的系统

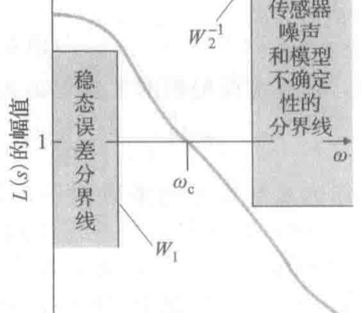


图6.72 低灵敏度的设计准则

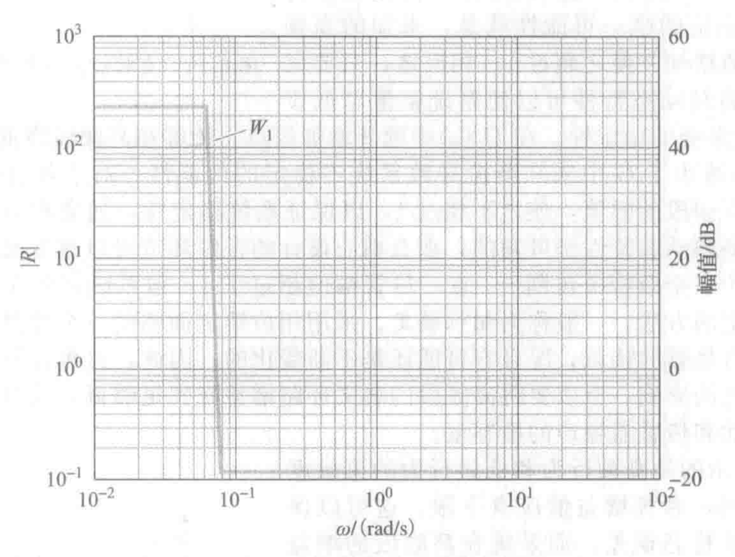
阻尼比。

举个例子，某控制系统要求以低于1%的误差跟踪0到ω_1频率范围上的任意正弦输入信号，那么W_1应满足$\omega_1=100$，其中$0\leqslant\omega\leqslant\omega_1$。确定$W_2^{-1}$的值也采用该方式，当频率高于$\omega_2$时，应该迫使开环增益低于$W_2^{-1}$。在下一节对此会有深入的讨论。

△6.7.7　用灵敏度函数描述性能指标

已经知道，幅值裕度和相位裕度不但包含了关于系统的相对稳定性的有用信息，而且还可作为超前补偿和滞后补偿的设计策略。然而，在实际的系统设计中，仅有GM和PM两个性能指标指导设计是不够的。如果可以先给出一些外部信号的频率描述，诸如参考输入信号和干扰信号，同时考虑到4.1节所定义的灵敏度函数，则可以在频域上给出更为完整的设计指标。例如，到目前为止，我们还只是通过系统对简单的阶跃和斜坡输入信号的暂态响应来描述系统的动态性能。对于实际中输入复杂信号，更为精确的描述是将它们看成具有一定功率谱密度的随机过程。为了简化分析，而又不失准确性，可认为这些信号是由某特定频率的正弦信号合成的。例如，通常在频域上这样描述参考输入信号：它是一组具有不同频率的正弦信号的和，而各种频率的正弦信号的幅值，是由图6.73所描述的幅值方程$|R|$所决定的。也就是说，由正弦信号分量组成的信号，一直到某个频率ω_1，各分量都有相同的幅值。而在大于ω_1的频率范围内，因为幅值极小所以可忽略。于是可以这样来描述系统响应的性能指标：对于任意频率ω_0，满足$0\leqslant\omega_0\leqslant\omega_1$，幅值为$|R(\mathrm{j}\omega_0)|$的正弦信号，系统误差的幅值应小于$e_b$(比如0.01)。为了表示设计中使用的性能要求，重新考虑一下图6.74所描述的单位反馈系统。对于这样的系统，其误差是由下式决定的：

$$E(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+D_cG}R\overset{\text{def}}{=}\mathcal{S}(\mathrm{j}\omega)R \tag{6.50}$$



389～390

图6.73　典型参考输入信号的频谱

其中：就是前面提到的灵敏度函数。

$$\mathcal{S}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{1+D_cG} \tag{6.51}$$

作为系统误差的乘数因子，灵敏度函数也正是DG在奈奎斯特图上的曲线与临界点−1的距离倒数。因此，$\mathcal{S}$的取值越大，表示奈奎斯特图越接近不稳定点。根据式(6.50)，频域内的误差指标可表示为

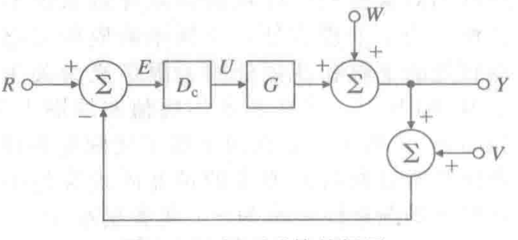


图6.74　闭环系统的框图

$|E|=|\mathcal{S}||R|\leqslant e_b$。为了使问题规范化，不必每次都定义频率 R 和误差限度 e_b，通过定义频率 ω 的实数方程 $W_1(\omega)=|R|/e_b$，那么式(6.50)就可以写成

$$|\mathcal{S}|W_1\leqslant 1 \tag{6.52}$$

例 6.21　性能界定函数

某单位反馈系统，对于频率小于 100Hz、幅值为 1 的正弦输入信号，要求其误差小于 0.005。请画出该设计的频率特性函数 $W_1(\omega)$ 曲线。

解答。根据题中的描述，输入信号的幅值在 $0\leqslant\omega\leqslant 200\pi$ 的频率范围都是 1。因为 $e_b=0.005$，在给定的范围内所需的函数振幅为 1/0.005=200。性能界定函数的函数曲线如图 6.75 所示。◀

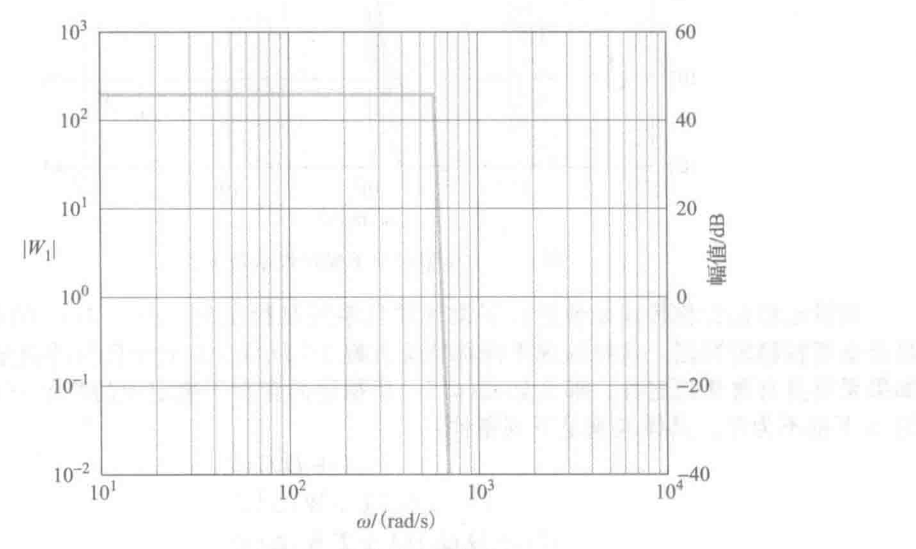


图 6.75　性能界定函数 W_1

式 6.52 的表达式可以转化为更熟悉的伯德图形式，我们会发现它实际上描述了误差很小、回路增益很大时对环路增益的要求。这种情况下 $|\mathcal{S}|\approx 1/|D_cG|$，式(6.52)可近似为：

$$\frac{W_1}{|D_cG|}\leqslant 1$$

$$|D_cG|\geqslant W_1 \tag{6.53}$$

这个约束条件可以看做是稳态误差指标的扩展，只不过频率由 $\omega=0$ 变成了 $0\leqslant\omega_0\leqslant\omega_1$。

除了保证系统有良好的动态性能，设计者通常还应考虑鲁棒稳定性。也就是说，在可预测到的如温度、老化和其他操作上的或环境的不确定性因素的影响下，被控对象的传递函数发生变化时，针对标称传递函数所做的设计仍是稳定的。为了描述这种不确定性，比较现实的做法是利用一个描绘不确定性的乘数因子来描述被控对象的传递函数：

$$G(\mathrm{j}\omega)=G_0(\mathrm{j}\omega)[1+W_2(\omega)\Delta(\mathrm{j}\omega)] \tag{6.54}$$

在式(6.54)中，实数函数 W_2 表示的是不同频率处传递函数幅值变化的大小。用 G 和 G_0 关系可表示为

$$W_2=\left|\frac{G-G_0}{G_0}\right| \tag{6.55}$$

W_2 在低频处(也是对象模型最准确时)非常小，而在高频处相关参数会发生变化，W_2 会突然增大。图 6.76 所示的是 W_2 的典型函数曲线，复数函数 $\Delta(\mathrm{j}\omega)$ 代表相位的不确定性，它只有一个约束条件：



$$0 \leqslant |\Delta| \leqslant 1 \tag{6.56}$$

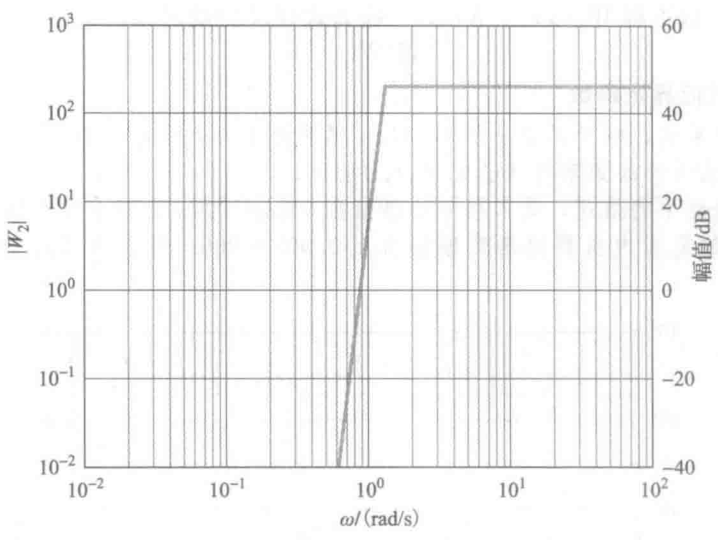


图 6.76　典型对象不确定性函数 W_2

假设已根据标称传递函数进行了设计并且系统是稳定的，因此 D_cG_0 的奈奎斯特图满足奈奎斯特稳定判据。这种情况下标称特征方程 $1+D_cG_0=0$ 对于任何的频率都不会成立。如果系统具有鲁棒稳定性，那么如式(6.54)所描述的含有不确定项的特征方程在任何频率的 Δ 下都不为零。具体应满足下列条件：

$$1 + D_cG \neq 0 \tag{6.57}$$

$$1 + D_cG_0[1 + W_2\Delta] \neq 0$$

$$(1 + D_cG_0)(1 + \mathcal{T}\, W_2\Delta) \neq 0$$

定义补灵敏度函数：

$$\mathcal{T}(\mathrm{j}\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_cG_0/(1 + D_cG_0) = 1 - \mathcal{S} \tag{6.58}$$

因为标称系统是稳定的，所以式(6.57)等式右边的第一项 $1+D_cG_0$ 不为零的。因此，如果式(6.57)在任何频率和 Δ 下都不为零，那么充分必要条件为

$$|\mathcal{T}\, W_2\Delta| < 1$$

根据式(6.56)上式可化简为：

$$|\mathcal{T}|W_2 < 1 \tag{6.59}$$

对于单输入单输出的单位反馈系统，该性能指标要求还可近似为更为简便的形式。在低频处，W_2 是可以忽略不计，因为在高频处被控对象存在不确定性，此处的 D_cG_0 很小，因此 $\mathcal{T}$ 可近似表示为 $\mathcal{T} \approx D_cG_0$。于是可化简为：

$$|D_cG_0|W_2 < 1$$

$$|D_cG_0| < \frac{1}{W_2} \tag{6.60}$$

391～393

正如上面讨论的，系统的设计中鲁棒性很重要，它会影响系统的高频开环频率响应。然而，正如之前讨论过的，为了抑制噪声干扰，限制高频幅值也很重要。

例 6.22　典型的对象不确定性

对象模型的不确定性由函数 W_2 描述，W_2 在 $\omega=3000$ 时为 0，然后线性上升到 $\omega=10000$ 处的 100，并且在更高频率上一直保持 100 不变。画出 D_cG_0 应满足的约束条件。

解答。当 $W_2=0$，对环路增益的幅值没有约束。当 $3000<\omega<10000$ 时，$1/W_2=D_cG_0$，是从 ±∞ 到 0.01 的双曲线，在 $\omega>10000$ 时，保持为 0.01。图 6.77 所示的是 D_cG_0

的边界曲线。

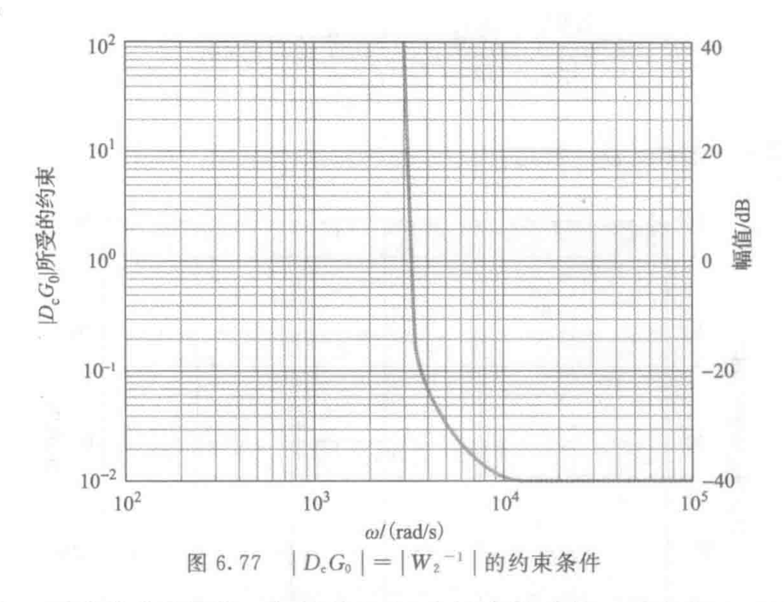


图 6.77 $|D_cG_0|=|W_2^{-1}|$的约束条件

在实际中，环路增益的幅值一般是以 lg-lg 坐标来描述的，因此式(6.53)和式(6.60)中的约束条件也包含于同样的坐标系中，图 6.72 所示的就是典型情况。设计者设法构造开环增益曲线，使其在低于频率 ω_1 的范围内大于 W_1，然后 $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$ 的频率范围内穿越幅值为 1 的水平线($|D_cG|=0$)，最后在高于 ω_2 的范围内，使之低于 $1/W_2$。

△6.7.8 用灵敏度函数描述的限制条件

伯德图的一个主要作用是发现关键的限制条件并将其具体为可实现的设计指标。例如，希望系统在尽可能宽的频率范围内保持小的系统误差，或者对存在不确定性的系统，希望它具有鲁棒性。根据图 6.78 可知，我们希望 W_1 和 W_2 在各自的频率范围内尽可能大，并且 ω_1 要尽可能地接近 ω_2，这样环路增益就可以在非常小的频率范围内突然的下降，由大于 W_1 变化到小于 $1/W_2$，同时保证有理想的相位裕度，使系统稳定并有良好的动态性能。但根据前面给出的伯德图幅相关系方程可知，利用线性控制器无法实现上面的设想。因为相位是由幅频特性曲线斜率的积分来决定的。如果这个斜率在 ω_0 附近相当宽的频率范围内是个常数，那么幅相关系方程可近似为

$$\phi(\omega_0) \approx \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u}\Big|_{u=0} \tag{6.61}$$

其中：M 就是幅值的对数值 $u=\lg(\omega/\omega_0)$。如果要保证相位大于 $-150°$，相应的相位裕度为 30°，那么幅频曲线在 ω_0 附近的斜率可由下式估值：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u} &\approx \frac{2}{\pi}\times\left(-150\times\frac{\pi}{180}\right)\\ &\approx -1.667\end{aligned}$$

如果想使曲线变化更快(取更小的负值)，那么就必须减小相位裕度。据此，提出这样一条设计规则：伯德图上的幅频曲线应以斜率 −1 穿越 0dB 的水平线，并在穿越频率 ω_c 附近约 10 倍频内尽量保持这一斜率。该结论在 6.5 节已经讨论过了。当然，特殊情况下，这一规则需要做些调整，但式(6.61)隐含的限制条件是必须成立的。因此，很明显图 6.78 所示的系统肯定不会稳定。

例 6.23 鲁棒约束条件

如果 $W_1=W_2=100$，希望相位裕度 PM=30°，试确定 ω_2/ω_1 的最小值。

解答。 计算斜率为

$$\frac{\lg W_1 - \lg \dfrac{1}{W_2}}{\lg\omega_1 - \lg\omega_2} = \frac{2+2}{\lg \dfrac{\omega_1}{\omega_2}} = -1.667$$

求得 $\lg \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = -2.40$，$\omega_2 = 251\omega_1$。◀

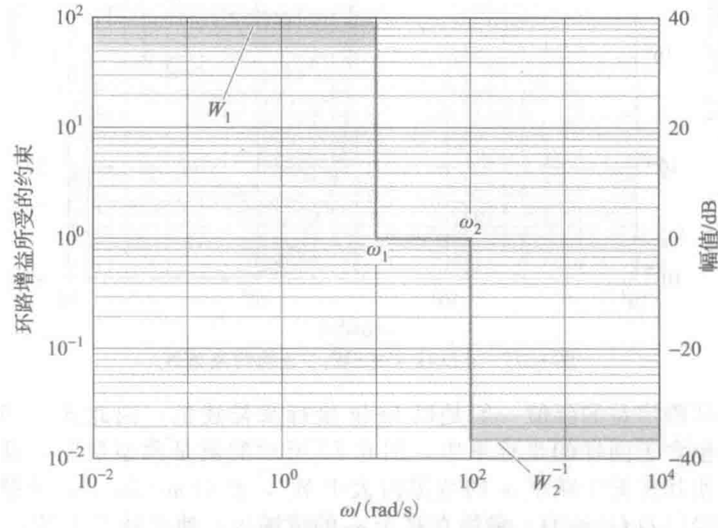


图 6.78 伯德图上关于系统跟踪特性和鲁棒性的约束条件

像标准伯德图可作为系统设计的指导一样，以频率为变量的灵敏度函数，其函数曲线同样可作为设计工作的指导。根据式(6.52)可知，要得到满意的系统性能，在 $0\leqslant\omega\leqslant\omega_1$ 的频率范围内，应满足 $|\mathcal{S}|<1/W_1$，而根据式(6.60)可知，要使系统具有鲁棒稳定性，在 $\omega_2\leqslant\omega$ 的频率范围内，应满足 $|\mathcal{S}|\approx 1$。又是伯德发现了这些条件成立的限制条件。弗罗伊登伯格(Freudenberg)和洛西(Looze)在 1985 年发展了伯德的观点，指出灵敏度函数的积分是由分布在右半平面的极点所决定的。假设环路增益 D_cG_0 在右半平面有 n_p 个极点 p_i，并且在高频段以小于 -1 的斜率迅速下降，这对于有理式而言，意味着有限极点的数目至少比零点的数目多 2 个。在此假设条件下，积分式可表示为

$$\int_0^{+\infty} \ln(|\mathcal{S}|)\mathrm{d}\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_p} \mathrm{Re}\{p_i\} \tag{6.62}$$

如果在右半平面没有极点，则积分式为零。这意味着，如果在某个频率范围内使 $\ln(|\mathcal{S}|)$ 取绝对值很大的负值，减小系统误差，那么在另一个频率范围内，$\ln(|\mathcal{S}|)$ 必然会取绝对值很大的正值，会使系统误差变大。这种特点被认为是“水床效应”，如果有不稳定的极点，情况会更糟，因为积分面积为正的区域将比积分面积为负的区域大，也就是，对系统误差的放大作用要比对误差的减小作用大。如果系统是最小相位系统，那么在原则上认为，只要灵敏度在整个正的频率范围内是一直增加的，可以保证灵敏度函数的幅值取较小值。但这需要系统有足够的带宽，而这在实际中几乎是无法实现的。如果要求系统带宽为某具体值，那么在低于带宽的某个频率点上，灵敏度函数应是一个有限的、可能很大的正值。因为 6.4 节(见图 6.38)中定义的矢量裕度 VM，$\mathcal{S}_{\max}$ 越大，意味着奈奎斯特图越接近临界点 -1，系统的失量裕度越小。其关系如下：

394 ~ 396

$$\mathrm{VM} = \frac{1}{\mathcal{S}_{\max}} \tag{6.63}$$

所以，如果系统是非最小相位系统，情况会变糟。因为 D_cG_0 在右半平面有零点，式(6.62)需要重新修正。假设这个零点为 $z_0=\sigma_0+\mathrm{j}\omega_0$，$\sigma_0>0$，还是认为在右半平面有 n_p

个极点$\overline{p_i}$分布，那么这种情况可以由双边加权的积分式表示：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(|\mathcal{S}|) \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2+(\omega-\omega_0)^2} \mathrm{d}\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_p} \ln\left|\frac{\overline{p_i}+z_0}{p_i-z_0}\right| \tag{6.64}$$

在这种情况下，不再假设系统在高频段快速下降，因为上式中的权函数随着频率的增大迅速趋于零，所以在高频段不会有正的积分面积。关于积分式重要的一点是，如果右半平面的非最小相位系统零点靠近右半平面的某个极点，那么积分式的右边会有很大的一个值。相应地要求在积分区间上，积分面积为正的区域会很大。因此，如果系统在右半平面有非常接近的零点和极点，那么要同时满足系统的跟踪特性和鲁棒性要求是非常困难的。

例 6.24 天线的灵敏度函数

天线的开环传递函数为 $G(s)=1/s(s+1)$，补偿部分的传递函数为 $D(s)=10(0.5s+1)/(0.1s+1)$。试确定系统的灵敏度函数并绘图。

解答。系统的灵敏度函数为

$$\mathcal{S}=\frac{s(s+1)(s+10)}{s^3+11s^2+60s+100} \tag{6.65}$$

用 Matlab 绘图，如图 6.79 所示，其语句如下。

```
s = tf('s');
sysS = s*(s + 1)*(s + 10)/(s^3 + 11*s^2 + 60*s + 100);
[mag,ph,w] = bode(sysS);
loglog(w,squeeze(mag)),grid
```

由 M=max(mag)可求得$\mathcal{S}$的最大值为 1.366，可计算出矢量裕度 VM=0.732。◀

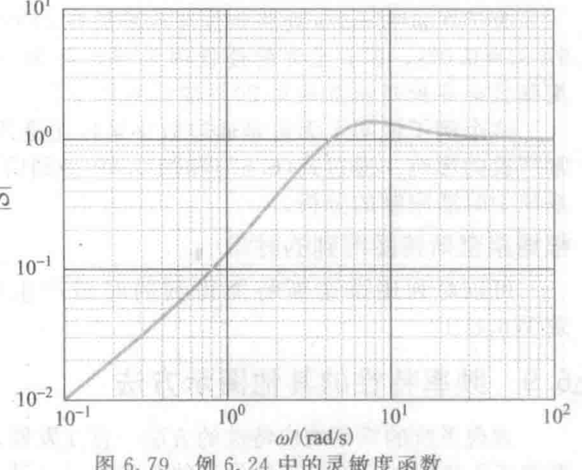


图 6.79 例 6.24 中的灵敏度函数

△6.8 时滞

纯时滞的拉普拉斯变换为 $G_D(s)=e^{-sT_d}$。可将其近似表示为有理式形式(Padé 近似)(附录 W5.6.3)。尽管相同的近似方式可以应用于频率响应的分析方法，但是对于时滞环节有更准确的分析方法。

延迟环节的频率响应特性可由 $e^{-sT_d}|s=j\omega$ 的幅值和相位来描述。其幅值为

$$|G_D(j\omega)|=|e^{-j\omega T_d}|=1,\text{对于所有 }\omega \tag{6.66}$$

由式(6.66)可知，延迟环节的幅值恒为1，因为时滞环节对信号只在时间上起延迟作用，而对其幅值没有影响。其相位为

$$\angle G_D(j\omega)=-\omega T_d \tag{6.67}$$

由式(6.67)可以看出，它总是负值，并且与频率成比例。这是因为固定的时滞 T_d 相对于渐增的频率是增大的。图 6.80 所示的是$\angle G_D(j\omega)$函数曲线，可以注意到当 ωT_d 大于 5rad 时，相位已经大于 270°，这意味着要使穿越频率大于 $\omega=5/T_d$ 的系统保持稳定是不可能的。同样，当穿越频率大于 $\omega\approx3/T_d$时，系统很难保持稳定。这些特性实际上限制了时滞系统的带宽(习题 6.64可作为这一问题的例子)。

频域上的概念，如奈奎斯特稳定判据，直接适用于含有纯时滞的系统。这意味着不需要近似处理(Padé 近似或其他形式的近似)，并且准确的时滞作用可用于伯德图，如下例所示。

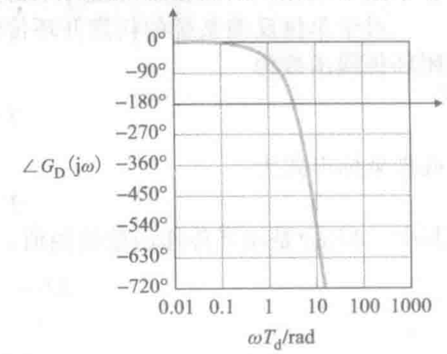


图 6.80 纯时滞的相频特性

例 6.25 采样对稳定性的影响

当使用数字计算机来设计带补偿环节的控制系统时，目标输出是周期采样的，用于计算机进行计算，然后在同样的采样频率下输出，作为控制信号。它的作用是设计一个延迟，延迟的时间平均是采样周期 T_s 的一半。当数字控制器的采样周期为 $T_s=0.05$ 秒时，确定延时对 PM 的影响，同时评估对阶跃响应超调量的影响。如果要求相位裕度的下降值必须小于 20°应如何采样。

解答。采样周期 $T_s=0.05\text{s}$，时滞为 $T_s/2=0.05/2=0.025=T_d$。由式(6.67)可知，已知例 6.15 中的穿越频率为，相位滞后是由于在该点采样造成的，计算相位裕度 $\angle G_D=-\omega T_d=(-5)\times 0.025=-0.125\text{rad}=-7°$。因此，相位裕度将从连续信号 53°降低到数字信号的大约 46°。图 6.37 表明超调量 M_p 将从约 16%下降到约 22%。这是一个非常近似的分析，但它就如何使用数字计算机进行采用控制器的设计，给出了一个粗略的概念。

为了在 $\omega=5\text{rad/s}$ 处将相位滞后限制为 20°时，由式(6.67)可知，最大允许 $T_d=20/(5*57.3)=0.07\text{s}$，因此允许的最低的采样时间为 $T_s=0.14\text{s}$。然而需要注意相位裕度的大幅度降低会导致超调量从约 20%增加到约 40%。 ◀

397~399

这个例子说明了无论是通过数字采样还是任何其他的数据源产生的时滞对带宽都有非常严重的影响。通过式(6.67)和图 6.80 得到的评价是简单直接的，从而快速地给出了由系统中时滞限制的分析。

根据奈奎斯特图得到的时滞

可以对利用奈奎斯特图得到的时滞产生的影响进行评价，见 www.fpe7e.com 附录 W6.8.1。

△6.9 频率特性的其他图示方法

表现系统的频率响应特性的方法一直在发展，现在既能使设计简单易懂，又能减少设计者的工作负担。计算机辅助设计的普遍应用，设计者的工作负担被大大减轻了。然而，尼科尔斯图方法仍在设计过程中广泛应用，见 www.fpe7e.com 附录 W6.9.2 中的奈奎斯特方法。

6.9.1 尼科尔斯图

尼科尔斯图的纵坐标表示的是 $\log|G(\text{j}\omega)|$，而横坐标则为$\angle G(\text{j}\omega)$。在伯德图上的幅频曲线和相频曲线可很方便地直接画出相应的尼科尔斯图。因此新的曲线的每一个点都对应着一个频率值 ω，曲线上是以频率的函数为参变量的。和伯德图一样，幅值采用对数刻度的坐标，而相位则采用线性刻度的坐标。这一模型是由 N. 尼科尔斯提出的，故通常又称为尼科尔斯图。$G(\text{j}\omega)$的幅值相对其相位画图的方法与描述的实部和虚部的画图方法是相似的，奈奎斯特图的实部和虚部的基本原理见式(6.3)和式(6.4)。但以线性刻度的奈奎斯特图很难表现出所有相关特征，而尼科尔斯图中的幅值是采用对数刻度表示的，正好弥补了这一缺点，从而在系统设计中得到了广泛的应用。

对于单位反馈系统的任意开环传递函数 $G(\text{j}\omega)$，如 6.6 节所示，都有唯一的单位反馈闭环传递函数为

$$\mathcal{T}(\text{j}\omega)=\frac{G(\text{j}\omega)}{1+G(\text{j}\omega)} \tag{6.68}$$

或极坐标形式为

$$\mathcal{T}(\text{j}\omega)=M(\omega)\text{e}^{\text{j}\alpha(\omega)} \tag{6.69}$$

其中：$M(\omega)$是闭环传递函数的幅值，$\alpha(\omega)$是闭环传递函数的相位。具体表达式为

$$M=\left|\frac{G}{1+G}\right| \tag{6.70}$$

$$\alpha=\arctan(N)=\angle\frac{G}{1+G} \tag{6.71}$$

可以证明，在 $G(j\omega)$ 的线性奈奎斯特图上，闭环等幅值线和相位各自相等的点连成的闭合曲线都是圆周，如同地图上的“等高线”，它们分别称为等 M 圆和等 N 圆。

400

从图 6.81 可以看到，尼科尔斯图上也存在闭环等幅值线和相位的“等高线”，然而它们不再是圆周，这是由于尼科尔斯图是幅值相对于相位的半对数分度的。设计者仍可以通过详细的图解方式来确定闭环系统的带宽，设计者只需注意开环特性曲线在何处与幅值为 0.7 的“等高线”相交，并确定相应的频率值。同样地，设计者只需注意与开环特性曲线相切的幅值“等高线”的最大幅值，即可得到谐振峰值 M_r。相切处幅值和相位的频率值通常称为谐振频率 ω_r。类似地，要确定幅值裕度，观察曲线在横坐标为 $-180°$ 处的对应增益值。要确定相位裕度，观察纵坐标为 1 处的对应相位值[⊖]。Matlab 中提供的 nichols m-file 可以很容易地绘制出尼科尔斯图。

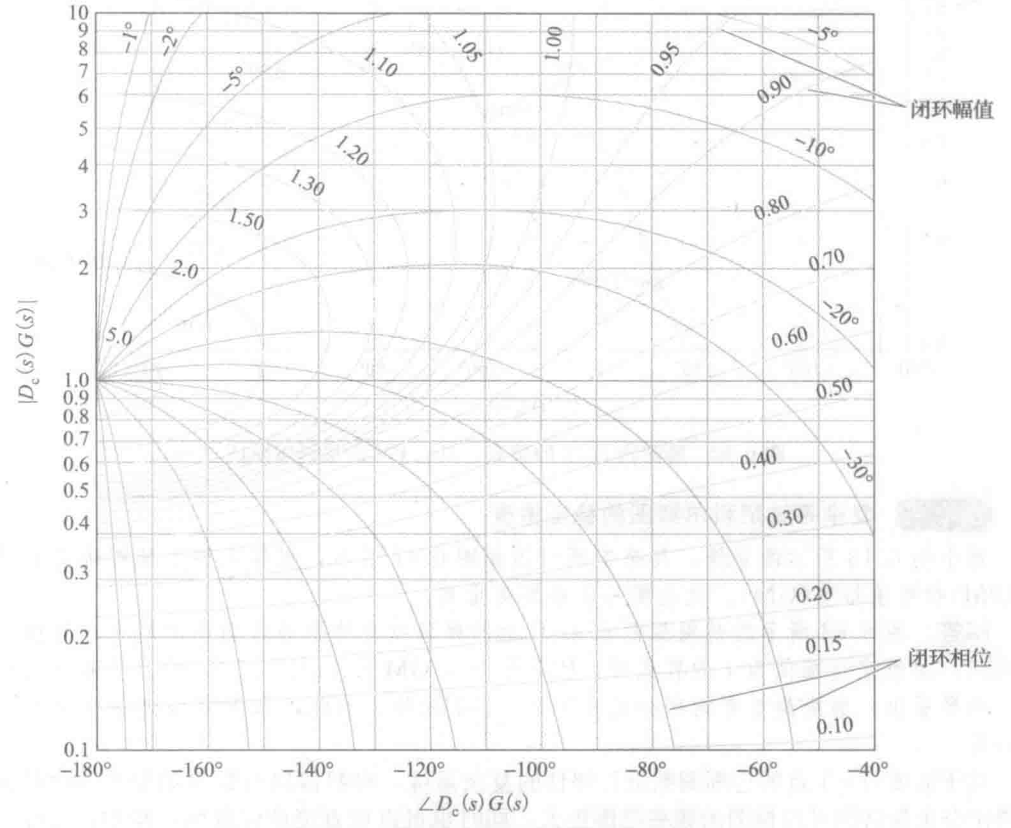


图 6.81 尼科尔斯图(闭环幅值闭环相位)

例 6.26 PID 控制器的尼科尔斯图

试确定系统的带宽、谐振峰值和加入补偿环节后的相位裕度 PM，其频率响应特性如图 6.68 所示。

解答。根据图 6.68 中的加入补偿后开环系统的幅值和相位信息，绘制出的尼科尔斯图如图 6.82 所示。比较两图，为了得到 $|D_c(s)G(s)|$，应将图 6.68 中的幅值缩小到原值的 1/20，而不是如图 6.68 中使用规范值。因为闭环特性曲线在 $\omega=0.8\text{rad/s}$ 处，穿过幅值为 0.7 的“等高线”，所以系统的带宽是 $\omega=0.8\text{rad/s}$。相位裕度是根据曲线与幅值为 1 的“等高线”相交点的相位值来确定的。因为曲线所能达到的幅值最大的“等高线”为 1.20，所以谐振峰值 $M_r=1.2$。

⊖ James, H. M., N. B. Nichols, and R. S. Phillips(1947)。

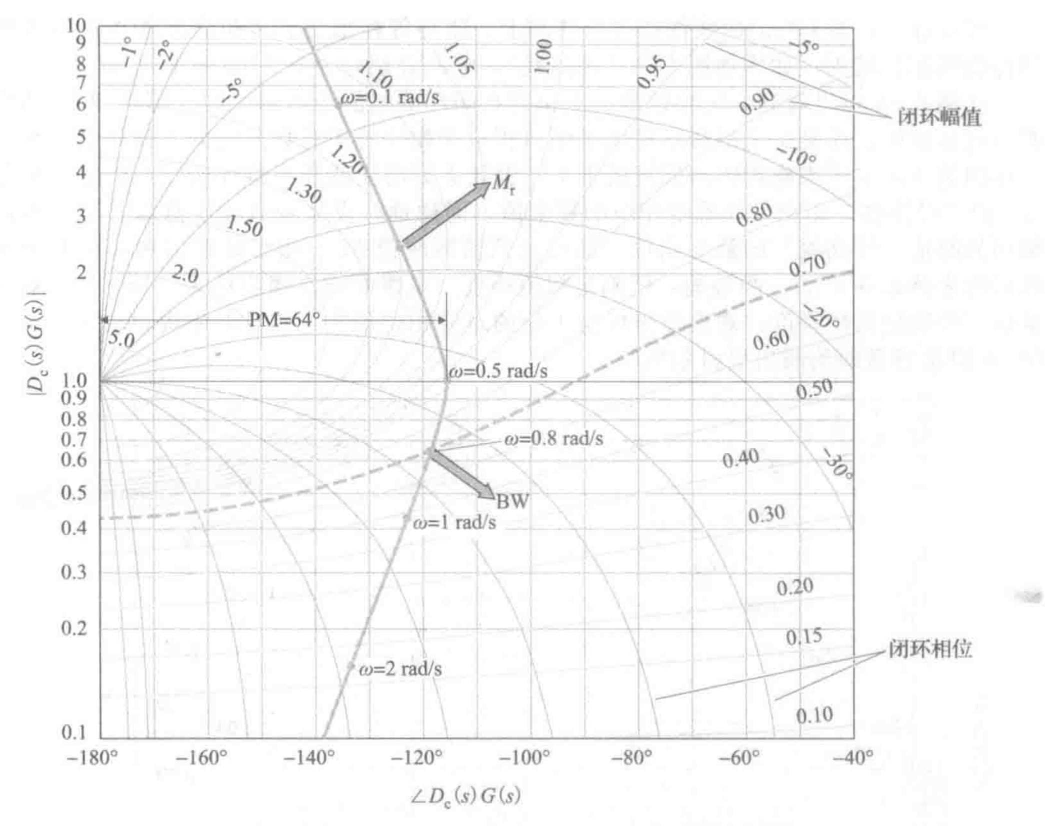


图 6.82 确定例 6.26 的带宽、M_r、PM 的尼科尔斯图

例 6.27 复杂系统尼科尔斯图的稳定裕度

对于例 6.13 所示的系统，其奈奎斯特图如图 6.41 所示，根据尼科尔斯图确定相位裕度(PM)和幅值裕度(GM)。讨论哪一个裕度更重要。

解答。图 6.83 所示的是根据图 6.42 所示的频率响应特性曲线画出的尼科尔斯图。可以看到，曲线穿过幅值为 1 的直线时，PM 是 36°，GM 为 1.25(=1/0.8)。从图中的数据可以明显看出，曲线最重要的部分是在穿过−180°线处。因此，本例中 GM 是更重要的稳定裕度。

对于需要对−1 点的包围圈数进行评估的复杂系统，将幅值以对数为刻度表示的尼科尔斯图比奈奎斯特图可以检测的频率范围更大，同时也可以更直接地读取增益和相位裕度。虽然 Matlab 可以直接计算出 PM 和 GM，这种算法在非常复杂的情况下可能会得出不准确的结果，可以通过 Matlab 中奈奎斯特的 m 文件来验证结果，来检查实际的包围圈，同时可以更好地理解 PM 和 GM。在某些情况下，所需要的裕度性能指标是根据在尼科尔斯图上−1 点周围的“禁区”得来的(幅值=1，相位=−180°)。该区域是一个与横纵轴水平的典型椭圆或者类似椭圆的形状。为了满足所要求的性能指标，尼科尔斯图上的频率响应数据不能穿透椭圆的任何部分；因此，这种稳定裕度的要求类似于 6.7.8 小节中描述的矢量裕度。

历史上，在没有计算机辅助的情况下，尼科尔斯图可用于辅助设计。例如增益的变化，可以通过如图 6.81 所示的，垂直滑动透明纸上的尼科尔斯图的曲线来评估。从图中 GM、PM 和带宽都是比较容易读取的，通过较少的工作就可以得到增益值的评估。然而现在通过计算机辅助的方法，我们通过敲击几个指令就可以计算带宽并可以对增益或者任何其他参数的重复性进行评估。一些现代的设计技术，如：定量反馈理论(“QFT”，Horowitz and Sidi，1992)仍然主要依赖于尼科尔斯图为中心工具来引导反馈设计。

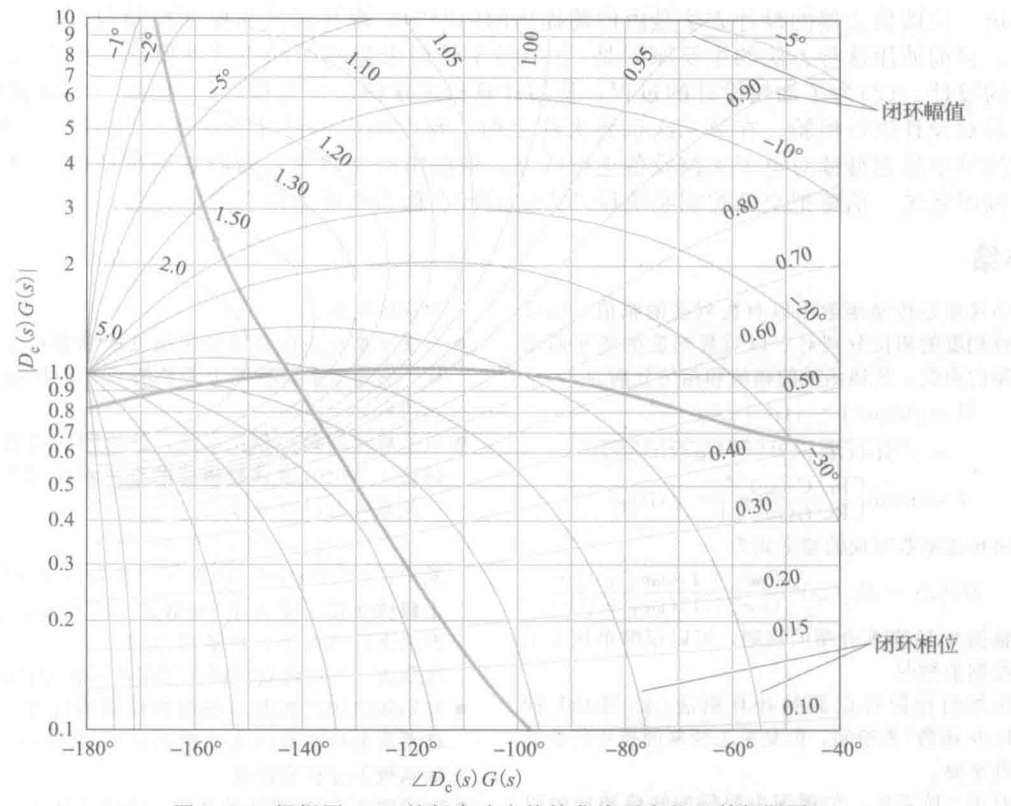


图 6.83　根据图 6.42 的频率响应特性曲线画出的尼科尔斯图

6.9.2　逆奈奎斯特图表示

逆奈奎斯特图表示方法简化了稳定裕度的选定方法，已经得到了应用。在 www.fpe7e.com 附录 W6.9.2 进行了更详细地描述，也可以在 www.fpe7e.com 中查询。

6.10　历史展望

第 5 章已经讨论过，20 世纪 60 年代以前工程师们在分析设计中没有借助计算机的帮助。因此，无需对特征方程进行因式分解，就可确定稳定特性或响应特性的方法被广泛应用。由 H.S. 布莱克于 1927 年在贝尔电话实验室发明的电子反馈放大器促进了反馈控制的设计方式的发展，频率响应法首次发展到可将迭代设计应用于此方法中。

401 ~ 404

一篇有趣的文章简要地描述了反馈放大器的发展，以伯德(1960)的一次报告为基础，由贝尔曼和兴拉巴(1964)再版。随着电子放大器的发展，第一次世界大战后几十年，长途电话技术开始发展。然而随着距离的增加，会出现电能的损失；尽管使用了直径较大的电线，但需要越来越多的放大器来弥补失去的能量。不幸的是，由于电子放大器中电子管的弱非线性会扩大很多倍，使用大量的放大器会导致多处失真。为了减小失真，布莱克提出了反馈放大器。正如第 4 章所讨论的，越希望减小误差(或失真)，就需要越高的反馈增益。执行机构一控制对象一传感器一执行机构，该过程的环路增益必须非常大。但是设计者发现增益过高会产生尖锐的声音，并且反馈环会变得不稳定。该技术中的动力学特性非常复杂(五十阶微分方程都是常见的)，当时劳斯判据是解决这一稳定性问题的唯一办法，但也不是非常有效。因此，在贝尔电话实验室中熟悉频率响应的概念和复杂数学变量的通信工程师，对这个复杂问题进行分析。1932 年，H. 奈奎斯特发表了一篇论文，描述了如何通过一个开环频率响应图来确定稳定性。之后 1938 年伯德在其基础上优化了绘图方法，不需要大量的计算或计算机辅助就可以绘制图形。从作图方法和奈奎斯特稳定性判据可以

得出，反馈放大器的设计方法是由伯德提出的(1945)，现在仍然在反馈控制设计中广泛使用。目前使用这种方法的主要原因是，(1)对于任何未建模的动态特性要求，都会给出良好的设计；(2)为了加快设计的过程，使用计算机来求解特征方程；(3)提供一个可视化的工具对设计进行检验。在第二次世界大战之前，频率响应的设计方法就已经开始发展了，在战争中伯德继续对电子火控设备进行研究。他提出的反馈放大器的方法被证明非常适用于伺服系统。伯德把交叉控制系统设计方法的特点称为“被迫结合的方式”。

405

小结

- 伯德图是传递函数中以对数刻度的幅值、以线性刻度的相位分别对于以对数刻度的频率而绘制的曲线。传递函数的幅值和相位分别为

$$M=|G(\mathrm{j}\omega)|=|G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$$
$$=\sqrt{\{\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}w)]\}^2+\{\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}w)]\}^2}$$
$$\phi=\arctan\left[\frac{\mathrm{Im}[G(\mathrm{j}w)]}{\mathrm{Re}[G(\mathrm{j}w)]}\right]=\angle G(\mathrm{j}\omega)$$

- 将传递函数写成伯德形式为

$$KG(\omega)=K_0\ (\mathrm{j}\omega)^n\frac{(\mathrm{j}\omega\tau_1+1)(\mathrm{j}\omega\tau_2+1)\cdots}{(\mathrm{j}\omega\tau_a+1)(\mathrm{j}\omega\tau_b+1)\cdots}$$

根据6.11节所介绍的规则，可以很简单地手工绘制伯德图。

- 虽然伯德图可以通过计算机法(如Matlab的bode函数)来绘制，但是手工绘制的技巧仍然非常重要。
- 对于二阶系统，伯德图中幅值的峰值与比的阻尼比有如下关系：

$$|G(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{2\zeta},\quad \omega=\omega_n$$

- 奈奎斯特稳定判据是根据系统的开环传递函数频率响应特性来确定闭环系统稳定性的方法，奈奎斯特图的绘制规则见6.3节。系统在右半平面的闭环极点的个数Z，可由下式求得：

$$Z=N+P$$

其中：N为奈奎斯特图顺时针-1点的包围圈数；P为右半平面上开环极点的个数。

对于一个稳定的闭环系统，z必须为0，因此$N=-P$。

- 奈奎斯特图可以通过计算机进行绘制(如Matlab中的nyquist函数)。
- 通过观察开环传递函数的伯德图或奈奎斯特图可以直接得到幅值裕度(GM)和相位裕度(PM)。也可以通过Matlab中的margin函数求得。
- 对于标准的二阶系统，由式(6.32)可知，相位裕度和系统的闭环阻尼比有如下关系：

$$\zeta\approx\frac{\mathrm{PM}}{100}$$

- 带宽是系统响应速度的一个量度。在控制系统中，带宽的定义为：在闭环系统的对数幅频特性曲线上，幅值为0.707(−3dB)所对应的频率值。它可由系统的穿越频率近似表示ω_c。穿越频率就是开环增益曲线穿过幅值为1的曲线时对应的频率。
- 矢量裕度是表征系统稳定裕度的单参数性能指标。它由奈奎斯特图上距临界点$-1/K$最近的点决定。
- 对于稳定的最小相位系统，伯德图的幅相关系描述了系统的增益和相位的唯一对应关系。这一关系可近似表示为

$$\angle G(\mathrm{j}\omega)\approx n\times 90^\circ$$

其中：n是$|G(\mathrm{j}\omega)|$的斜率。它表示每10倍频上幅值变化了多少个10倍量。这种关系表明，在大多数情况下，增益曲线以−1的斜率穿越幅值为1的曲线就可以保证闭环系统的稳定性。

- 在不知道闭环控制系统解析模型的情况下，开环系统的频率响应实验数据可直接用于闭环控制系统的分析和设计。
- 对于图6.84所描述的系统，它的开环传递函数的伯德图可由频率响应GD_c得到，而闭环频率响应特性可由$\mathcal{T}(s)=GD_c/(1+GD)$得到。

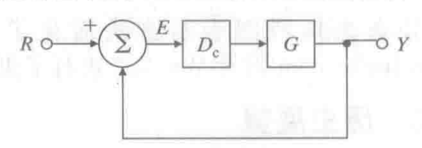


图6.84 典型系统

- 本章讨论了几种补偿环节的频率特性，并给出了利用这些特性进行设计的例子。在6.7节中已经给出超前补偿和滞后补偿的步骤。通过本节的例子可以看到，基于频率响应的设计方法，我们能够更方便地确定设计参数，得到设计结果。在6.7.5小节的最后对各种补偿环节进行归纳总结。
- 超前补偿，传递函数由式(6.38)给出：

$$D_c(s)=\frac{T_Ds+1}{\alpha T_Ds+1},\quad \alpha<1 \qquad (6.72)$$

超前补偿环节可以看做是高通滤波器，其控制规律和PD控制相似。只要想稳定提高系统阻尼比，就可采用超前补偿。若系统的低频增益是一定的，超前补偿环节就可以提高系统的响应速度。

- 滞后补偿，传递函数由式(6.47)给出：

$$D_c(s)=\alpha\frac{T_Is+1}{\alpha T_Is+1},\quad \alpha>1 \qquad (6.73)$$

滞后补偿环节可看做是低通滤波器，其控制规

律和 PI 控制相似。它可提高低频段的增益，在带宽一定的情况下可改善系统的稳态响应。如果系统的低频增益是一定的，那么它就会减小系统的响应速度。

- PID 补偿可以看做是超前和滞后补偿的组合。
- 减小跟踪误差，干扰抑制的性能指标，由伯德图上低频段增益确定；抑制传感器噪声的性能指标，由高频段的增益确定，如图 6.72 所示。
- △ 尼科尔斯图是表现频率特性的另一种图示方法。它是以频率为参变量，幅值相对相位绘制的曲线。
- △ 时滞环节可通过绘制奈奎斯特图直接进行精确分析。

复习题

6.1　伯德为何建议将频率响应的幅值画在"lg-lg"坐标中？

6.2　定义分贝。

6.3　如果增益为 14dB，那么传递函数幅值是多少？

6.4　定义增益穿越。

6.5　定义相位穿越。

6.6　定义相位裕度(PM)。

6.7　定义增益裕度(GM)。

6.8　伯德图中的什么特性最能反映闭环跃阶响应的超调？

6.9　伯德图中的什么特性最能反映闭环跃阶响应的上升时间？

6.10　超前补偿对伯德图性能度量的主要影响是什么？

6.11　滞后补偿对伯德图性能度量的主要影响是什么？

6.12　如何利用伯德图确定 1 型系统的 K_v？

6.13　为什么我们需要事先知道开环不稳定极点的个数，才能通过奈奎斯特图判断稳定性？

6.14　在控制系统设计中，一般计算 $D_c(j\omega)G(j\omega)$ 曲线包围 $-1/K$ 的圈数，而不是计算 $KD_c(j\omega)G(j\omega)$ 包围 -1 点的圈数，这样做的主要优势是什么？

6.15　定义一个条件稳定反馈系统。你如何在伯德图上鉴别这样的系统？

△6.16　要求某控制系统能够跟踪一个频率在 $0\leqslant\omega_i\leqslant 450\text{rad/s}$ 范围之间正弦信号，而且正弦信号的幅值在 5 个单位以内，要求跟踪(正弦)稳态误差不大于 0.01。请画出(或描述)相应的特性函数 $\omega_1(\omega)$。

习题

6.1 节习题

6.1　(a) 已知 $A=U_0$、$\omega_0=\omega$，证明式(6.2)中的 α_0 满足：

$$\alpha_0=\left[G(s)\frac{U_0\omega}{s-j\omega}\right]\bigg|_{s=-j\omega}=-U_0G(-j\omega)\frac{1}{2j}$$

并且

$$\alpha_0^*=\left[G(s)\frac{U_0\omega}{s+j\omega}\right]\bigg|_{s=+j\omega}=U_0G(j\omega)\frac{1}{2j}$$

(b) 假设系统的输出可以写为

$$y(t)=\alpha_0e^{-j\omega t}+\alpha_0^*e^{j\omega t}$$

请确定式(6.4)～式(6.6)中各变量的具体表达式。

6.2　(a) 对于 ω=1，2，5，10，20，50，100rad/s，手工计算

$$G(s)=\frac{1}{s+10}$$

的幅值和相位；

(b) 根据伯德图的规则，绘制 $G(s)$ 的伯德图，并和(a)中你计算得到的结果进行比较。

6.3　对下列每个开环传递函数绘制伯德图的幅值和相位渐近线。完成手工绘图后，用 Matlab 来验证你的结果。将你的手工绘图结果与 Matlab 绘图结果转化在同一刻度中。

(a) $L(s)=\dfrac{2000}{s(s+200)}$；

(b) $L(s)=-\dfrac{100}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$；

(c) $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.02s+1)}$；

(d) $L(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2(s+10)^2}$；

(e) $L(s)=\dfrac{10(s+4)}{s(s+1)(s+100)}$；

(f) $L(s)=\dfrac{1000(s+0.1)}{s(s+1)(s+8)^2}$；

(g) $L(s)=\dfrac{(s+5)(s+10)}{s(s+1)(s+100)}$；

(h) $L(s)=\dfrac{4s(s+10)}{(s+100)(s+500)}$；

(i) $L(s)=\dfrac{s}{(s+1)(s+10)(s+50)}$。

6.4　*实零极点*。对下列每个开环传递函数绘制伯德图的幅值和相位渐近线。完成手工绘图后，用 Matlab 来验证你的结果。将你的手工绘图结果与 Matlab 绘图结果转化在同一刻度中。

(a) $L(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$；

(b) $L(s)=\dfrac{(s+2)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$；

(c) $L(s)=\dfrac{(s+2)(s+6)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$；

(d) $L(s)=\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$。

6.5 在有复零极点时，对下列每个开环传递函数绘制伯德图的幅值和相位渐近线，并根据阻尼比的值，在二阶分离点处的绘制近似的过渡曲线。完成手工绘图后，用 Matlab 来验证你的结果。将你的手工绘图结果与 Matlab 绘图结果转化在同一刻度中。

(a) $L(s)=\frac{1}{s^2+3s+10}$；

(b) $L(s)=\frac{1}{s(s^2+3s+10)}$；

(c) $L(s)=\frac{(s^2+2s+8)}{s(s^2+2s+10)}$；

(d) $L(s)=\frac{(s^2+1)}{s(s^2+4)}$；

(e) $L(s)=\frac{(s^2+4)}{s(s^2+1)}$。

6.6 在原点处有重极点时，对下列每个开环传递函数绘制伯德图的幅值和相位渐近线。完成手工绘图后，用 Matlab 来验证你的结果。将你的手工绘图结果与 Matlab 绘图结果转化在同一刻度中。

(a) $L(s)=\frac{1}{s^2(s+10)}$；

(b) $L(s)=\frac{1}{s^3(s+8)}$；

(c) $L(s)=\frac{1}{s^4(s+10)}$；

(d) $L(s)=\frac{(s+3)}{s^2(s+10)}$；

(e) $L(s)=\frac{(s+3)}{s^3(s+5)}$；

(f) $L(s)=\frac{(s+1)^2}{s^2(s+10)}$；

(g) $L(s)=\frac{(s+1)^2}{s^3(s+10)^2}$。

6.7 在有混合实零极点时，对下列每个开环传递函数绘制伯德图的幅值和相位渐近线。各分离点处的过渡曲线可近似处理。完成手工绘图后，用 Matlab 来验证你的结果。将你的手工绘图结果与 Matlab 绘图结果转化在同一刻度中。

(a) $L(s)=\frac{(s+2)}{s(s+10)(s^2+2s+2)}$；

(b) $L(s)=\frac{(s+2)}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$；

(c) $L(s)=\frac{(s+2)^2}{s^2(s+10)(s^2+6s+25)}$；

(d) $L(s)=\frac{(s+2)(s^2+4s+68)}{s^2(s+10)(s^2+4s+85)}$；

(e) $L(s)=\frac{[(s+1)^2+1]}{s^2(s+2)(s+3)}$。

6.8 在右半平面有零极点时，对下列每个开环传递函数绘制伯德图的幅值和相位渐近线。在复平面上观察当 s 从 0 到 $+\infty j$ 变化时，$\angle L(s)$是如何改变的，从而确保相位渐近线的绘制正确地考虑到了右半平面的奇点的影响。完成手工绘图后，用 Matlab 来验证你的结果。将你的手工绘图结果与 Matlab 绘图结果转化在同一刻度中。

(a) $L(s)=\frac{s+2}{s+10}\frac{1}{s^2-4}$(此模型用于描述带有超前补偿的磁悬浮系统的一个实例)；

(b) $L(s)=\frac{s+2}{s(s+10)}\frac{1}{(s^2-1)}$(带有积分控制和超前补偿的磁悬浮系统)；

(c) $L(s)=\frac{s-1}{s^2}$；

(d) $L(s)=\frac{s^2+2s+1}{s(s+20)^2(s^2-2s+2)}$；

(e) $L(s)=\frac{(s+2)}{s(s-1)(s+6)^2}$；

(f) $L(s)=\frac{1}{(s-1)[(s+2)^2+3]}$。

6.9 图 6.85 所示的是某系统的近似幅频曲线。请确定系统对单位跃阶输入的响应(假设零初始条件)，并粗略地绘制响应曲线。

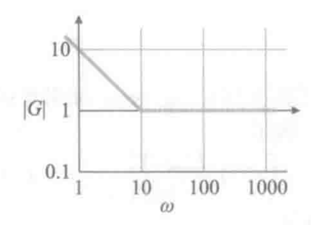


图 6.85 习题 6.9 的伯德图的幅值部分

6.10 试证明伯德图上的斜率 -1 对应于 -20dB/10 倍频或 -6dB/2 倍频。

6.11 一个带有阻尼比 $\zeta=0.5$ 与一个额外零点的标准化二阶系统由下式给出：

$$G(s)=\frac{s/a+1}{s^2+s+1}$$

对于 $a=0.01$，0.1，1，10 和 100，利用 Matlab 比较各情况下的系统阶跃响应的超调 M_p 和系统频率响应的谐振峰值 M_r。M_p 与 M_r 之间有何关系？

6.12 一个具有 $\zeta=0.5$ 与一个额外极点的标准化二阶系统由下式给出：

$$G(s)=\frac{1}{[(s/p)+1](s^2+s+1)}$$

请在 $P=0.01$，0.1，1，10 和 100 时，绘制伯德图，对比增加极点后系统带宽和没有增加极点的二阶系统的带宽，你能得到什么结论？

6.13 对于闭环传递函数：

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

请证明，$T(s)$的带宽ω_{BW}与ω_n和ζ存在如下关系：

$$\omega_{BW}=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2+4\zeta^4-4\zeta^2}}$$

假设$\omega_n=1$，对$0\leqslant\zeta\leqslant1$，画出。

6.14 考虑系统具有传递函数

$$G(s)=\frac{A_0\omega_0 s}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

这是一个带有品质因子Q的调谐电路的模型。

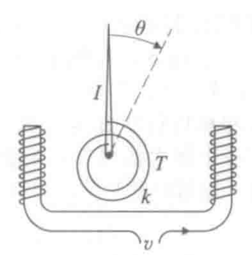
(a) 解析计算传递函数的幅值和相位，将其表示成归一化频率ω/ω_0的函数并进行绘图。其中$Q=0.5$，1，2和5。

(b) 如果定义带宽为幅值在ω_0两侧各下降3dB时对应两频率之间的距离。请证明带宽由下式给出：

$$BW=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)$$

(c) Q和ζ之间的关系是什么？

6.15 一个直流电压表如图6.86所示。因为指针有阻尼，所以其对阶跃输入的最大超调为10%。



$I=40\times10^{-6}\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$k=4\times10^{-6}\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$
T为输入力矩，$T=K_m v$
v为输入电压
$K_m=4\times10^{-6}\text{N}\cdot\text{m/V}$

图6.86 电压表

(a) 系统的无阻尼自然频率是多少？

(b) 系统的阻尼自然频率是多少？

(c) 用Matlab画出该系统的频率响应，确定怎样的输入频率可以产生最大幅值的输出？

(d) 现在用该电压表测量1V的交流输人，频率为2rad/s。那么经过最初的过渡过程后，指针的指示值为多少？相对于输入，输出的相位滞后是多少？请利用系统的伯德图来回答这些问题。在Matlab中调用lsim命令来验证你在(d)问中的答案。

6.2节习题

6.16 请确定K的取值范围来使下列系统保持闭环稳定(见图6.18)。先画出$K=1$的伯德图，然后将曲线上移或下移直至系统不稳定，以此确定K的取值范围。利用根轨迹概略图来验证你的答案。

(a) $KG(s)=\dfrac{K(s+3)}{s+30}$；

(b) $KG(s)=\dfrac{K}{(s+10)(s+1)^2}$；

(c) $KG(s)=\dfrac{K(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+5)^3}$。

6.17 请确定K的取值范围来使下列系统保持闭环稳定。先画出$K=1$的伯德图，然后将曲线上移或下移直至系统不稳定，借此确定K的取值范围。利用根轨迹概略图来验证你的答案。

(a) $KG(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s+10)}$；

(b) $KG(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$；

(c) $KG(s)=\dfrac{K}{(s+2)(s^2+9)}$；

(d) $KG(s)=\dfrac{K(s+1)^2}{s^3(s+10)}$。

6.3节习题

6.18 (a) 开环系统的传递函数为$1/s^2$，绘制其奈奎斯特图，即描绘如下复变函数图像：

$$\frac{1}{s^2}\bigg|_{s=C1}$$

其中，C_1是包围整个右半平面的闭合曲线，如图6.17所示(提示：假设闭合曲线C_1在极点$s=0$处，以半径极小的半圆绕行，如图6.27所示)。

(b) 对于传递函数为$G(s)=\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}$的系统，重复问题(a)的要出。

6.19 对于下列系统，根据它们的伯德图，绘制各自的奈奎斯特图。然后使用Matlab调用命令nyquist绘制奈奎斯特图并与手工绘图的结果进行比较。不需要关注曲线具体走向，但一定要保证在正确的位置穿过实轴，包围−1点的正确的圈数和在正确的方向趋向无穷远。

(a) $KG(s)=\dfrac{K(s+2)}{s+10}$；

(b) $KG(s)=\dfrac{K}{(s+10)(s+2)^2}$；

(c) $KG(s)=\dfrac{K(s+10)(s+1)}{(s+100)(s+2)^3}$。

(d) 通过你的奈奎斯特图，确定使系统稳定的K的取值范围。然后通过绘制根轨迹概略图，定性地验证结论。

6.20 系统的传递函数为

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s(s+3)} \tag{6.73}$$

画出它的奈奎斯特图。绘图时，选择从右侧绕过 jω 轴上的奇点的闭合曲线。然后根据奈奎斯特判据，确定系统稳定时 K 的取值范围。重画奈奎斯特图，这次择从左侧绕过虚轴上的奇点的闭合曲线，并重新确定使得系统稳定的 K 的取值范围。两次的答案一样吗？应该如此吗？

6.21 绘制图 6.87 所示系统的奈奎斯特图。根据奈奎斯特稳定判据，确定系统保持稳定时 K 的取值范围。考虑 K 的正值与负值。

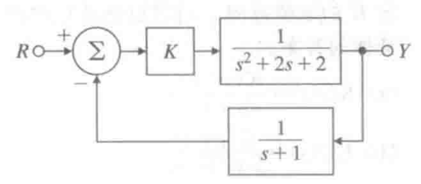


图 6.87 习题 6.21 的控制系统

6.22 (a) 对于 $\omega=0.1$ 到 100rad/s，画出下面最小相位系统

$$G(s)=\left.\frac{s+1}{s+10}\right|_{s=j\omega}$$

和非最小相位系统

$$G(s)=-\left.\frac{s-1}{s+10}\right|_{s=j\omega}$$

的相位。注意$\angle(j\omega-1)$是随着 ω 增大而减小的，而不是增大的。

(b) 系统在右半平面有一个零点，这是否影响了极坐标图中包围−1 点的周数和式(6.28)中的闭环不稳定极点个数之间的关系？

(c) 对于 $\omega=0.1$ 到 100rad/s，画出下面不稳定系统的相位：

$$G(s)=\left.\frac{s+1}{s-10}\right|_{s=j\omega}$$

(d) 对开环传递函数 $KG(s)$使用奈奎斯特稳定判据，判断(a)和(c)问中系统的稳定性。确定使闭环系统稳定的 K 的取值范围，并通过根轨迹概略图来定性验证你的结论。

6.23 利用奈奎斯特图和经典平面曲线，使用 Matlab 确定下面系统当 $K=1$ 时的奈奎斯特图。确保对于 $j\omega>0$ 的这一部分的开始点和结束点具有正确的幅值和相位。

(a) 这条经典的曲线称为凯莱(Cayley)六次线，由马克劳森(Maclaurin)于 1718 年发现：

$$KG(s)=K\frac{1}{(s+1)^3}$$

(b) 这条经典的曲线称为蔓叶线，意味着它呈藤状：

$$KG(s)=K\frac{1}{s(s+1)}$$

(c) 这条经典的曲线被称为开普勒(Kepler)叶形线，开普勒在 1609 年研究过它：

$$KG(s)=K\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}$$

(d) 这条经典曲线称为叶形线(非开普勒叶形线)：

$$KG(s)=K\frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

(e) 这条经典曲线称为肾脏线，意味着它的形状与肾脏相似：

$$KG(s)=K\frac{2(s+1)(s^2-4s+1)}{(s-1)^3}$$

(f) 这条经典曲线称为弗里斯(Freeth)肾脏线，以英国数学家 T. J. 弗里斯命名：

$$KG(s)=K\frac{(s+1)(s^2+3)}{4(s-1)^3}$$

(g) 弗里斯肾脏线的一个变形：

$$KG(s)=K\frac{(s^2+1)}{(s-1)^3}$$

6.4 节习题

6.24 一些实际控制系统的奈奎斯特图类似于图 6.88所示的奈奎斯特图。其中，$\alpha=0.4$，$\beta=1.3$，$\phi=40°$。那么，图 6.88 所示系统的增益和相位裕度各是多少？当增益由 0 增大到一个很大的值时，系统的稳定性有何变化？也请绘制此系统对应的伯德图。

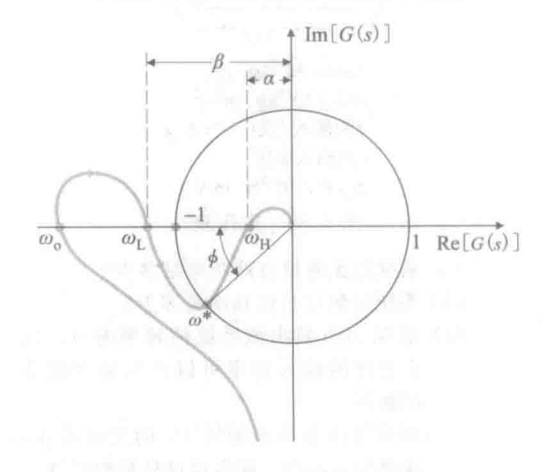


图 6.88 习题 6.24 的奈奎斯特图

6.25 系统为

$$G(s)=\frac{100[(s/10)+1]}{s[(s/1)-1][(s/100)+1]}$$

的伯德图如图 6.89 所示。

(a) 为何在低频段的相位由−270°开始？

(b) 绘制 $G(s)$的奈奎斯特图。

(c) 图 6.89 所示的闭环系统是否稳定?

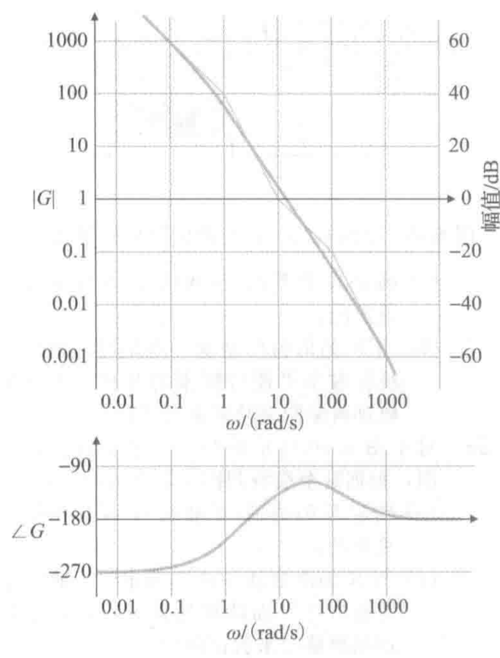


图 6.89 习题 6.25 的伯德图

(d) 如果将增益减小到原来的 1/100,那么系统是否稳定?绘制系统的根轨迹概略图,并定性地验证你的答案。

6.26 如图 6.90 所示系统,其中 $G(s)$ 为

$$G(s)=\frac{25(s+1)}{s(s+2)(s^2+2s+16)}$$

使用 Matlab 中的 margin 命令,基于系统伯德图计算 $G(s)$ 的 PM 和 GM,然后判断哪个裕度为此系统的控制设计提供更有用的信息。

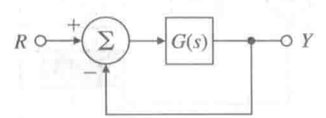


图 6.90 习题 6.26 的控制系统

6.27 考虑图 6.91 给出的系统。

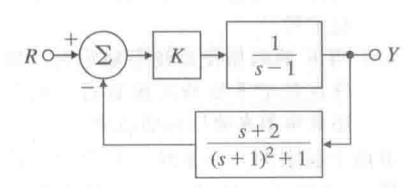


图 6.91 习题 6.27 的控制系统

(a) 令 $K=1$,用 Matlab 画出系统的伯德图,然后由图确定系统稳定时 K 的取值范围。

(b) 使用 marign 命令来确定使系统稳定的 K 的值,并对所选的 K 确定 PM 的值。

(c) 用 rlocus 命令确定系统处于稳定边界时的 K 值。

(d) 画出系统的奈奎斯特图,由此判断在 K 的取值使系统不稳定时,系统不稳定的特征根的数目。

(e) 根据劳斯判据,确定此系统闭环稳定时 K 的取值范围。

6.28 设图 6.90 所示的 $G(s)$ 有如下形式:

$$G(s)=\frac{3.2(s+1)}{s(s+2)(s^2+0.2s+16)}$$

使用 Matlab 中的 margin 命令计算 $G(s)$ 的 PM 和 GM,并讨论该系统的闭环特征根的阻尼比是否合适?

6.29 对于给定的某个系统,判断齐格勒—尼科尔斯方法中的极限周期和对应的极限增益如何由下列图像确定:

(a) 奈奎斯特图;

(b) 伯德图;

(c) 根轨迹。

6.30 如果系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

若采用单位反馈,闭环传递函数由下式给出:

$$T(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

当时,确定图 6.36 所示的 PM。

6.31 考虑某单位反馈系统,其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)[(s^2/25)+0.4(s/5)+1]}$$

(a) 令 $K=1$,使用 Matlab 画出 $G(j\omega)$ 的伯德图。

(b) 若相位裕度 PM 为 45°,K 如何取值,此时的 GM 为多少?

(c) 当 K 的取值可以使 PM=45°时,K_v 的取值为多少?

(d) 画出系统关于 K 的根轨迹,当 PM 为 45°时,确定闭环特征根的位置。

6.32 对于图 6.92a 描述的系统,其传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{(s+2)^2(s+4)},\quad H(s)=\frac{1}{s+1}$$

(a) 用 rlocus 和 rlocfind 命令确定使系统达到稳定边界的 K 值。

(b) 用 rlocus 和 rlocfind 命令确定 K 值,使闭环极特征根的阻尼比 $\zeta=0.707$。

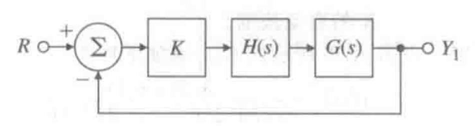
(c) 当 K 取(b)问中所确定的值时,系统的 GM 是多少?分析这个问题时,不要利用任何频率响应方法。

(d) 绘制系统的伯德图,当 PM=65°时,确定 GM 的值。此时所期望的阻尼比 ζ

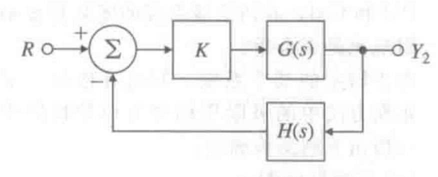
是多少？

(e) 画出图6.92b所示系统的根轨迹图，它和(a)问中根轨迹有何不同？

(f) 对于图6.92a和图6.92b描述的两个系统，它们的传递函数 $Y_2(s)/R(s)$ 和 $Y_1(s)/R(s)$ 有何不同？是否期望二者对于阶跃输入 $r(t)$ 的响应会有所不同？



a)单位反馈



b) $H(s)$ 反馈

图6.92　习题6.32的框图

6.33　对于图6.93所示的系统，用伯德图和根轨迹图来确定系统刚好达到不稳定时的增益与频率。增益为多少可使PM为20°？当PM=20°时，GM为多少？

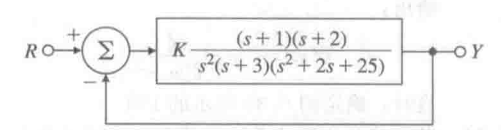


图6.93　习题6.33的控制系统

6.34　磁带驱动速度控制系统如图6.94所示。由于速度传感器的响应较慢，所以应考虑其动态特性。速度测量的时间常数 $\tau_m=0.5\text{s}$；绕带时间常数 $\tau_r=J/b=4\text{s}$，其中 b=输出轴阻尼比=1N·m·s；电动机时间常数 $\tau_1=1\text{s}$。

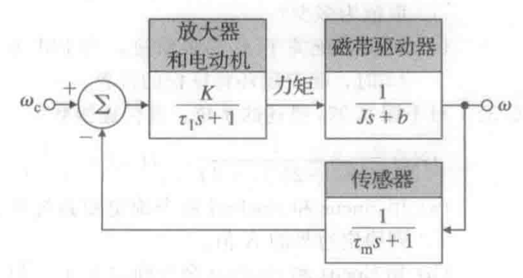


图6.94　磁带速度控制系统

(a) 确定增益 K，使系统跟踪参考输入的速度稳态误差小于7%。

(b) 确定系统的增益裕度和相位裕度。你认为这是个良好的系统设计吗？

6.35　对于图6.95中的系统，绘制奈奎斯特图，并根据奈奎斯特判据回答下列问题：

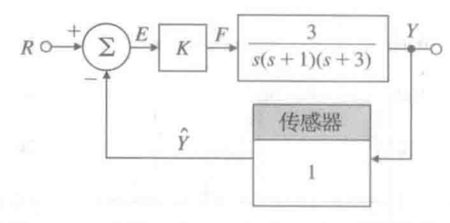


图6.95　习题6.35、6.69和6.70的控制系统

(a) 确定 K 的范围(正和负)，保证系统是稳定的。

(b) 当 K 的取值使系统不稳定时，确定系统在右半平面特征根的数目。画出根轨迹概略图来验证你的答案。

6.36　对于图6.96所示的系统，绘制奈奎斯特图，根据奈奎斯特判据回答下列问题：

(a) 确定 K 的范围(正和负)，保证系统是稳定的；

(b) 当 K 的取值使系统不稳定时，确定系统在右半平面特征根数目。画出根轨迹的概略图来验证你的答案。

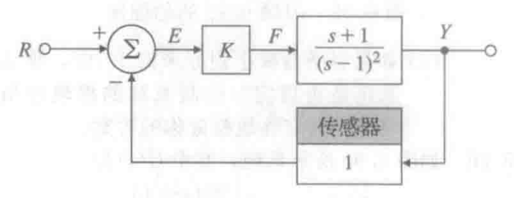


图6.96　习题6.36的控制系统

6.37　对于图6.97所示的系统，绘制奈奎斯特图，根据奈奎斯特判据回答下列问题：

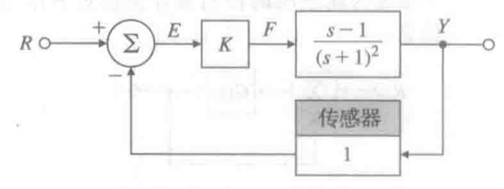


图6.97　习题6.37的控制系统

(a) 确定 K 的范围(正和负)，保证系统是稳定的。

(b) 当 K 的取值使系统不稳定时，确定系统在右半平面特征根数目。画出根轨迹概略图来验证你的答案。

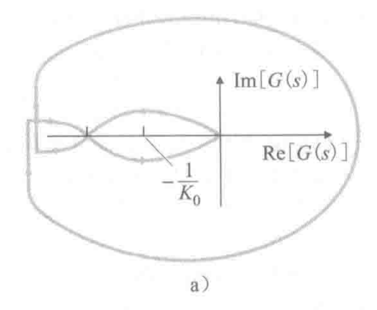
6.38　有两个稳定的开环系统，其奈奎斯特图如图6.98所示。K_o 是指定的可操作的系统开环增益，箭头方向是频率增加方向。请对两个闭环系统(单位反馈)的下列每个指标做出大致估计：

(a) 相位裕度；

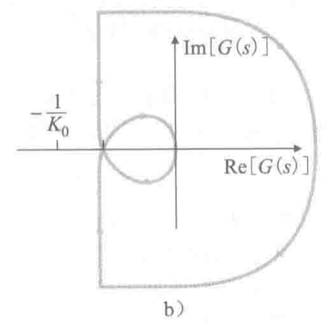
(b) 阻尼比；

(c) 系统稳定时的增益取值范围(如果存在)；

(d) 系统类型(0，1 或 2)。



a)



b)

图 6.98　习题 6.38 的奈奎斯特图

6.39　某船舶驾驶系统的动态模型可由下面的传递函数表示：

$$\frac{V(s)}{\delta_r(s)}=G(s)=\frac{K[-(s/0.142)+1]}{s(s/0.325+1)(s/0.0362+1)}$$

其中：V 是船舶的侧向速度，单位是 m/s，δ_r 是方向舵的旋转角度，单位是 rad。

(a) 对于 $K=0.2$，用 Matlab 的 bode 命令绘制的对数幅值与相位。

(b) 在所画的图中，标出穿越频率、PM 和 GM。

(c) 当 $K=0.2$ 时，该系统是否稳定？

(d) 确定 K 值，使系统的相位裕度 PM=30°，此时的穿越频率为多少？

6.40　对于开环系统：

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+10)^2}$$

确定系统处于稳定边界时的 K 值，以及 PM=30°时的 K 值。

6.5 节习题

6.41　一个在单位反馈配置下的控制对象的频率响应如图 6.99 所示。假设对象是开环稳定的且是最小相位的。

(a) 图中所画的速度误差常数 K_v 是多少？

(b) $\omega=100$ 处的复极点的阻尼比是多少？

(c) 跟踪一个 $\omega=3\text{rad/s}$ 的正弦输入时，系统的误差大约是多少？

(d) 图中所画的 PM 是多少(误差为 ±10° 以内)？

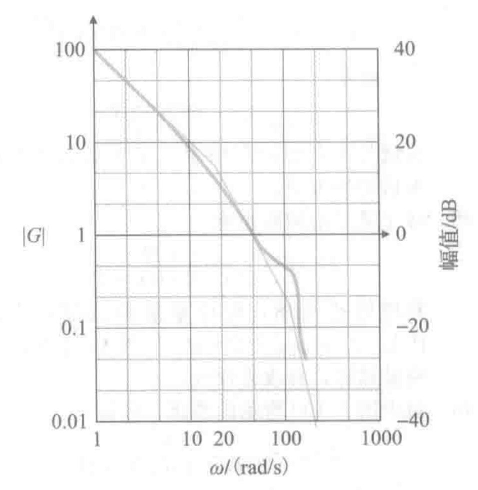


图 6.99　习题 6.41 的幅值频率响应

6.42　对于系统

$$G(s)=\frac{100(s/a+1)}{s(s+1)(s/b+1)}$$

其中，$b=10a$，通过绘制待选的 a 值的幅值曲线，确定 a 的近似值从而使系统产生最好的 PM。

6.6 节习题

6.43　开环系统的传递函数为

$$KG(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+20)^2}$$

确定 K 值，使系统的相位裕度满足 PM≥30°，并且有尽可能大的闭环带宽。可利用 Matlab 求系统带宽。

6.7 节习题

6.44　某超前补偿器为

$$D_c(s)=\frac{T_D s+1}{\alpha T_D s+1}$$

其中：$\alpha<1$。

(a) 证明超前补偿器的相位满足下列等式：

$$\phi=\arctan(T_D\omega)-\arctan(\alpha T_D\omega)$$

(b) 证明最大超前角频率满足下列等式：

$$\omega_{\max}=\frac{1}{T_D\sqrt{\alpha}}$$

并证明最大超前相位满足下列等式：

$$\sin\phi_{\max}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

(c) 请证明最大超前角频率应处于两个转角频率的中心处(坐标采用对数刻度)，即满足下列等式：

$$\lg\omega_{\max}=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{T_D}+\lg\frac{1}{\alpha T_D}\right)$$

(d) $D_c(s)$也可以写成：

$$D_c(s)=\frac{s+z}{s+p}$$

请证明 $D_c(s)$的相位满足下列等式：

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega}{|z|}\right) - \arctan\left(\frac{w}{|p|}\right)$$

以及

$$\omega_{max} = \sqrt{|z||p|}$$

也就是最大超前角频率等于零点和极点绝对值的平方根。

6.45 对于某三阶伺服系统：

$$G(s) = \frac{50\ 000}{s(s+10)(s+50)}$$

利用伯德简图，设计超前补偿器，使得 PM≥50°，$\omega_{BW} \geq 20$rad/s，然后用 Matlab 检验设计，并改善设计。

6.46 对于图 6.100 所示的系统，假设：

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)(s/5+1)}$$

通过伯德图设计具有单位增益的超前补偿环节 $D_s(s)$，满足 PM = 40°。然后利用 Matlab 检验并改善你的设计。该系统的近似带宽是多少？

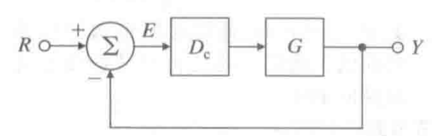


图 6.100 习题 6.46 的控制系统

6.47 对于图 6.67 所示的系统，从 θ 到 T_d 推导传递函数。然后应用终值定理(假设 T_d 为常数)，判断下列两种情况下 $\theta(\infty)$ 是否非零：

(a) $D_c(s)$不含有积分项，$\lim\limits_{s\to 0} D_c(s)$=常数；

(b) $D_c(s)$含有积分项：

$$D_c(s) = \frac{D_c'(s)}{s}$$

其中，$\lim\limits_{s\to 0} D_c'(s)$=常数

6.48 倒立摆的传递函数由式(2.31)给出，可近似为：

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0.25}$$

(a) 根据伯德图来设计超前补偿环节，满足 PM=30°，利用 Matlab 验证并改善你的设计。

(b) 画出系统的根轨迹图，并根据系统的伯德图做简单验证。

(c) 你是否能利用实验的方法确定系统的频率响应？

6.49 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s/5+1)(s/50+1)}$$

(a) 根据伯德图来为 $G(s)$设计滞后补偿环节，使闭环系统满足下列的性能指标：

i) 对单位斜坡输入信号的稳态误差小于 0.01。

ii) PM≥40°

(b) 利用 Matlab 验证并改善你的设计。

6.50 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s/5+1)(s/200+1)}$$

(a) 根据伯德图，为 $G(s)$设计超前补偿器，使闭环系统满足下列的性能指标：

i) 对单位斜坡输入信号的稳态误差小于 0.01。

ii) 闭环主导极点的阻尼比 $\zeta \geq 0.4$。

(b) 利用 Matlab 验证并改善你的设计，闭环主导极点的阻尼比可由 Matlab 直接求得。

6.51 位置控制系统应用于直流电动机，其电枢电感可忽略。它的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{50}{s(s/5+1)}$$

(a) 根据伯德图，设计补偿环节，使闭环系统满足下列性能指标：

i) 对单位斜坡输入信号的稳态误差小于 1/200。

ii) 系统单位阶跃响应的超调量小于 20%。

iii) 补偿后系统的带宽不得小于补偿前的系统带宽。

(b) 利用 Matlab 验证并改善你的设计。系统超调量可由 Matlab 直接求得。

6.52 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(1+s/5)(1+s/20)}$$

(a) 绘制系统的框图，要包括参考输入和传感器噪声。

(b) 通过伯德图，为 $G(s)$设计补偿环节，使闭环系统满足下列性能指标：

i) 对单位斜坡输入信号的稳态误差小于 0.01。

ii) PM≥45°。

iii) 对于频率小于 0.2rad/s 的正弦输入信号，其稳态误差小于 1/250。

iv) 对于频率大于 200rad/s 的噪声信号，噪声至少要衰减到原值的 1/100。

(c) 利用 Matlab 验证并改善设计，尤其要计算闭环系统的频率响应，以及验证设计是否满足ⅳ)问。

6.53 考虑 1 型单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

根据伯德图，设计超前补偿环节，满足 $K_v = 20\text{s}^{-1}$，PM > 40°。利用 Matlab 验证你的设计，如需要，请修正你的设计。

6.54 考虑卫星姿态控制系统，其传递函数为

$$G(s)=\frac{0.05(s+25)}{s^2(s^2+0.1s+4)}$$

设计超前补偿环节，使系统幅值镇定，满足 GM≥2(6dB)，PM≥45°，同时要满足，并在使用单一补偿环节的前提下，保证有尽可能宽的带宽。

6.55 喷气式运输机的自动驾驶仪，其一种操纵模式是高度控制。只考虑较大时间常数的动态特性，飞机高度与升降舵的角度之间的关系，线性化后可表示为

$$G(s)=\frac{h(s)}{\delta(s)}=\frac{20(s+0.01)}{s(s^2+0.01s+0.0025)}\ \frac{\text{ft/s}}{(°)}$$

自动驾驶仪从高度测量仪接收到与飞机高度成比例的电信号，将它与输入信号(与飞行员的指令高度成比例)相比较，形成误差信号。误差信号经补偿环节处理后，用于控制升降舵的执行机构。系统的框图如图 6.101所示。现在，你的任务就是设计补偿部分 $D_c(s)$。首先考虑采用比例控制规律$D_c(s)=K$。

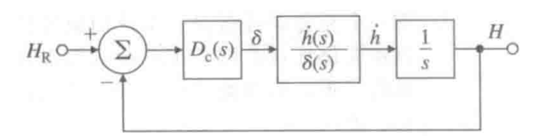


图 6.101 习题 6.55 的控制系统

(a) 对于 $D_c(s)=K=1$，用 Matlab 绘制开环系统的伯德图。

(b) 如果要是系统的穿越频率为 0.16rad/s，请确定 K 值。

(c) 对于(b)问中确定的 K 值，系统是否闭环稳定？

(d) 对于(b)问中确定的 K 值，相位裕度 PM 是多少？

(e) 绘制系统的奈奎斯特图，并在图上标出相位为 180°和幅值为 1 的点；

(f) 利用 Matlab 绘制以 K 为参数的根轨迹图。K 取(b)问中确定的值时，确定闭环极点的位置。

(g) 如果飞行员的指令高度是 1000ft，那么系统阶跃响应的稳态误差是多少？对于(h)和(i)问，假设补偿环节具有如下形式：

$$D_c(s)=\frac{T_D s+1}{\alpha T_D s+1}$$

(h) 请确定参数 K、T_D 和 α，以保证穿越频率为 0.16rad/s，PM 大于 50°。在(a)问中所画伯德图的上面绘制 $D_c(s)G(s)/R$ 伯德图，可直接测得 PM，一次来验证你的答案。

(i) 系统中加入(h)问中所设计的补偿部分后，用 Matlab 绘制系统以 K 为参数的根轨迹。K 取(h)问中所确定的值，在图中标出闭环极点的位置。

(j) 自动驾驶仪还有一种操纵模式，就是对飞机的爬升速度也可由飞行员直接控制。

i) 请绘制该模式下的系统框图。

ii) 确定相关的 $G(s)$。

iii) 设计 $D_c(s)$，使系统有和前一种模式中相同的穿越频率，并保证 PM 大于 50°。

6.56 系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s[(s/1.4)+1][(s/3)+1]}$$

设计具有单位增益的滞后补偿环节，使系统的相位裕度 PM≥40°，并估计系统带宽的近似值。

6.57 设有一习题 6.39 中船舶驾驶系统。

(a) 设计补偿环节以满足下列性能指标：

i) 静态速度误差 $K_v=2$。

ii) 相位裕度 PM≥50°。

iii) 无条件稳定(对于所有 $\omega\leqslant\omega_c$，满足 PM>0，ω_c 是系统的穿越频率)。

(b) 根据你的最终设计结果，绘制以 K 为参数的根轨迹，并标出系统闭环极点的位置。

6.58 某单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s/20+1)(s^2/100^2+0.5s/100+1)} \tag{6.74}$$

(a) 如果超前补偿环节的参数分别为 $\alpha=1/5$，$1/T=20$ 如何改变增益满足穿越频率 $\omega_c=31.6$rad/s，此时的静态速度误差系数是多少？

(b) 若再增加一个滞后补偿环节，为使 $K_v=100$，那么要求 K 为何值？

(c) 将滞后补偿环节的极点取在 3.16rad/s，请确定其零点的位置，使系统的穿越频率 ω_c 仍为 31.6rad/s。在同一张图上绘制系统补偿后的频率特性曲线。

(d) 确定补偿后系统的相位裕度 PM。

6.59 Golden Nugget 航空公司因在机舱尾部设有免费吧台，而获得了巨大的成功(见习题5.40)。为满足客流量的需求，该公司又购进了更大客容量的飞机。但他们很快发现飞机处于大气强对流时，飞机尾部会有令人讨厌的偏航运动，乘客酒杯里的酒会因此而洒出来。如果设 r 为飞机的偏航速度，δ_r 为方向舵的角度，那么有近似的传递函数，称为“荷兰滚”模式(见 10.3.1 节)：

$$\frac{r(s)}{\delta_r(s)}=\frac{8.75(4s^2+0.4s+1)}{(s/0.01+1)(s^2+0.24s+1)}$$

技术人员通过对机身结构的有限元分析发现，为正确反映来自方向舵和气流的激励作用对机身横向偏转的影响，上述传递函数需要再加上一项，改为

$$\frac{r(s)}{\delta_r(s)}=\frac{8.75(4s^2+0.4s+1)}{(s/0.01+1)(s^2+0.24s)+1)}\times\frac{1}{(s^2/\omega_b^2+2\zeta s/\omega_b+1)}$$

其中：ω_b 是横向偏转的频率（$=10\text{rad/s}$），ζ 是横向偏转的阻尼比（$=0.02$）。多数飞机都有一个“偏航阻尼器”，即采用简单的比例控制规律，将速率陀螺仪测量的偏航速度反馈至方向舵。对 Golden Nugget 航空公司的新客机也采用同样的反馈控制。反馈增益的比例系数 $K=1$，即

$$\delta_r(s)=-Kr(s) \tag{6.75}$$

(a) 绘制开环系统的伯德图，确定系统的 PM 和 GM。绘制闭环系统的跃阶响应曲线和幅频曲线。请确定带来麻烦的系统振荡的频率。

(b) 为消除振荡，下面列出了四个补救方案。请考察各方案的优势：

i) 将飞机横向偏转的阻尼比由 0.02 增加到 0.04。

ii) 将飞机横向偏转的频率 ω_b 由 10rad/s 增大到 20rad/s。

iii) 在反馈回路中，增加一个低通滤波器，即用 $KD_c(s)$ 代替式(6.75)中的 K，而

$$D_c(s)=\frac{1}{s/\tau_p+1}$$

iv) 增加一个陷波滤波器（见 5.4.3 小节），将滤波器的频率选为 ω_b，阻尼比 ξ 选为 0.04，分母极点为 $(s/100+1)^2$，保持滤波器的直流增益为 1。

(c) 将飞机横向偏转的频率减小 10%，考察上述两种补偿设计（iii 和 iv）的灵敏度。具体地讲，将两种设计的 PM、GM、横向偏转的闭环阻尼比和谐振峰值列表对比，并定性地描述两种设计的跃阶响应有何不同？

(d) 请给 Golden Nugget 航空公司一些建议，使乘客酒杯里的酒不再洒出来（当然，你不能要乘客老老实实地坐在自己的位置上！请从改善飞机的“偏航阻尼器”的角度出发，给出你的建议）。

△6.60 考虑一个系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s/10+1)}$$

(a) 画出此系统的伯德图，求出 GM 和 PM。

(b) 计算灵敏度函数并绘制出其幅频特性曲线。

(c) 计算矢量裕度（VM）

△6.61 证明灵敏度函数 $S(s)$ 在以 -1 为圆心、半径为 1 的圆内有大于 1 的幅值。如果在所有频率上闭环控制都优于开环控制，那么意味着奈奎斯特图是什么形状。

△6.62 考虑如图 6.100 所示的系统具有传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s(s/10+1)}$$

(a) 设计补偿环节，使系统满足下列性能指标：

i) $K_v=100$。

ii) $\text{PM}\geqslant 45°$。

iii) 对于频率最大到 1rad/s 的正弦输入信号，都能以少于 2% 的误差跟踪再现。

iv) 能够将频率大于 100rad/s 的正弦信号衰减到 5% 以下。

(b) 绘制 $G(s)$ 的伯德图，确定开环增益，使 $K_v=100$。

(c) 要满足系统在正弦输入下的指标要求，有一个充分条件就是，系统的幅频特性曲线保证都在图 6.102 所示阴影区域的外面，请对此进行解释，可先回忆一下：

$$\frac{Y}{R}=\frac{KG}{1+KG},\quad \frac{E}{R}=\frac{1}{1+KG}$$

(d) 为何单纯地加入超前补偿环节无法满足设计指标？

(e) 为何单纯地加入滞后补偿环节也无法满足设计指标？

(f) 请设计超前滞后补偿环节，以满足所有的设计指标，不要更改前面所选定的低频开环增益。

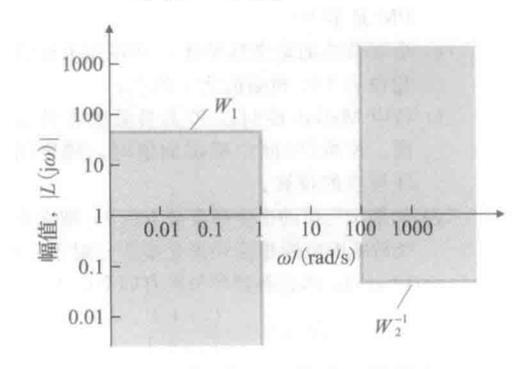


图 6.102 习题 6.62 的控制系统的限制

6.63 对于例 6.20，通过选择 $1/T_D=0.05$，重新设计，再确定 $1/T_I$ 可能的最大值，以满足 PM 的要求。如果可以的话，对阶跃扰动转矩响应进行改进。

△ 6.8 节习题

6.64 假设系统传递函数为

$$G(s)=\frac{e^{-T_d s}}{s+10}$$

其中 $T_d=0.2\text{s}$。如果采用如下两种补偿形式，请确定在保证相位裕度 PM≥40°的前提下，系统的最大带宽；

(a) 对于单超前补偿环节，

$$D_c(s)=K\frac{s+a}{s+b}$$

其中：$b/a=100$。

(b) 对于双重超前补偿环节，

$$D_c(s)=K\left(\frac{s+a}{s+b}\right)^2$$

其中：$b/a=10$。

(c) 关于时滞环节对带宽的影响，请谈谈你的看法。

6.65 确定 K 的范围使下列系统是稳定的：

(a) $G(s)=K\dfrac{e^{-4s}}{s}$。

(b) $G(s)=K\dfrac{e^{-s}}{s(s+2)}$。

6.66 考虑到例 2.16 的换热器系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}$$

(a) 设计超前补偿器产生 PM≥45°和可能的最大闭环带宽。

(b) 设计一个 PI 补偿器产生 PM≥45°和可能的最大闭环带宽。

△ 6.9 节习题

6.67 某反馈控制系统如图 6.103 所示，要求闭环系统的阶跃响应超调量小于 30%。

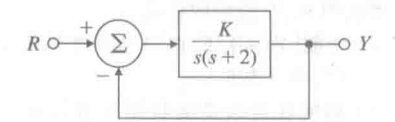


图 6.103 习题 6.67 的控制系统

(a) 要满足要求，相位裕度 PM 和闭环谐振峰值 M_r 应满足怎样的条件(参考图 6.37)。

(b) 根据系统的伯德图，确定满足相位裕度 PM 要求的最大 K 值。

(c) 将图 6.82 做一份拷贝，然后在上面绘制系统的幅相曲线[K 就是(b)问中确定的值]，由此确定谐振峰值 M_r，然后和(a)问中的近似结果作比较。

(d) 利用尼科尔斯图，确定谐振频率 ω_r 和闭环带宽。

6.68 图 6.104 所示为两个系统的尼科尔斯图，

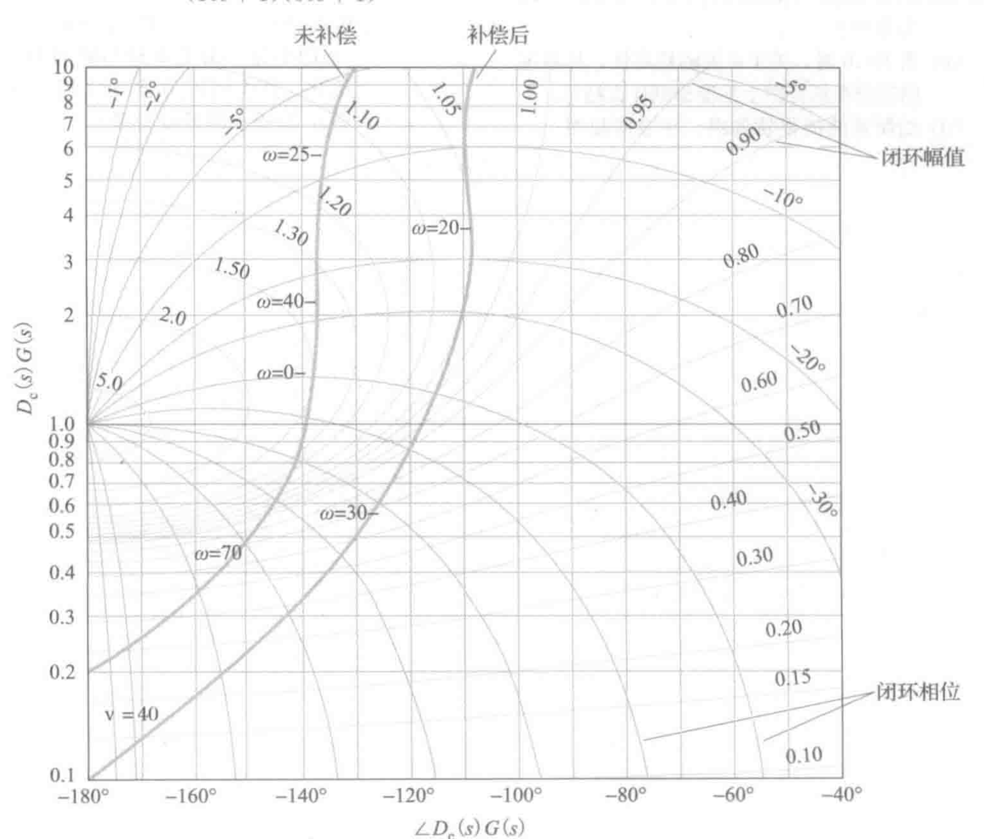


图 6.104 习题 6.68 的尼科尔斯图

一个系统未加补偿环节，另一个加入了补偿环节。

(a) 确定两个系统各自的谐振峰值。

(b) 确定两个系统各自的 PM 和 GM。

(c) 请确定两个系统各自的带宽。

(d) 加入补偿环节的系统采用的是什么补偿环节？

6.69　考虑图 6.95 所示的系统。

(a) 绘制$[Y(j\omega)/E(j\omega)]^{-1}$的逆奈奎斯特图(见附录 W6.9.2)

(b) 如何在逆奈奎斯特图上直接确定新系统中性稳定时的 K 值。

(c) 对于 $K=4$，2，1，请确定相位裕度和幅值裕度。

(d) 绘制系统的根轨迹图，注意两幅图上的对应点。对于(c)问，确定 GM 和 PM，响应的阻尼比 ζ 为何值？

6.70　某不稳定系统，其传递函数为

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{s+1}{(s-1)^2}$$

为它加上简单的控制回路，组成闭环系统，使其框图如图 6.95 所示。

(a) 绘制系统 $Y(s)/F(s)$的奈奎斯特图。

(b) 确定 K 值，使 PM 为 45°，相应的 GM 为多少？

(c) 当 $K<0$ 时，关于系统的稳定性，从系统的逆奈奎斯特图上你能得到什么结论。

(d) 绘制系统的根轨迹图，注意两幅图上的对应点。PM 为 45°时，相应的阻尼比 ζ 为何值？

406
~
432

6.71　考虑图 6.105a 所示的系统。

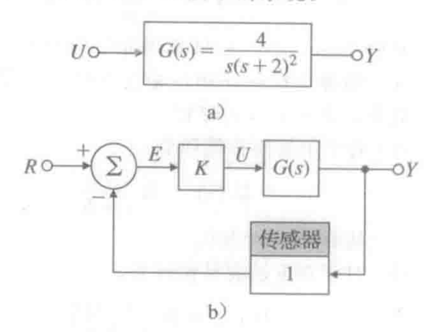


图 6.105　习题 6.71 的控制系统

(a) 绘制系统的伯德图。

(b) 根据伯德图，绘制系统的逆奈奎斯特图(见附录 W6.9.2)。

(c) 加入控制回路 $G(s)$，使系统闭合，如图 6.105b 所示。根据奈奎斯特图，由伯德图确定 $K=0.7$，1.0，1.4，2 等不同情况下的 GM 和 PM。要满足 PM=30°，K 取何值？

(d) 绘制系统的根轨迹图，在图上标出 $K=0.7$，1.0，1.4，2 时的对应点。确定(c)问中每一组 PM 和 GM 所对应的阻尼比。PM 和阻尼比 ζ 之间是否符合图 6.36所示的近似关系？

第7章 状态空间设计

状态空间设计简介

除了根轨迹和频率响应两种变换方法以外，设计反馈控制系统还有另外一种主要的方法：即状态空间法。我们将介绍描述微分方程的状态变量法。在状态空间设计中，控制工程师直接通过系统的状态变量描述设计动态补偿器。与变换方法类似，状态空间法的目的是找到满足设计指标的补偿环节 $D_c(s)$，如图 7.1 所示。因为状态空间法在描述被控对象以及计算补偿环节方面与其他变换方法不同，所以乍看起来状态空间法好像是在解决一类完全不同的问题。我们在本章末尾选择了一些例子进行分析，意在使读者明确：状态空间法设计得到的具有传递函数 $D_c(s)$ 的补偿器，与利用另外两种方法得到的补偿器 $D_c(s)$ 是等价的。

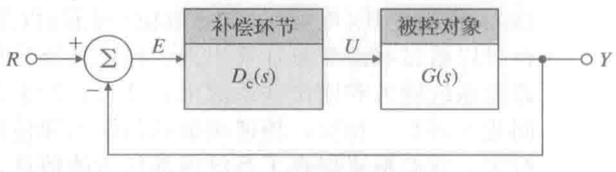


图 7.1 控制系统设计定义

因为状态空间法非常适合利用计算机技术进行设计，所以，越来越多的控制工程师正在研究和使用这种设计方法。

433

章节概述

本章首先介绍使用状态空间设计法的目的和优点。7.2 节通过几个例子讨论对不同的动态系统选择状态变量和状态空间模型。以状态变量形式描述的模型，可以提高我们使用计算机辅助工具(如 Matlab)的计算效率。7.3 节用一个模拟计算机仿真模型举例说明状态变量形式具有很大好处。7.4 节回顾由框图求取状态变量方程的方法。然后介绍利用手工计算和计算机分析，利用状态方程求解动态响应的过程。在介绍预备知识和基本理论后，本章接下来通过状态空间研究控制系统的设计方法。设计的步骤如下。

(1) 选择闭环极点(参考前几章中的根)的位置，为闭环系统设计控制律，以此得到期望的动态响应(7.5 节和 7.6 节)。

(2) 设计估计器(7.7 节)。

(3) 将控制律与估计器结合(7.8 节)。

(4) 引入参考输入(7.5.2 小节和 7.9 节)。

在介绍完上述主要的设计步骤后，再简要地探讨关于状态空间中积分控制的使用(7.10 节)。本章接下来三节主要介绍状态空间法涉及的一些其他概念；由于这些概念相对来说比较前沿，因此可供某一些课程或读者进行选用。最后，7.15 节给出本章相关内容的历史展望。

7.1 状态空间的优点

状态空间的思想来源于描述微分方程的状态变量法。在状态变量法中，微分方程描述了一个动态系统，该系统是由一组关于系统状态矢量的一阶微分方程组成的，方程的解可以看作该状态矢量在空间的一条轨迹。状态空间控制设计是控制系统工程师直接利用系统的状态变量描述设计动态补偿的技术。我们看到，物理动态系统的常微分方程(ODE)能够

434

化成状态变量形式。在研究常微分方程的数学领域中，状态变量形式称为*标准形*。研究这种形式的方程有几个充分的理由，在此列举如下三条。

- 研究更一般的模型：常微分方程(ODEs)不必是线性或者静态的。因此，通过研究方程本身，可以提出更为一般的方法。将这些方程用状态变量形式表达，可以得到一种紧凑、标准的研究形式。更进一步地说，状态空间分析和设计方法很容易扩展到多输入和/或多输出系统中。当然，本文主要研究的是单输入和单输出的线性时不变(LTI)模型(具体原因如前所述)。
- 将几何概念引入微分方程：在物理学中，粒子或刚体的位置——速度平面称为*相平面*，在该平面内，运动的轨迹是一条曲线。状态就是将该思想推广到二维以上的空间内得到的。虽然我们不能很容易地画出超过三维以上的图形，但是距离、正交直线、平行线以及其他几何学概念有助于将一个常微分方程的解视为状态空间的一条轨线。
- 将系统的内部和外部描述联系起来：动态系统的状态经常能直接描述系统内部能量的分布。比如，机电系统通常选取以下量作为状态变量：位置(势能)、速度(动能)、电容电压(电能)、电感电流(磁能)以及热系统温度(热能)。这些内部能量总是可以通过状态变量计算出来。通过系统分析进行简要描述，我们能够将系统的状态及系统输入和输出联系起来，并且，在系统的内部变量和外部输入及测量输出之间建立联系。相反，传递函数仅将输入和输出联系起来，并没有展现出系统的内部行为。状态形式保存了系统内部行为的信息，有时这是重要的。

使用状态空间法进行设计经常称为*现代控制设计*，而以传递函数法为基础进行研究，比如根轨迹和频率响应，则称为*经典控制设计*。然而，由于利用常微分方程描述的状态空间法已经使用了100多年，并且是在20世纪50年代后期被引入到控制系统设计中的，所以称其为现代控制设计可能会让人产生误解。我们这里所指的两种设计方法是状态空间法和变换法。

当被控系统具有多于一个控制输入或者多于一个测量输出时，状态空间法的优势就更加明显了。然而，本书中，我们用简单的单输入-单输出(SISO)系统为例来验证状态空间设计的思想。这种设计方法用于以状态形式描述的系统是“分而治之”的。首先，假设控制律中使用的所有状态都是可测可得到的。这使得我们为系统分配任意的动态特性提供了可能性。在基于全状态反馈获得一个令人满意的控制律之后，我们引入观测器的概念并基于测量输出构建估计器，然后证明这些估计器可以用来替代实际状态变量。最后，我们引入外部参考控制输入来完成设计结构。只有这种情况下，我们意识到这一补偿与其他转换法提出的本质结构是相同的。

435

在利用状态描述法进行设计系统之前，有必要介绍一下全章中都会用到与矩阵线性代数相关的一些解析结论和工具。我们假设读者对基本的矩阵概念如恒等矩阵、三角矩阵、对角矩阵和矩阵的转置都很熟悉，并且也假设已经掌握了矩阵代数的一些技巧，包括矩阵加法、矩阵乘法和矩阵求逆。7.4节对线性系统的动态响应提出了更好的结论。本章中用到的所有线性代数的结论都归纳在附录WB中，网址www.fpe7e.com可供参考及查阅。

7.2 系统状态空间描述

任意有限动态系统的运动都可以通过一组一阶常微分方程(ODEs)来进行描述。这通常称为状态变量表达式。比如，2.1节中使用牛顿定律以及受力图，可以推导出二阶微分方程，也就是，方程包含二阶导数，如式(2.3)中的$\ddot{x}$，或者式(2.15)中的$\ddot{\theta}$。后面的方程可以表示为

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{7.1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{I} \tag{7.2}$$

其中：

$$u = F_c d + M_D$$
$$x_1 = \theta$$
$$x_2 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$$

系统输出为卫星的姿态，用θ表示。上述方程可以通过状态变量形式表达成矢量方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{7.3}$$

其中：输入是u，输出为

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du \tag{7.4}$$

436

列矢量$\boldsymbol{x}$为系统的状态，n阶系统的状态含有n个元素。就机械系统而言，状态矢量元素通常由各分离组件的位置和速度组成，如例子中式(7.1)和式(7.2)所示。$\boldsymbol{A}$是$n\times n$的系统矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times 1$的输入矩阵，$\boldsymbol{C}$是$1\times n$行矩阵代表系统的输出矩阵，D是标量称为直接传输项[⊖]。为了节省空间，我们有时利用转置的形式表示状态矢量

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$$

等价于

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

更复杂系统的微分方程模型，如第2章提出的关于机械、电子以及机电系统，都可以通过选择位置、速度、电容电压和电感电流作为合适的状态变量来描述相应的系统。

本章中，我们将考虑利用状态变量形式进行控制系统设计。对于状态变量的关系是非线性的情况[例如式(2.22)，式(2.94)和式(2.98)]，不能直接使用线性形式。必须像第2章那样将方程线性化为合适的形式(如第9章)。

微分方程的状态变量方法可以用在计算机辅助控制系统设计软件包中(如Matlab)。因此，为了将线性微分方程应用到计算机中，需要知道矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$及常数D的值。

例7.1 状态变量形式的卫星姿态控制模型

对例2.3中以状态变量形式描述的卫星姿态控制模型，试确定矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，和常数D，其中$M_D=0$。

解答。定义卫星姿态和角速度为状态变量，使得$\boldsymbol{x} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\theta \quad \omega]^{\mathrm{T}}$[⊜]。则单个二阶方程(2.15)可以等价为2个一阶方程

$$\dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{\omega} = \frac{d}{I}F_c$$

437

利用式(7.3)$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u$，上述方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d/I \end{bmatrix}F_c$$

系统的输出是卫星的姿态，$y=\theta$，利用式(7.4)，$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+Du$此关系可以表示为

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

⊖ 我们使用符号$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$和D进行规范化。由于历史原因，在本书早期版本中，我们使用$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{H}$和J。希望读者在使用过程中不会感觉变化太大。

⊜ 符号$\stackrel{\mathrm{def}}{=}$表示"定义为"。

因此，状态变量形式的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\d/I\end{bmatrix},\quad C=[1\quad 0],\quad D=0$$

且输入为 $u\stackrel{\mathrm{def}}{=}F_c$。

对于这个非常简单的例子，微分方程的状态变量形式看起来比式(2.15)的二阶形式在写法上更加复杂。然而，对于大多数系统来说，这个方法并不复杂，并且标准形具有可以利用计算机辅助设计的优势，使得状态变量形式已经得到广泛的应用。◀

下面是一个更加复杂的例子，表明如何利用 Matlab 找到线性微分方程的解。

例 7.2 巡航控制阶跃响应

(1) 以状态变量形式重写例 2.1 中的运动方程，其中输出是汽车的位置 x。

(2) 对于从 $t=0$ 输入 $u=0$ 跳变到常值输入 $u=500\text{N}$ 之后的这种情形，利用 Matlab 计算汽车速度的响应。假设汽车质量 m 为 1000kg 且 $b=50\text{N}\cdot\text{s/m}$。

解答。

(1) 运动方程：首先，我们需要表示出描述被控对象式(2.3)的微分方程，将其作为一族同时成立的一阶方程。为此，我们定义汽车的位置和速度作为状态变量 x 和 v，使得 $\mathbf{x}=[x\quad v]^{\mathrm{T}}$。单个二阶式(2.3)可以重新写成一组两个一阶方程：

$$\dot{x}=v$$

$$\dot{v}=-\frac{b}{m}v+\frac{1}{m}u$$

438

接下来，使用式(7.3)的标准形式 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$ 来表示上述方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -b/m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1/m\end{bmatrix}u \tag{7.5}$$

系统的输出是汽车的位置，以矩阵形式表达为

$$y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}$$

或

$$y=\mathbf{C}\mathbf{x}$$

所以本例中，状态变量形式矩阵定义为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -b/m\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1/m\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[1\quad 0],\quad D=0$$

(2) 时域响应：现在除了输出以外，运动方程在(1)问中已经给出。因此，输出矩阵为

$$\mathbf{C}=[0\quad 1]$$

所需系数为 $b/m=0.05$ 和 $1/m=0.001$。定义系统的数值矩阵分别为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -0.05\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0.001\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[0\quad 1],\quad D=0$$

在 Matlab 中，阶跃函数可以计算线性系统对于单位阶跃信号输入下的时域响应。因为系统是线性的，所以，这种情形下的输出可以由输入阶跃信号的幅值进行放大，从而得到任意幅值的阶跃响应。同样地，矩阵 $\mathbf{B}$ 可乘以输入阶跃信号的值。

Matlab 语句如下。

```
A = [0 1;0 -0.05];
B = [0;0.001];
C = [0 1];
D = 0;
sys = ss(A, 500*B,C,D);    % step gives unit step response,
                             so 500*B gives u=500 N.
step(sys);                 % plots the step response
```

对于一个幅值为500N的输入阶跃信号，计算并画出时域响应曲线。阶跃响应如图7.2所示。

439

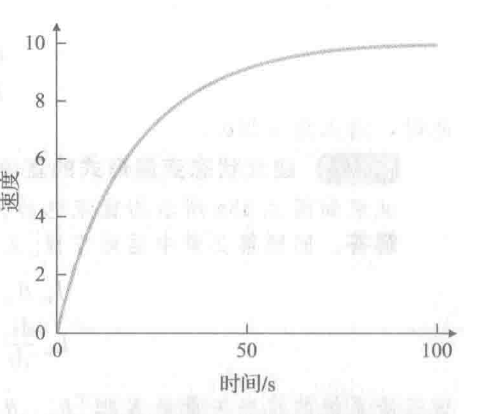


图7.2 阶跃输入为 u 的汽车速度响应曲线

例7.3 状态变量形式的桥接三通电路

确定如图2.25所示电路图的状态空间方程。

解答。为了写出状态变量形式的方程(也就是，一组同时成立的一阶微分方程式)，选择电容电压 v_{C1} 和 v_{C2} 作为状态元素(即，$\boldsymbol{x}=[v_{C1}\quad v_{C2}]^T$)，以及 v_i 作为输入(即 $u=v_i$)。这里，$v_{C1}=v_2$，$v_{C2}=v_1-v_3$，$v_1=v_i$。因此，$v_1=v_i$，$v_2=v_{C1}$，$v_3=v_i-v_{C2}$ 作为输出(也就是 $y=v_3$)。依据 v_{C1} 和 v_{C2}，式(2.34)为

$$\frac{v_{C1}-v_i}{R_1}+\frac{v_{C1}-(v_i-v_{C2})}{R_2}+C_1\frac{dv_{C1}}{dt}=0$$

将该方程转化为标准形，我们得到

$$\frac{dv_{C1}}{dt}=-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{C1}-\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right)v_{C2}+\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_i \tag{7.6}$$

依据 v_{C1} 和 v_{C2}，式(2.35)为

$$\frac{v_i-v_{C2}-v_{C1}}{R_2}+C_2\frac{d}{dt}(v_i-v_{C2}-v_i)=0$$

写成标准形，上式为

$$\frac{dv_{C2}}{dt}=-\frac{v_{C1}}{C_2R_2}-\frac{v_{C2}}{C_2R_2}+\frac{v_i}{C_2R_2} \tag{7.7}$$

式(2.34)、式(2.35)完全等价于状态变量形式，式(7.6)、式(7.7)用来描述电路。标准矩阵定义为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) & -\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_2})\\ -\frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\\ \frac{1}{C_2R_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[0\quad -1],\quad D=1$$

440

例7.4 状态变量形式的扬声器电路

试对图2.30所示的扬声器电路以及图2.31所示的驱动电路，找到输入电压 v_a 到输出锥体位移 x 的状态空间方程。假设电路电阻是 R，电感是 L。

解答。回顾互相耦合的式(2.54)和式(2.58)所组成的扬声器动态模型：

$$M\ddot{x}+b\dot{x}=0.63i$$

$$L\frac{di}{dt}+Ri=v_a-0.63\dot{x}$$

这个三阶系统的逻辑状态矢量将是 $\boldsymbol{X}\overset{\text{def}}{=}[x\quad \dot{x}\quad i]^T$，由此得出标准矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/M & 0.63/M\\ 0 & -0.63/L & -R/L\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1/L\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=0$$

此时，输入为 $u\overset{\mathrm{def}}{=}v_{\mathrm{a}}$。◀

例 7.5　建立状态变量形式的直流电动机模型

试求如图 2.33a 所示的直流电动机等价电路的状态空间方程。

解答。回顾第 2 章中运动方程[式(2.62)和式(2.63)]，即

$$J_{\mathrm{m}}\ddot{\theta}_{\mathrm{m}}+b\dot{\theta}_{\mathrm{m}}=K_{\mathrm{t}}i_{\mathrm{a}}$$

$$L_{\mathrm{a}}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}+R_{\mathrm{a}}i_{\mathrm{a}}=v_{\mathrm{a}}-K_{\mathrm{e}}\dot{\theta}_{\mathrm{m}}$$

该三阶系统的状态矢量是 $\boldsymbol{X}\overset{\mathrm{def}}{=}[\theta_{\mathrm{m}}\quad\dot{\theta}_{\mathrm{m}}\quad i_{\mathrm{a}}]^{\mathrm{T}}$，由此推出标准矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -\dfrac{b}{J_{\mathrm{m}}} & \dfrac{K_1}{J_{\mathrm{m}}}\\ 0 & -\dfrac{K_{\mathrm{e}}}{L_{\mathrm{a}}} & -\dfrac{R_{\mathrm{a}}}{L_{\mathrm{a}}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\\dfrac{1}{L_{\mathrm{a}}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=0$$

其中：输入 $u\overset{\mathrm{def}}{=}v_{\mathrm{a}}$。◀

441

状态变量形式可以应用到任意阶的系统中。例 7.6 通过一个四阶系统阐明了这一点。

例 7.6　状态变量形式的软盘驱动器

对例 2.4 的微分方程，试求它的状态变量形式，其中输出为 θ_2。

解答。定义状态矢量为

$$\boldsymbol{x}=[\theta_1\quad\dot{\theta}_1\quad\theta_2\quad\dot{\theta}_2]^{\mathrm{T}}$$

然后，对 $\ddot{\theta}_1$ 和 $\ddot{\theta}_2$ 求解式(2.17)和式(2.18)，写成更明显的状态变量形式，求解矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{k}{I_1} & -\dfrac{b}{I_1} & \dfrac{k}{I_1} & \dfrac{b}{I_1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \dfrac{k}{I_2} & \dfrac{b}{I_2} & -\dfrac{k}{I_2} & -\dfrac{b}{I_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{I_1}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=0$$

◀

当微分方程包含输入 u 的导数时，处理的难度就会增加。7.4 节将介绍处理这种情况的方法。

7.3 框图与状态空间

也许，借助模拟计算机框图的表现形式是理解状态变量方程的最有效方法。使用积分器作为该图示结构的中心元件，这尤其适合利用状态变量描述的一阶动态系统。尽管模拟计算机几乎已被淘汰，但是在状态变量的设计和模拟补偿电路的设计中，模拟计算机的应用依然具有价值[⊖]。

模拟计算机是由电子元器件组成的设备，用来对微分方程组(ODE)进行仿真。模拟计算机的最基本动态元件是积分器，由一个带有电容反馈和电阻前馈的运算放大器构成，如图 2.29 所示。因为积分器是一个元器件，其输入是输出的导数，如图 7.3所示。如果在一个模拟计算机仿真中，将积分器的输出作为状态，那么我们将自动获得状态变量形式的方程。相反地，如果系统通过多个状态变量描述，那么根据给定的状态变量方程，对每个状态变量及其输入使用一个积分器，可以构建出反映状态方程的一个模拟计算机仿真系统。

图 7.3 积分器

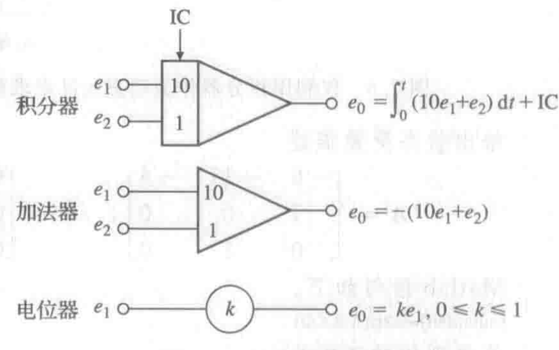


图 7.4 计算机模拟器件

一个典型的模拟计算机组成部件用于实现如图 7.4 所示的函数。注意到运算放大器的符号变化，由此给出的是负增益。

例 7.7 模拟计算机实现

求出如图 7.5 所示的三阶系统的状态变量描述和传递函数，其微分方程为

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

图 7.5 三阶系统框图

解答。从该常微分方程中解出最高阶导数项，得到

$$\dddot{y} = -6\ddot{y} - 11\dot{y} - 6y + 6u \tag{7.8}$$

现在，我们假设已经得到这个最高阶导数并且注意到其低阶项可以通过积分得到，如图 7.6a 所示。最终，应用式(7.8)得到如图 7.6b 所示的实现形式。为了获得状态描述，简单定义状态变量 $x_1 = \ddot{y}$，$x_2 = \dot{y}$ 和 $x_3 = y$ 作为积分器的输出，得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2\end{aligned}$$

442 ~ 443

⊖ 同时由于其历史意义。

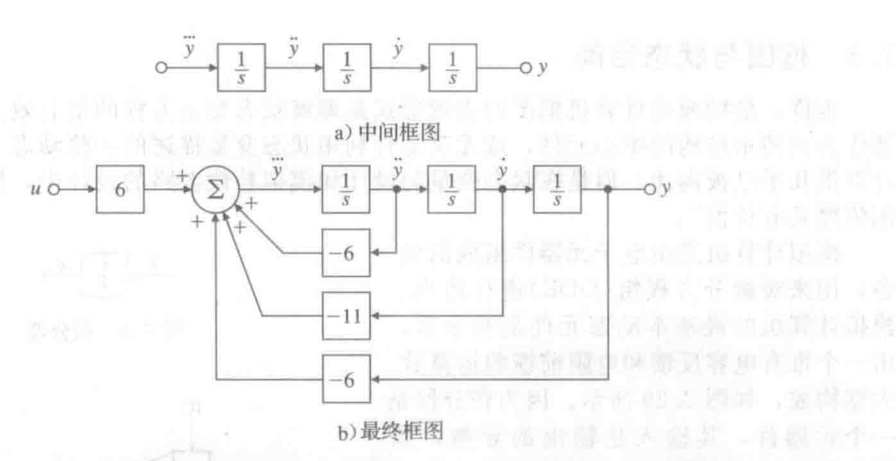


图 7.6 仅利用积分器作为动态元件来求解 $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$ 的系统框图

给出状态变量描述

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-6 & -11 & -6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=0$$

Matlab 语句如下。

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
```

将得到传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

如果希望传递函数以因式分解形式出现，可以用 Matlab 中 *ss* 或 *tf* 命令变换获得。或者使用如下 Matlab 语句：

```
[z,p,k] = ss2zp(A,B,C,D)
```

和

```
[z,p,k] = tf2zp(num,den)
```

将得到

$$\boldsymbol{z}=[\,],\boldsymbol{p}=[-3\quad -2\quad -1]^{\mathrm{T}}\text{ 和 }k=6。$$

这意味着传递函数也可以写成因式形式：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

◀

7.4 状态方程的分析

前面部分，我们介绍并举例说明了选取状态变量及将方程化为状态空间形式的过程。444 本节来回顾一下这个过程，并介绍如何使用状态描述来分析动态响应的。在 7.4.1 小节中，首先将状态描述与系统框图以及拉普拉斯变换理论(描述)联系起来，并且考虑对于给定系统，状态选择不是唯一的。接下来，我们将介绍如何使用这种不唯一性在几种标准形中选择一个以解决现有问题；此时，利用能控标准形很容易设计出状态反馈增益。7.4.2 小节在研究了状态方程结构后，我们将分析系统的动态响应，并且研究传递函数零极点与状态描述矩阵之间的关系。我们将给出一个简单的热学系统模型，对其利用手工计算验证上述结论的正确性。计算机辅助控制系统设计软件包，如 Matlab，可以给我们提供更多的实际例子；我们也将随时介绍相关的 Matlab 命令。

7.4.1 框图及标准形

由热学系统开始研究，其传递函数为

$$G(s)=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{s+2}{s^2+7s+12}=\frac{2}{s+4}+\frac{-1}{s+3} \tag{7.9}$$

分子多项式$b(s)$的根是传递函数的零点，分母多项式$a(s)$的根是传递函数的极点。注意到传递函数具有两种表达形式：多项式形式和部分分式展开形式。为了推导出该系统的状态描述(这通常是很有用的方法)，我们画出与系统传递函数(和微分方程)相对应的框图，图中仅使用隔离积分器作为动态元件。我们给出所谓标准形的几个特殊形式。这样的一个能控标准形结构如图7.7所示。这个结构的本质特征是每个状态变量都通过系统矩阵$\mathbf{A}_c$的系数反馈给控制输入u。

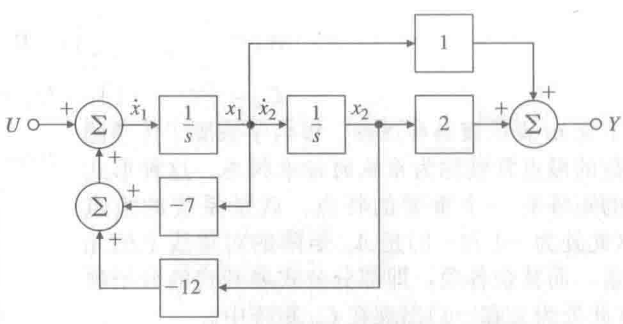


图7.7　式(7.9)的能控标准形对应的框图

一旦画出这种形式的框图，就可以通过观察确定状态描述矩阵；当积分器的输出是状态变量时，积分器的输入是该状态变量的导数。例如，在图7.7中第一个状态变量满足的方程为

$$\dot{x}_1=-7x_1-12x_2+u$$

继续使用上述方法，我们得到

$$\dot{x}_2=x_1$$

$$y=x_1+2x_2$$

这三个方程可以重写成矩阵形式，即

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_c\mathbf{x}+\mathbf{B}_c u \tag{7.10}$$

$$y=\mathbf{C}_c\mathbf{x} \tag{7.11}$$

其中：

$$\mathbf{A}_c=\begin{bmatrix}-7 & -12\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}_c=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{7.12a}$$

$$\mathbf{C}_c=[1\quad 2],\qquad D_c=0 \tag{7.12b}$$

其中：下标c代表能控标准形。

关于这个形式有两个重要特点：一个是传递函数的分子多项式$b(s)$的系数1和2出现在矩阵$\mathbf{C}_c$中；另一个是(除了首项)分母多项式$a(s)$的系数7和12(符号取反)作为矩阵$\mathbf{A}_c$的第一行出现。根据这个结论，我们可以通过观察写出任意系统的能控标准形的状态矩阵，前提是该系统的传递函数是分子分母多项式的比值的形式。如果$b(s)=b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_n$和$a(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n$，则求状态矩阵的Matlab语句如下。

```
num = b = [b1  b2  ···  bn]
den = a = [1  a1  a2  ···  an]
[Ac,  Bc,  Cc,  Dc] = tf2ss(num,den).
```

将tf2ss理解为传递函数到状态空间，程序运行的结果为

$$\mathbf{A}_c=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}_c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} \tag{7.13a}$$

$$\mathbf{C}_c=[b_1\quad b_2\quad\cdots\quad\cdots\quad b_n],\qquad D_c=0 \tag{7.13b}$$

图7.7所示的框图及相应矩阵式(7.12)不是传递函数$G(s)$的唯一表达形式。根据$G(s)$的部分分式展开表达式画出的框图如图7.8所示。利用前面介绍的同样方法，图中标

445
~
446

出了状态变量，我们可以直接根据框图确定矩阵为

$$\dot{z} = A_m z + B_m u$$
$$y = C_m z + D_m u$$

其中：

$$A_m = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.14a}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad D_m = 0 \tag{7.14b}$$

下标 m 表示模态标准形。该名字来源于传递函数的极点常被称为系统的标准模态。这种形式的矩阵有一个重要的特点，就是系统的极点（此处为−4 和−3）是 A_m 矩阵的对角线上的元素，而其余各项，即部分分式展开式的分子项（此处为 2 和−1）出现在 C_m 矩阵中。

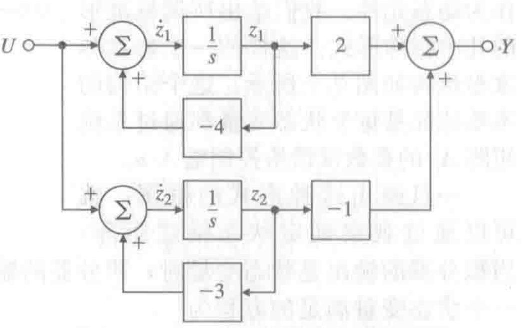


图 7.8 式(7.12)的模态标准形框图

用模态标准形表示一个系统有可能会变得复杂，主要是由于以下两方面原因：(1)当系统的极点是复数形式时，矩阵元素将是复数的形式；(2)当部分分式展开式有重极点时，该系统矩阵不能对角化。为了解决第一个问题，将部分分式展开式的重极点表示为共轭复数对，使得所有元素都是实数。相应矩阵 A_m 的主对角线具有 2×2 阶块矩阵，这表示复数极点集内变量之间的局部耦合。为了解决第二个问题，也可以把相应的状态变量耦合起来，使得极点出现在对角线上，用非对角线项表示这种耦合关系。例 7.1 的卫星系统就是对后一情况的举例，该系统的传递函数是 $G(s)=1/s^2$，该传递函数系统矩阵的模态标准形表示为

447

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_m = 0 \tag{7.15}$$

例 7.8 模态标准形的状态方程

具有一个共振状态的“四分之一卡车模型”[见式(2.12)]，其传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+4}{s^2(s^2+2s+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+2s+4} \tag{7.16}$$

求解描述该系统的模态形状态矩阵。

解答。传递函数已经以实的部分分式形式给出。为了得到状态描述矩阵，我们只需要画出相应的带有积分器的框图，指定状态变量并且写出相应的矩阵即可。此过程不唯一，因此，对所描述的问题存在几个可行解，但是他们只在极小的地方存在不同。图 7.9 给出了一种合理选取变量后的框图。

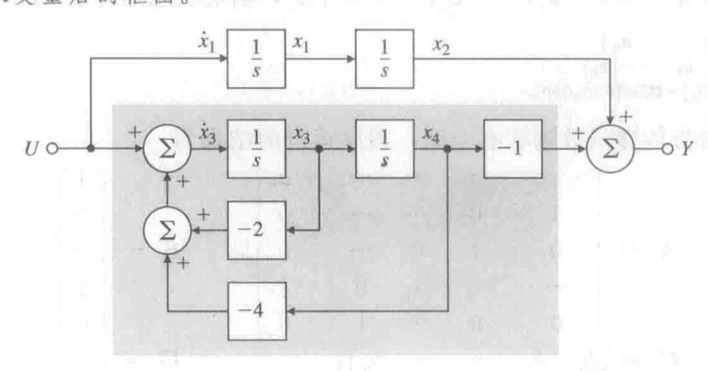


图 7.9 一个四阶系统的模态标准形，其中阴影部分是能控标准形

注意到表示复极点的二阶项已用能控标准形实现。这部分也可以有许多其他的实现方法作为替代。通过观测，该特殊形式可以写成如下的系统矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad D=0 \tag{7.17}$$ ◀

到目前为止，我们可以通过传递函数得到能控形或者模态型表示的系统状态描述。既然这些矩阵描述的是相同的动态系统，我们也许会问，两种形式的矩阵(及他们对应的状态变量)之间有什么样的关系呢？更一般地，假设我们有一组描述某种物理系统的状态方程，这些方程以非特殊形式给出，由于采用能控标准形将有助于解决给定的某些问题(如例 7.5 给出类似的一个问题)，那么有没有可能不用先获得传递函数就可以得到期望的标准形呢？为了回答这些问题，先来看看有关状态变换的概念。

448

考虑状态方程描述的系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u \tag{7.18a}$$

$$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+Du \tag{7.18b}$$

如前面分析结果，上式不是该动态系统的唯一描述。考虑用 $\boldsymbol{x}$ 的一个线性变换，将状态由 $\boldsymbol{x}$ 变换为一个新的状态 $\boldsymbol{z}$。对于非奇异变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，令

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} \tag{7.19}$$

将式(7.19)代入到式(7.18a)中，得到以新状态 $\boldsymbol{z}$ 表示的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}u \tag{7.20a}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}u \tag{7.20b}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{z}+\overline{\boldsymbol{B}}u \tag{7.20c}$$

在式(7.20c)中

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \tag{7.21a}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{7.21b}$$

然后，将式(7.19)代入到式(7.18b)中，得到以新状态 $\boldsymbol{Z}$ 表示的输出方程为

$$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}+Du=\overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{z}+\overline{D}u$$

此时，

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T},\quad \overline{D}=D \tag{7.22}$$

给定一般形式的矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和标量 D，我们想要找到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\overline{\boldsymbol{A}}$，$\overline{\boldsymbol{B}}$，$\overline{\boldsymbol{C}}$ 和 $\overline{D}$ 为具有特殊形式的矩阵，例如能控标准形。为了找到这样的矩阵 $\boldsymbol{T}$，我们首先假设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 D 已经是所要求的形式，进一步假设变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 具有一般形式且能够匹配各个项。现在我们对一个三阶系统进行研究，通过推导过程将分析推广到更一般的情形。步骤如下。

首先改写式(7.21a)为

$$\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}$$

如果 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 是能控标准形，将 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 按行分块为含 t_1，t_2 和 t_3 行矢量的矩阵，则有

$$\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & -a_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_1\boldsymbol{A}\\t_2\boldsymbol{A}\\t_3\boldsymbol{A}\end{bmatrix} \tag{7.23}$$

449

将第三行和第二行展开，可得到如下矩阵方程：

$$t_2=t_3\boldsymbol{A} \tag{7.24a}$$

$$t_1=t_2\boldsymbol{A}=t_3\boldsymbol{A}^2 \tag{7.24b}$$

在式(7.21b)中，假设 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 也是能控标准形，则有以下关系：

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{B}}$$

或者

$$\begin{bmatrix} t_1 B \\ t_2 B \\ t_3 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.25}$$

将式(7.24)和式(7.25)联立，得到

$$t_3 B = 0$$
$$t_2 B = t_3 AB = 0$$
$$t_1 B = t_3 A^2 B = 1$$

这些方程依次可以写成如下矩阵形式

$$t_3[B \quad AB \quad A^2B] = [0 \quad 0 \quad 1]$$

或者

$$t_3 = [0 \quad 0 \quad 1]C^{-1} \tag{7.26}$$

其中：可控性矩阵为 $C=[B \quad AB \quad A^2B]$ 将 t_3 代回到式(7.24)中，即可得到矩阵 T^{-1} 的所有行矢量。

将 n 维的一般状态描述转化为能控标准形的步骤可归纳如下。

由 A 和 B 得到可控性矩阵为

$$C = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{7.27}$$

- 计算变换矩阵的逆矩阵的最后一行，有

$$t_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]C^{-1} \tag{7.28}$$

- 求出整个变换矩阵为

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_n A^{n-1} \\ t_n A^{n-2} \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

- 利用式(7.21a)，式(7.21b)和式(7.22)以及 T^{-1} 求出新的矩阵。

如果可控性矩阵 C 是非奇异的，那么相应的 A 和 B 矩阵称为是能控的。能控性是物理系统的一种技术特性，在7.5节中我们考虑了状态反馈情形中系统的能控性，这种特性是很重要的。我们也将考虑几个不具有可控性的物理实例。

450

通过式(7.29)给出的变换矩阵的数值很难精确地求出，因此通常不这样求 T 矩阵。之所以详细地推导变换矩阵，是因为要表明在理论上这种状态的变换是如何实现的，并且说明了下面重要的结论：

(当且仅当)可控性矩阵 C 是非奇异时，一个给定的状态描述总是可以转化为能控标准形的。

如果需要在实数域内验证可控性，我们可以使用一种数值稳定的方法，把系统矩阵化为“阶梯”形式，而不是再试图计算出可控性矩阵。本章最后习题7.30就要求采用这种方法来判断能控性。

目前为止，我们讨论关于可控性的一个重要问题：状态变换对可控性的影响是怎样的？下面我们利用式(7.17)，式(7.21a)和式(7.21b)给出答案。系统(A, B)的可控性矩阵为

$$C_x = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{7.30}$$

经过状态变换，式(7.21a)和式(7.21b)给出了新的矩阵描述形式，则可控性矩阵变为

$$C_z = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \cdots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \tag{7.31a}$$
$$= [T^{-1}B \quad T^{-1}ATT^{-1}B \cdots \quad T^{-1}A^{n-1}TT^{-1}B] \tag{7.31b}$$
$$= T^{-1}C_x \tag{7.31c}$$

由此可见，当且仅当 C_x 是非奇异时，C_z 是非奇异阵，所以得到下面结论。

系统的状态经过非奇异线性变换并不能改变系统的可控性。

下面我们再研究式(7.9)的传递函数，这次采用能观测标准形的框图来表示它，如图7.10所示。此时标准形所对应的矩阵为

$$\mathbf{A}_O = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{7.32a}$$

$$\mathbf{C}_O = [1 \quad 0], \quad D_O = 0 \tag{7.32b}$$

451

这种标准形的一个重要事实是，系统的输出通过系统矩阵 $\mathbf{A}_O$ 的系数反馈到每个系统的状态变量。

现在让我们讨论一下如果改变 -2 这个零点，系统的可控性会受到什么影响？为此，用可变零点 $-z_o$ 代替矩阵 $\mathbf{B}_O$ 中的第二个元素 2，则得到可控性矩阵为

$$\mathcal{C}_x = [\mathbf{B}_O \quad \mathbf{A}_O\mathbf{B}_O] \tag{7.33a}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -7-z_o \\ -z_o & -12 \end{bmatrix} \tag{7.33b}$$

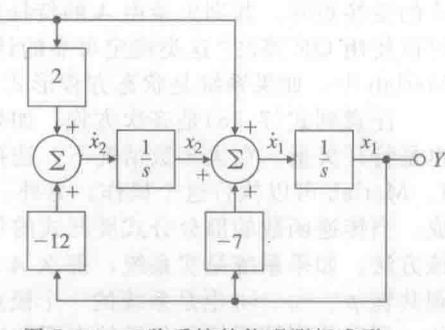


图7.10 二阶系统的能观测标准形

矩阵的行列式是 z_o 的函数为

$$\det(\mathcal{C}_x) = -12 + (z_o)(-7-z_o) = -(z_o^2 + 7z_o + 12)$$

当 $z_o=-3$ 或者 -4 时，多项式的值是零，这意味着当 z_o 取这些值时，系统失去可控性。这意味着什么呢？传递函数用参数 z_o 可以表示为

$$G(s) = \frac{s-z_o}{(s+3)(s+4)}$$

如果 $z_o=-3$ 或者 -4，则一对零极点对消，二阶系统降阶到一阶系统。比如，当 $z_o=-3$ 时，模型在 -3 处被解耦，系统的控制作用消失了。

注意，我们以式(7.9)的传递函数为例，并且给出了它的两个实现，一个是能控标准形，一个是能观标准形。能控形对于任意零点值都是能控的，而如果零点抵消任意一个极点，则观测器形式就失去了可控性。因此，即使上面两种形式都能代表相同的传递函数，但不能将一种标准形的状态变化到另外一种标准形的状态(这里是指从观测器到能控标准形)。虽然状态变换不能影响系统的能控性，但根据传递函数选择特殊的状态却可以改变可控性：

可控性是系统状态的函数并且不由传递函数决定。

此处过多的讨论可控性有些离题。至于可观性和能观标准形之间密切相关的特性将在7.7.1小节进行讨论。对于想进一步学习的读者，我们在附录WC和www.fpe7e.com中对动态系统的这些特性进行更加详细的讨论。

452

现在我们回到由式(7.14a)和式(7.14b)给出的传递函数例子中，求出例子中的传递函数模态形式。如前所述，对于有重极点的传递函数，不能总是找到它的模态形式，所以我们假设研究的系统具有不同的极点。进一步，我们假设由式(7.18a)和式(7.18b)给出的一般状态方程满足该条件。想要找到由式(7.19)定义的变换矩阵 $\mathbf{T}$ 使得变换后的式(7.21a)和式(7.22)为模态形式。这种情况下，我们假设 $\mathbf{A}$ 矩阵是对角阵，并且 $\mathbf{T}$ 由列矢量 $\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2$ 和 $\mathbf{t}_3$ 组成。在这个假设下，状态变换式(7.21a)变为

$$\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{T}$$

$$[\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3]\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2 \quad \mathbf{t}_3] \tag{7.34}$$

式(7.34)等价于下面的三个矢量-矩阵方程：

$$p_i \boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_i, \quad i = 1,2,3 \tag{7.35}$$

在矩阵代数中，式(7.35)是一个很著名的方程，该方程的解就是我们所熟知的特征矢量/特征值。注意，$\boldsymbol{t}_i$ 是矢量，$\boldsymbol{A}$ 是矩阵，p_i 是标量。矢量 $\boldsymbol{t}_i$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矢量，p_i 称为相应的特征值。因为我们早先看到模态形等价于一个部分分式展开的表达式，系统极点位于状态矩阵的对角线，很显然，这些特征值是系统的极点。将状态描述矩阵变换为模态形式的变换矩阵，其列矢量由 $\boldsymbol{A}$ 的特征矢量组成，如式(7.34)给出的三阶系统的情况。碰巧可以使用 QR 算法[㊀]这类稳定可靠的计算机算法求取某些大系统的特征值和特征矢量。在 Matlab 中，如果系统是状态方程形式，使用命令 P=eig(A)可以计算极点。

注意到式(7.35)是齐次方程，如果 $\boldsymbol{t}_i$ 是一个特征矢量，那么对于任意标量 α 来说，$\alpha\boldsymbol{t}_i$ 也是特征矢量。在大多数情况下，选择比例因子使得长度(所有元素模的平方和再开方)为 1。Matlab 可以执行这个操作。另外一个做法是，选择比例因子使得输入矩阵 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 全由 1 组成。当传递函数的部分分式展开式的每一个部分都能用能控标准形实现时，我们建议使用该方法。如果系统是实系统，那么 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都是实数，如果 $p=\sigma+\mathrm{j}\omega$ 是一个极点，则共轭 $p^*=\sigma-\mathrm{j}\omega$ 也是系统的一个极点。对于这些特征值，其对应的特征矢量也是复共轭的。可以分别使用特征矢量的实部和虚部组成变换矩阵，使得模态形是实型的，但每对复极点都对应一个 2×2 方阵。稍后，我们将看到利用 Matlab 实现这一过程，下面先看系统具有简单实极点的情况。

453

例 7.9 热系统从能控标准形变换成模态标准形

求变换矩阵使得式(7.12)的能控形矩阵变换成式(7.14)的模态形。

解答。根据式(7.34)和式(7.35)，我们首先需要找到矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 的特征矢量和特征值。取特征矢量分别为

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix}$$

用左边的特征矢量得到如下方程：

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \tag{7.36a}$$

$$-7t_{11} - 12t_{21} = pt_{11} \tag{7.36b}$$

$$t_{11} = pt_{21} \tag{7.36c}$$

将式(7.36c)代入到式(7.36b)得到

$$-7pt_{21} - 12t_{21} = p^2 t_{21} \tag{7.37a}$$

$$p^2 t_{21} + 7pt_{21} + 12t_{21} = 0 \tag{7.37b}$$

$$p^2 + 7p + 12 = 0 \tag{7.37c}$$

$$p = -3, -4 \tag{7.37d}$$

我们再次发现系统的特征值(极点)是 -3 和 -4；此外，式(7.36c)给出两个特征矢量为

$$\begin{bmatrix} 4t_{21} \\ t_{21} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3t_{22} \\ t_{22} \end{bmatrix}$$

其中：t_{21} 和 t_{22} 是任意非零比例因子。现在要选择两个比例因子使得式(7.14a)中 $\boldsymbol{B}_m$ 的两个元素都是 1. 利用 $\boldsymbol{B}_c$ 表示 $\boldsymbol{B}_m$ 的方程为 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}_m=\boldsymbol{B}_c$，且该方程的解为 $t_{21}=-1$ 和 $t_{22}=1$。因此，变换阵及其逆矩阵[㊁]分别为

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

㊀ 此算法是 Matlab 及所有其他著名的计算机辅助设计软件包的一部分。它被详细的归纳在软件包 LAPACK(参见 Anderson 等人著作，1999 年)。也可参见 Strang 于 2006 年的著作。

㊁ 为了找到一个 2×2 矩阵的逆，我们只需要互换下标为“11”和“12”的元素的符号，改变下标 11”和“12”的元素的符号，再除以矩阵的行列式值(在式(7.38)中是 1)。

根据初等矩阵乘法规则，使用由式(7.38)定义的 $\boldsymbol{T}$，则式(7.12)和式(7.14)中的矩阵具有如下关系：

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}$$
$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{T} \qquad D_{\mathrm{m}} = D_{\mathrm{c}} \tag{7.39}$$

454

这些计算可以利用下面 Matlab 语句来实现：

```
T=[4 -3; -1 1];
Am=inv(T)*Ac*T;
Bm=inv(T)*Bc;
Cm=Cc*T;
Dm=Dc;
```

下面这个例子有5个状态变量，对于手工计算来说，采用状态变量形式过于复杂。然而，对于说明计算机软件的优势而言，这是一个非常好的例子。我们使用的模型是基于幅值和时间比例都规定好的物理状态

例7.10　利用 Matlab 找磁带驱动系统的零极点

求出下面磁带驱动控制系统(见图3.50)矩阵的特征值。并且计算变换矩阵，将磁带驱动系统的方程从给定形式变换成模态标准形。系统矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & -0.35 & 0.1 & 0.1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & -0.4 & -1.4 & 0 \\ 0 & -0.03 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.40}$$

$\boldsymbol{C}_2 = [0.0 \quad 0.0 \quad 1.0 \quad 0.0 \quad 0.0]$ 为伺服电机位置输出；

$\boldsymbol{C}_3 = [0.5 \quad 0.0 \quad 0.5 \quad 0.0 \quad 0.0]$ 为读/写磁头上的位置作为输出；

$\boldsymbol{C}_{\mathrm{T}} = [-0.2 \quad -0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.0]$ 为电压输出。

$D = 0.0$

状态矢量定义为

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & (\text{主动轮上磁带位置}) \\ \omega_1 & (\text{驱动轮速度}) \\ x_3 & (\text{磁带在磁头的位置}) \\ \omega_2 & (\text{输出速度}) \\ i & (\text{主动轮电动机的输入电流}) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{C}_3$ 矩阵对应使得 x_3(磁带在读/写磁头上的位置)作为输出，而矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{T}}$ 对应将电压作为输出。

解答。用 Matlab 计算特征值可以使用如下语句：

```
P= eig(A)
```

455

结果为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -0.6371+0.6669i \\ -0.6371-0.6669i \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{bmatrix}$$

注意，系统除了一个极点在原点处以外，其他所有极点都在左半平面(LHP)。这意味着阶跃输入将导致一个斜坡输出，由此可知系统属于1型系统。

为了转换成模态形，我们利用 Matlab canon 函数，语句如下：

```
sysG = ss(A,B,C3,D);
[sysGm,TI]=canon(sysG,'modal');
[Am,Bm,Cm,Dm]=ssdata(sysGm)
```

计算结果为

$$\text{Am} = \boldsymbol{A}_{\text{m}} = \begin{bmatrix} -0.6371 & 0.6669 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.6669 & -0.6371 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5075 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9683 \end{bmatrix}$$

注意，复极点出现在 $\boldsymbol{A}_{\text{m}}$ 矩阵的左上角的 2×2 方阵中，实极点落在该矩阵的主对角线上。利用 canon 函数计算出其余结果分别为

$$\text{Bm} = \boldsymbol{B}_{\text{m}} = \begin{bmatrix} 0.4785 \\ -0.6274 \\ -1.0150 \\ -3.5980 \\ 4.9133 \end{bmatrix}$$

$$\text{Cm} = \boldsymbol{C}_{\text{m}} = [1.2569 \quad -1.0817 \quad -2.8284 \quad 1.8233 \quad 0.4903]$$

$$\text{Dm} = D_{\text{m}} = 0$$

$$\text{TI} = \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3439 & -0.3264 & 0.3439 & 0.7741 & 0.4785 \\ 0.1847 & -0.7291 & -0.1847 & 0.0969 & -0.6247 \\ -0.1844 & -1.3533 & -0.1692 & -0.3383 & -1.0150 \\ 0.3353 & -2.3627 & -0.3353 & -1.0161 & -3.5980 \\ -0.0017 & 0.2077 & 0.0017 & 0.0561 & 4.9133 \end{bmatrix}$$

利用 canon 函数计算的结果恰好是我们要求的变换矩阵的逆矩阵（见上面方程的 TI），因此只需要转化一下 Matlab 的计算结果。可用下面函数进行求逆运算：

456

$$\text{T} = \text{inv(TI)}$$

结果为

$$\text{T} = \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0.3805 & 0.8697 & -2.8284 & 1.3406 & 0.4714 \\ -0.4112 & -0.1502 & 0.0000 & -0.3402 & -0.2282 \\ 2.1334 & -3.0330 & +2.8284 & 2.3060 & 0.5093 \\ 0.3317 & 1.6776 & 0.0000 & -0.5851 & -0.2466 \\ 0.0130 & -0.0114 & -0.0000 & 0.0207 & 0.2160 \end{bmatrix}$$

利用[V，P]=eig(F)计算特征值为

$$\text{V} = \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} -0.1168+0.1925\text{j} & -0.1168-0.1925\text{j} & -0.7071 & 0.4871 & 0.5887 \\ -0.0270-0.1003\text{j} & -0.0270+0.1003\text{j} & -0.0000 & -0.1236 & -0.2850 \\ 0.8797 & 0.8797 & -0.7071 & 0.8379 & 0.6360 \\ -0.2802+0.2933\text{j} & -0.2802-0.2933\text{j} & -0.0000 & -0.2126 & -0.3079 \\ 0.0040+0.0010\text{j} & 0.0040-0.0010\text{j} & 0.0000 & 0.0075 & 0.2697 \end{bmatrix}$$

注意到实变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的前两列分别是由矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的第一列对应特征矢量的实部和虚部组成的。正是该步骤导致了 $\boldsymbol{A}_{\text{m}}$ 矩阵左上角的 2×2 方阵中出现复数根。矩阵 $\boldsymbol{V}$ 中的矢量已标准化为单位长度，这使得 $\boldsymbol{B}_{\text{m}}$ 和 $\boldsymbol{C}_{\text{m}}$ 矩阵中的元素为非标准化值。如果我们愿意，可以很容易找到变换矩阵，进而使得矩阵 $\boldsymbol{B}_{\text{m}}$ 的每个元素都为 1 或互换极点出现顺序。◀

7.4.2 从状态方程求解动态响应

研究了系统状态变量方程的结构后，现在我们转向从状态描述求解动态响应，以及找到状态描述与前面第 6 章讨论过的频率响应、零点和极点之间的关系。由式(7.18a)和

式(7.18b)给出的一般状态方程开始，考虑频域问题。对下式进行拉普拉斯变换：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{7.41}$$

得到

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}U(s) \tag{7.42}$$

这是一个代数方程。如果我们选择包含 $\boldsymbol{X}(s)$ 的项移到式(7.42)的左边，同时注意到在矩阵乘法中相乘矩阵的前后次序很重要，整理上式得到[⊖]

457

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B}U(s) + \boldsymbol{x}(0)$$

如果在方程两边左乘矩阵 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的逆，则有

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) \tag{7.43}$$

系统的输出为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + DU(s) \\ &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s) + \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + DU(s) \end{aligned} \tag{7.44}$$

该方程给出的是系统对初始条件和外部强迫输入的输出响应。整理有关 $U(s)$ 的项，并且假设零初始条件，由此得到系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + D \tag{7.45}$$

例 7.11 由状态描述得到的热系统传递函数

用式(7.45)求出由式(7.12a)和式(7.12b)所描述热系统的传递函数。

解答。系统的状态变量描述矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

根据式(7.45)计算传递函数，我们有

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

计算

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \tag{7.46}$$

然后，将式(7.46)代入到式(7.45)，得到

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -12 \\ 1 & s+7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \tag{7.47}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}}{s(s+7)+12} \tag{7.48}$$

$$= \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)} \tag{7.49}$$

这些结果也可以由如下的 Matlab 语句得到：

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

458

并且通过执行上述语句得到 num=[0 1 2]和 den=[1 7 12]，这与上面手工计算的结果是一致的。 ◀

因为式(7.45)给出的传递函数是由一般状态空间描述矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 和 D 表示的，所

⊖ 单位阵 $\boldsymbol{I}$ 是主对角线元素皆为 1，其他元素为 0 的矩阵，因此有 $\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$。

以，可以依据这些矩阵表示出系统的零点和极点。我们早就看出将状态矩阵变换为对角形式，极点会作为特征值出现在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的主对角线上。现在从系统理论的观点，考察系统暂态响应中所涉及的零极点的情况。

由第 3 章可知，传递函数 $G(s)$ 的一个极点是广义频率 s 的一个值，使得如果 $s=p_i$，那么系统在没有强迫函数 u 的情况下，可以按照 $K_i e^{p_i t}$ 对某个初始状态响应。本文中，称 p_i 为系统的自然频率或者自然模态。如果我们取状态空间式(7.18a)和式(7.18b)，且将强迫函数 u 设置为 0，则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{7.50}$$

如果假设某个(仍然未知)初始条件为

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{7.51}$$

并且假定整个状态运动行为根据同一自然频率进行的，那么状态就可以表示为 $\boldsymbol{X}(t)=e^{p_i t}\boldsymbol{x}_0$，由式(7.50)可得：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=p_i e^{p_i t}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}e^{p_i t}\boldsymbol{x}_0 \tag{7.52}$$

或者

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=p_i\boldsymbol{x}_0 \tag{7.53}$$

式(7.53)可以改写为

$$(p_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_0=0 \tag{7.54}$$

式(7.53)和式(7.54)构成了我们在式(7.35)中遇到的特征矢量/特征值的问题，在式(7.35)中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 p_i，对应的特征矢量为 $\boldsymbol{x}_0$。如果我们仅仅对特征值感兴趣，那么可以利用非零矢量 $\boldsymbol{x}_0$，当且仅当下式成立时，式(7.54)才有解：

$$\det(p_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0 \tag{7.55}$$

这些方程再次表明，传递函数的极点是系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。行列式式(7.55)为特征值 p_i 的多项式，称为特征方程。例 7.9 中，我们计算了一个能控标准形的特殊矩阵相应的特征值和特征矢量。计算此系统的极点还有另外一个方法，即求解特征式(7.55)。对于式(7.12a)和式(7.12b)所描述的系统，根据式(7.55)求解下式找到系统的极点：

459

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0 \tag{7.56a}$$

$$\det\begin{bmatrix} s+7 & 12 \\ -1 & s \end{bmatrix}=0 \tag{7.56b}$$

$$s(s+7)+12=(s+3)(s+4)=0 \tag{7.56c}$$

这再次验证了系统的极点是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由系统理论的观点，我们也可以通过状态描述矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 D 求出系统的零点。从这个角度而言，零点就是广义频率 s 的一个值，该值使得系统存在一个非零输入和状态时仍然可以得到零输出。如果输入在零频率 z_i 下是指数形式，即

$$u(t)=u_0 e^{z_i t} \tag{7.57}$$

那么输出是恒为零的，即

$$y(t)\equiv 0 \tag{7.58}$$

式(7.57)和式(7.58)的状态空间描述将变为

$$u=u_0 e^{z_i t},\quad \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0 e^{z_i t},\quad y(t)\equiv 0 \tag{7.59}$$

因此

$$\boldsymbol{x}=z_i e^{z_i t}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}e^{z_i t}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{B}u_0 e^{z_i t} \tag{7.60}$$

或

$$\begin{bmatrix} z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix}=0 \tag{7.61}$$

及

$$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+Du=\boldsymbol{C}e^{z_i t}\boldsymbol{x}_0+Du_0 e^{z_i t}\equiv 0 \tag{7.62}$$

联立式(7.61)和式(7.62)，我们得到

$$\begin{bmatrix} z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

由式(7.63)，我们可以得到，状态空间形式的系统的零点就是使式(7.63)具有非平凡解 z_i 的某个值。对于单输入单输出情况，矩阵是方阵，对于式(7.63)的解等价于如下方程的解

$$\det\begin{bmatrix} z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{bmatrix}=0 \tag{7.64}$$

例 7.12 从状态描述求解热系统的零点

计算由式(7.12)描述的热系统的零点。

解答。利用式(7.64)计算该系统的零点：

$$\det\begin{bmatrix} s+7 & 12 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=0$$

$$-2-s=0$$

$$s=-2$$

460

注意所得的结果与式(7.9)给出的传递函数的零点是一致的。这个结果可以用如下 Matlab 语句实现：

```
sysG = ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
[z,gain] = tzero(sysG)
```

并且得到 z=−2.0 和增益 gain=1 ◀

式(7.55)的特征方程和式(7.64)的零点多项式结合起来，以紧凑形式用状态描述矩阵表示传递函数为

$$G(s)=\frac{\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{bmatrix}}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})} \tag{7.65}$$

(详见附录 WB 及网址 www.fpe7e.com)，式(7.65)是用于理论研究的一个紧凑公式，其对数据误差是很敏感的。Emami-Naeini 和 Van Dooren(1982)给出了求传递函数的一种在数值上稳定的算法。通过给定传递函数，我们可以计算频率响应 $G(j\omega)$；如前所述，用式(7.54)和式(7.63)可以求出极点和零点，并依此求解出瞬态响应，详见第3章。

例 7.13 磁带驱动器的状态方程分析

求解例 7.10 磁带驱动伺服系统方程的极点、零点和传递函数。

解答。该问题有两种不同的解法。最直接的方法是用 Matlab 函数 ss2tf(状态空间传递函数)，这种方法将直接给出分子和分母多项式。该函数允许多输入多输出的情况：它的第5个参数表示用的是哪个输入。此处，我们仅有一个输入，但是仍然需要提供该参数。从电动机电流输入到伺服电动机位置输出的传递函数计算如下：

```
[N2, D2] = ss2tf(A, B, C2, D, 1),
```

这得到

```
N2 = [ 0   0   0.0000   0   0.6000   1.2000 ],
D2 = [ 1.0000   2.7500   3.2225   1.8815   0.4180   −0.0000 ].
```

类似地，对于在读/写头上的位置，传递函数多项式计算如下：

```
[N3, D3] = ss2tf(A, B, C3, D, 1),
```

由此可得

```
N3 = [ 0   −0.0000   −0.0000   0.7500   1.3500   1.2000 ],
D3 = [ 1.0000   2.7500   3.2225   1.8815   0.4180   −0.0000 ].
```

461

最后，电压的传递函数为

```
[NT, DT] = ss2tf(A, B, CT, D, 1),
```

得到

```
NT = [ 0  -0.0000  -0.1500  -0.4500  -0.3000  0.0000 ],
DT = [ 1.0000  2.7500  3.2225  1.8815  0.4180  -0.0000 ].
```

现在检验一下用这种方法得到的系统极点和零点的值是否与其他方法得到的结果一样。为了找到多项式 D3 的根，我们利用 Matlab 的 roots 函数，有

$$\text{roots(D3)} = \begin{bmatrix} -0.6371+0.6669\text{i} \\ -0.6371-0.6669\text{i} \\ -0.9683 \\ -0.5075 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

与例 7.10 相比，结果是一样的。

那么零点是否也相同呢？现在通过求解分子多项式的根来求解。多项式 N3 的根求解如下：

$$\text{roots(N3)} = \begin{bmatrix} -0.76667+2.3727\times 10^7\text{i} \\ -0.76667-2.3727\times 10^7\text{i} \\ -0.9000+0.8888\text{i} \\ -0.9000-0.8888\text{i} \end{bmatrix}$$

我们注意到前面的两个根是以 10^7 的数量级的形式给出的，这看起来与多项式给定的值不相符。这是因为 Matlab 把多项式中非常小的首项作为真实值，因此引入了额外根的概念。这些额外根在无穷远处有许多实际用途。真正的零点是通过下面语句求得：

$$\text{N3R}=\text{N3}(4:6)$$

将多项式在影响比较大的值处截断，由此获得

$$\text{N3R} = [0.7499 \quad 1.3499 \quad 1.200]$$

$$\text{roots(N3R)} = \begin{bmatrix} -0.9000+0.8888\text{i} \\ -0.9000-0.8888\text{i} \end{bmatrix}$$

另一种方法是分别计算极点和零点。如果需要，可以将这些零极点组合成传递函数。极点通过例 7.10 中的 eig 函数求得：

$$\text{P} = \begin{bmatrix} -0.6371+0.6669\text{i} \\ -0.6371-0.6669\text{i} \\ 0.0000 \\ -0.5075 \\ -0.9683 \end{bmatrix}$$

462

对式(7.63)的等价形式利用函数 tzero(传输零点)可以计算出零点。零点值取决于系统使用的是哪个输出，下面分别给出不同输出时的计算情况。当磁带在伺服电动机上的位置作为输出时，执行下述语句：

```
sysG2= ss(A,B,C2,D)
[ZER2,gain2]= tzero(sysG2)
```

得到

$$\text{ZER2}=-2.0000,\ \text{gain2}=0.6$$

将磁带在读/写头的位置作为输出时，执行下述语句：

```
sysG3= ss(A,B,C3,D)
[ZER3,gain3]= tzero(sysG3)
```

$$ZER3=\begin{bmatrix}-0.90000+0.8888i\\-0.90000-0.8888i\end{bmatrix},gain3=0.75$$

我们注意到这些结果与前面用分子多项式N3求得的值是相同的。最后，当电压作为输出时，执行下面语句：

sysGT= ss(A,B,CT,D)
[ZERT,gainT]= tzero(sysGT)

可以得到

$$ZERT=\begin{bmatrix}0\\-1.9999\\-1.0000\end{bmatrix},\ gainT=-0.15$$

根据这些结果可以写出传递函数，例如，对位置 x_3 的传递函数为

$$\begin{aligned}G(s)&=\frac{X_3(s)}{E_1(s)}\\&=\frac{0.75s^2+1.35s+1.2}{s^5+2.75s^4+3.22s^3+1.88s^2+0.418s}\\&=\frac{0.75(s+0.9\pm0.8888j)}{s(s+0.507)(s+0.968)(s+0.637\pm0.667j)}\end{aligned}\tag{7.66}$$ ◀

7.5 全状态反馈控制律设计

如本章概述中所提，状态空间设计法的一个显著特征是它由一系列独立的步骤组成。第一步是确定控制律，将在7.5.1小节中进行介绍。确定控制律是为了给闭环系统分配一组极点，使其在上升时间和暂态响应的其他性能指标方面都能满足所期望的动态响应。在7.5.2小节中，我们将介绍具有全状态反馈的参考输入。在7.6节中将介绍求取极点以获得理想设计的过程。 463

第二步——当全部状态不可测时很有必要——设计一个估计器(有时称为观测器)，当给出式(7.18b)的各个系统量时，观测器可以计算全状态矢量的估计值。7.7节将介绍估计器的设计。

第三步是将控制律和估计器结合起来。图7.11给出了控制律与估计器如何结合在一起，以及这种结合如何取代前面提到的补偿器。在这一步中，控制律的计算是基于估计器状态而不是实际状态。7.8节将解释这种取代的合理性，同时也说明控制律与观测器结合得到的闭环极点位置与将控制器和观测器分开设计所得到的闭环极点位置是相同的。

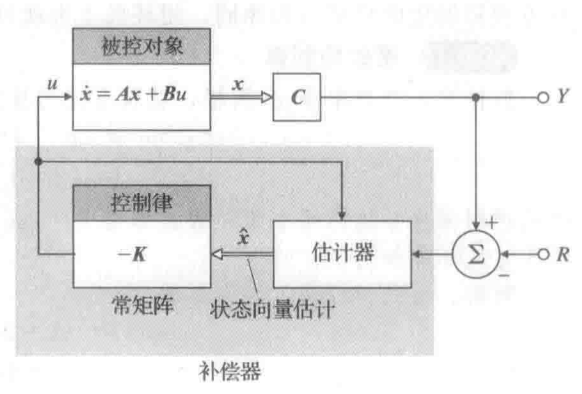


图7.11 状态空间示意图

第四步，即最后一步是在状态空间设计法中引入参考输入，这种方式使得被控对象的输出能够跟踪具有可接受的上升时间，超调量和调整时间的外部指令信号。在此步设计中，闭环系统极点都已经选定，并且设计者关心的是整个传递函数的零点。图7.11表明，指令输入 r 引入的相对位置与变换设计法中相同；然而，在7.9节中，我们将介绍如何在另外一个位置引入参考输入，以得到不同的零点和(通常)更好的控制效果。

7.5.1 寻找控制律

前文提到，状态空间设计法的第一步是找到状态变量线性组合的反馈控制律，即 464

$$u = -\boldsymbol{Kx} = -[K_1 \quad K_2 \quad \cdots \quad K_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{7.67}$$

我们假设对于反馈而言，状态矢量的全部分量都可获得，这就是为什么称其为“全状态”反馈。在实际应用中，这种假设是不现实的；而且，有经验的设计者知道其他设计方法并不需要如此多的传感器。假设所有的状态变量均可获得，以此来保证第一步设计能继续。

式(7.67)表明系统在状态矢量反馈通道上具有一个常矩阵，如图7.12所示。一个 n 阶系统将有 n 个反馈增益，即，K_1，…，K_n，并且由于系统有 n 个根，因此可能存在足够多的自由度使得通过选择合适的 K_i 值来任意配置所期望的根的位置。这种自由度与根轨迹设计法形成了鲜明的对比。在根轨迹设计法中，仅有一个参数且闭环极点被限定在根轨迹线上。

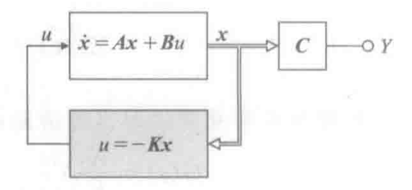


图 7.12 用于控制律设计的假定系统

将式(7.67)给出的反馈律代入式(7.18b)所描述的系统中，得到

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{BKx} \tag{7.68}$$

该闭环系统的特征方程为

$$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})] = 0 \tag{7.69}$$

当计算得到一个 n 阶多项式，其中包含增益 K_1，…，K_n 时，控制律设计包括挑选增益 $\boldsymbol{K}$ 使得式(7.69)的根在期望的位置上。在选择期望根的位置时有可能需要设计者进行迭代计算，因此选择期望根的位置并不科学。例7.14～例7.16及7.6节中考虑了根位置选择中遇到的问题。现在，我们假设期望的根的位置是已知的，即

$$s = s_1, s_2, \cdots, s_n$$

那么，期望的相应(控制)特征方程是

$$\alpha_c(s) = (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) = 0 \tag{7.70}$$

因此，$\boldsymbol{K}$ 中要求的元素就可通过匹配式(7.69)和式(7.70)的系数求得。这就迫使系统的特征方程和期望的特征方程相同，闭环极点也就可以在期望的位置上了。

465

例 7.14 摆的控制律

假设有一个频率是 ω_0 的摆，其状态空间描述为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{7.71}$$

寻找控制律将系统的两个闭环极点都置为 $-2\omega_0$，也就是说，希望将自然频率加倍，将阻尼比 ζ 从0增加到1。

解答。由式(7.70)，我们知道

$$\alpha_c(s) = (s + 2\omega_0)^2 \tag{7.72a}$$

$$= s^2 + 4\omega_0 s + 4\omega_0^2 \tag{7.72b}$$

式(7.69)告诉我们

$$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})] = \det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[K_1 \quad K_2]\right)\right\}$$

或者

$$s^2 + K_2 s + \omega_0^2 + K_1 = 0 \tag{7.73}$$

令式(7.72b)和式(7.73)中 s 的同次幂系数相等，满足如下方程组：

$$K_2 = 4\omega_0$$

$$\omega_0^2 + K_1 = 4\omega_0^2$$

因此

$$K_1 = 3\omega_0^2$$
$$K_2 = 4\omega_0$$

所以，更简洁的控制律形式为

$$\boldsymbol{K} = [K_1 \quad K_2] = [3\omega_0^2 \quad 4\omega_0]$$

图 7.13 给出了闭环系统对初始条件 $x_1=1.0$，$x_2=0.0$ 及 $\omega_0=1$ 的响应曲线。当系统的两个根都为 $s=-2$ 时，可以得到非常理想的阻尼响应曲线。利用 Matlab 命令 impulse 可以生成该曲线。◀

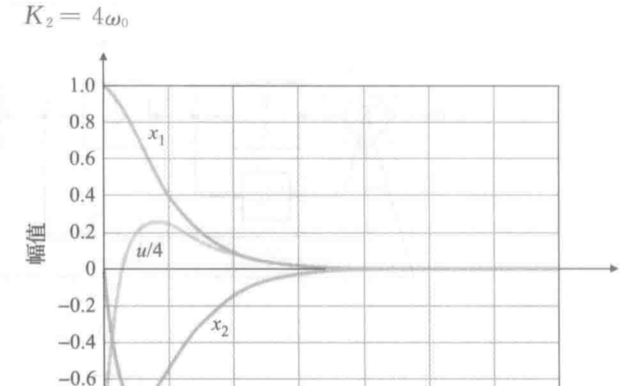


图 7.13 带全状态反馈的无阻尼振荡器的脉冲响应 $\omega_0=1$

当系统的阶数高于 3 时，使用例 7.14的方法计算增益就会非常繁琐。然而，当状态变量方程具有特殊的“标准”形式时，这对于求解增益的计算过程又变得极其简单了。便于控制规律设计的一种标准形是能控标准形，在 7.4.1 小节曾讨论过。考虑如下的一个三阶系统[⊖]：

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u \tag{7.74}$$

其相应的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{b(s)}{a(s)} \tag{7.75}$$

设引入一个辅助变量(称为部分状态)ξ，它与 $a(s)$ 和 $b(s)$ 的关系如图 7.14a 所示。从 U 到 ξ 的传递函数为

$$\frac{\xi(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \tag{7.76}$$

或者

$$\dddot{\xi} + a_1\ddot{\xi} + a_2\dot{\xi} + a_3\xi = u \tag{7.77}$$

将式(7.77)重新整理为

$$\dddot{\xi} = -a_1\ddot{\xi} - a_2\dot{\xi} - a_3\xi + u \tag{7.78}$$

则很容易画出与之对应的框图。累加和在图 7.14b 中体现出来，其中方程右边的每个 ξ 是通过 $\dddot{\xi}$ 顺序积分得到的。为了求得输出，我们再回到图 7.14a 中，并注意到：

$$Y(s) = b(s)\xi(s) \tag{7.79}$$

这意味着，有

$$y = b_1\ddot{\xi} + b_2\dot{\xi} + b_3\xi \tag{7.80}$$

我们再选取积分器的输出，将它们与$\{b_i\}$中相应的元素相乘，并且利用一个加法器可以得到式(7.74)等号右边的输出式，如图 7.14c 所示。在这种情况下，所有反馈环都回到输入或者“控制”变量的施加点处，因此这种形式成了 7.4.1 小节所讨论过的能控标准形。通过信号流图的梅森规则或者基本的框图法，可以将该结构化简，结果表明，该系统图的传递函数即为 $G(s)$。

466 ~ 467

取已编号的三个积分器的输出作为状态，通常从左边起，即

$$x_1 = \ddot{\xi}_1, \quad x_2 = \dot{\xi}, \quad x_3 = \xi \tag{7.81}$$

⊖ 该研究完全适用于高阶系统。

a)

b)

c)

图 7.14 能控标准形的推导

我们得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dddot{\xi} = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + u\\ \dot{x}_2 &= x_1\\ \dot{x}_3 &= x_2\end{aligned} \tag{7.82}$$

现在，可以写出描述能控标准形的一般矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.83a}$$

468

$$\boldsymbol{C}_c = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad b_n], \qquad D_c = 0 \tag{7.83b}$$

这个系统矩阵的特殊结构称为上相伴形，因为特征方程为

$$a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_n$$

该项系数为 1 的“相伴形”多项式各项系数就是系统矩阵 $\boldsymbol{A}_c$ 的第一行元素。如果计算闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}_c - \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{K}_c$，则可得

$$\boldsymbol{A}_c - \boldsymbol{B}_c\boldsymbol{K}_c = \begin{bmatrix} -a_1 - K_1 & -a_2 - K_2 & \cdots & \cdots & -a_n - K_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.84}$$

通过直观地比较式(7.83a)和式(7.84)，可知闭环系统的特征方程为

$$s^n+(a_1+K_1)s^{n-1}+(a_2+K_2)s^{n-2}+\cdots+(a_n+K_n)=0 \tag{7.85}$$

因此，如果由期望极点位置能够得到如下特征方程：

$$\alpha_c(s)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\cdots+\alpha_n=0 \tag{7.86}$$

那么，所需反馈增益可以通过比较式(7.85)和式(7.86)二式的系数得到：

$$K_1=-a_1+\alpha_1,\quad K_2=-a_2+\alpha_2,\cdots,K_n=-a_n+\alpha_n \tag{7.87}$$

至此，我们得到算法的设计步骤：给定一个由任意$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$描述的$n$阶系统和一个期望的$n$阶首一特征多项式$\alpha_c(s)$，(1)取状态变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$，把$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$变换成能控标准形$(\boldsymbol{A}_c,\boldsymbol{B}_c)$；(2)通过观察并利用式(7.87)求出控制增益给出控制律$u=-\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{z}$；(3)由于这是相对于能控形求出的增益，因此，必须将增益转换成相对初始状态的增益，从而得到$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{T}^{-1}$。

另一种变换方法是阿克曼(Ackermann)公式(1972年)。该公式由三步过程组成：转化为能控形$(\boldsymbol{A}_c,\boldsymbol{B}_c)$，求解增益，再转换到下面这种非常紧凑的形式：

$$\boldsymbol{K}=[0\quad\cdots\quad 0\quad 1]\boldsymbol{C}^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{A}) \tag{7.88}$$

使得

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\quad\cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \tag{7.89}$$

其中：$\boldsymbol{C}$是7.4节中的可控性矩阵；n为系统的阶数和状态变量的个数；$\alpha_c(\boldsymbol{A})$是由下式定义的矩阵：

$$\alpha_c(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+\alpha_1\boldsymbol{A}^{n-1}+\alpha_2\boldsymbol{A}^{n-2}+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{I} \tag{7.90}$$

其中：α_i是期望特征多项式(7.86)的系数。这里需要注意式(7.90)是矩阵方程。对于求阿克曼公式的导数，可参考附录WD及www.fpe7e.com。

469

例7.15 无阻尼振荡器的阿克曼公式

(1) 使用阿克曼公式求解例7.14中无阻尼振荡器的增益。

(2) 取$\omega_0=1$，用Matlab验证计算结果。

解答。

(1) 期望的特征方程为$\alpha_c(s)=(s+2\omega_0)^2$因此，期望特征多项式的系数为

$$\alpha_1=4\omega_0,\quad \alpha_2=4\omega_0^2$$

代入到式(7.90)得

$$\alpha_c(\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}-\omega_0^2 & 0\\ 0 & -\omega_0^2\end{bmatrix}+4\omega_0\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}+4\omega_0^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7.91a}$$

$$=\begin{bmatrix}3\omega_0^2 & 4\omega_0\\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2\end{bmatrix} \tag{7.91b}$$

能控性矩阵为

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

由此得到

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{7.92}$$

最后，将式(7.92)和式(7.91a)代入式(7.88)，得到

$$\boldsymbol{K}=[K_1\quad K_2]$$

$$=[0\quad 1]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\omega_0^2 & 4\omega_0\\ -4\omega_0^3 & 3\omega_0^2\end{bmatrix}$$

因此，

$$\boldsymbol{K}=[3\omega_0^2\quad 4\omega_0]$$

这与之前我们得到的结果是一样的。

(2) Matlab 语句如下。

```
wo = 1;
A = [0 1;-wo*wo 0];
B = [0;1];
pc = [-2*wo;-2*wo];
K = acker(A,B,pc)
```

470

得到 $\boldsymbol{K}=[3 \quad 4]$，这与手工计算结果一样。◀

正如前面提到的，可控性矩阵的计算数值精度很差，这使得我们将注意力转移到阿克曼公式上去。式(7.88)在 Matlab 中可用 acker 函数来实现，可用该式对状态数目不多($\leqslant 10$)的单输入单输出系统进行设计。对于更复杂的情况，可以找到更可靠的公式，而这个公式可在 Matlab 中用 place 函数实现。关于 place 函数有一个适当的限制条件，因为 place 函数是建立在分配闭环特征矢量的基础上的，所以期望的闭环极点不可以重叠；即极点必须是不相同的[⊖]，但是对于 acker 函数就没有这样的限制条件。

实际上，我们可以用状态反馈将系统极点转移到任意期望的位置上，这对控制系统设计具有非常显著的效果。本节研究结果表明，如果能把$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$转换成能控形$(\boldsymbol{A}_c, \boldsymbol{B}_c)$，那么实现上述转移是可能的，反之若系统能控就可以将$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$变换成$(\boldsymbol{A}_c, \boldsymbol{B}_c)$。系统不可控的情况很少见，但如果系统不可控，就不能找到产生任意极点位置的控制律。不可控系统的某些模态或子系统不受控制律的影响。这通常是指，系统中的某些部分在物理意义上没有与输入连接上。例如，具有不同极点的系统，如果在它的模态标准形中矩阵 $\boldsymbol{B}_m$ 有一个零元素，那么状态矢量中就有一个模态没有连接到系统的输入上。从理想的物理角度来认识受控系统将有碍于不可控系统的控制器设计。如前所述，虽然可以用代数判据对可控性进行判别，但是，没有任何数学判据可以取代控制工程师对物理系统的理解。实际情况通常是这样的，每一个状态在一定程度上都是可控的，而用数学判据表明系统是可控时，某些状态的可控性非常弱，以至于对这些状态进行的控制设计实际上是毫无意义的。

飞机控制就是某些状态为弱可控性的一个很好的例子。俯仰角运动 $\boldsymbol{x}_p$ 主要受升降舵 δ_e 的影响，同时也轻微地受横摇运动 $\boldsymbol{x}_r$ 的影响。而横摇运动本质上只受副翼 δ_a 的影响。这些量之间的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_p \\ \dot{\boldsymbol{x}}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_p & \varepsilon \\ 0 & \boldsymbol{A}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_p \\ \boldsymbol{x}_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_p & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_e \\ \delta_a\end{bmatrix} \tag{7.93}$$

其中，由微小元素 ε 构成的矩阵表示从横摇运动到俯仰运动的弱耦合。该系统的可控性数学判据表明副翼和升降舵是能控制俯仰翼运动(即高度)的。但是，试图用副翼横摇飞行器来控制飞机的高度是不现实的。

下面再举一例来说明用状态反馈进行极点配置的一些特点，以及可控性丧失对该过程的影响。

471

例 7.16 零点位置如何影响控制律

式(7.32a)描述了一个特殊的热力系统，该式为具有零点 $s=z_0$ 能观标准形。

(1) 求出将该系统的极点配置到多项式 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$ 的根的位置上所需的状态反馈增益(也即极点为 $-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$)。

(2) 当选取参数值为 $z_0=2$，$\zeta=0.5$，以及 $\omega_n=2\text{rad/s}$ 时，利用 Matlab 重新计算增益值。

解答。

(1) 状态描述矩阵为

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}-7 & 1 \\ -12 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix}1 \\ -z_0\end{bmatrix}$$

⊖ 可以通过将重极点移动一个很小的量来区分克服这一限制。

$$C_0 = [1 \quad 0], \qquad D_0 = 0$$

首先将这些矩阵代入到式(7.69)得到用未知增益和零点位置表示的闭环特征方程：

$$s^2 + (7 + K_1 - z_0 K_2)s + 12 - K_2(7z_0 + 12) - K_1 z_0 = 0$$

然后，令该方程与期望特征方程相等，得到如下方程组

$$K_1 - z_0 K_2 = 2\zeta\omega_n - 7$$

$$-z_0 K_1 - (7z_0 + 12)K_2 = \omega_n^2 - 12$$

解这些方程得

$$K_1 = \frac{z_0(14\zeta\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\zeta\omega_n - 7)}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}$$

$$K_2 = \frac{z_0(7 - 2\zeta\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)}$$

(2) 利用如下的 Matlab 语句：

```
Ao = [-7 1;-12 0];
zo = 2;
Bo = [1;-zo];
pc = roots([1 2 4]);
K = place(Ao,Bo,pc)
```

可以得到的解为 $\boldsymbol{K}=[-3.80 \quad 0.60]$这与手工计算的结果一致。如果零点与某个开环系统的极点的位置很接近，即 $z_0=-2.99$，则有 $\boldsymbol{K}=[2052.5 \quad -688.1]$。 ◀

通过这个例子可以得到两个重要的结论。第一个是当零点 z_0 接近-3 或-4 时增益增大，而-3 和-4 正是使系统丧失可控性的点。换言之，当可控性几乎丧失时，系统的控制增益就会变得很大。

472

可控性丧失时，系统必须更加努力工作来实现控制。

除了可控性之外，任何一个执行器都还具有动态范围限制以及饱和度的限制。因此，即使一个系统是可控的，可将其极点配置到任意位置，也有些极点的位置将会驱动执行器达到饱和，而这些极点位置不是我们所期望的。

这个例子给出的第二个重要的结论是，当由 ω_n 给出的期望闭环带宽增大时，K_1 和 K_2 也随之变大。由此我们可以得到。

把极点移动一长段距离需要很大的增益。

有了这些结论，我们进一步讨论如何从总体上选择期望极点的位置。在开始研究这个主题之前，通过说明如何将参考输入加到这类系统上，以及得到的响应有何特点来完成全状态反馈设计。

7.5.2 引入参考输入用于全状态反馈

到目前为止，控制律已由式(7.67)或 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 给出。为了研究利用极点配置设计的系统对输入指令信号的暂态响应，必须将参考输入引入到系统中。这可以用一种简单的方法实现，即将控制律改为 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+r$。然而，这种系统对于阶跃信号将产生一个非零的稳态误差。修正这一问题的方法是计算得到零输出误差的稳态值和控制输入的稳态值，然后令它们取这些值。如果状态和控制输入的期望终值分别为 $\boldsymbol{x}_{ss}$和 u_{ss}，则新的控制公式为

$$u = u_{ss} - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{ss}) \tag{7.94}$$

这样，当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{ss}$(无误差)时，$u=u_{ss}$。为了挑选正确的终值，必须求解方程，使得系统对于任意的常值输入都能得到零稳态误差。系统的微分方程具有如下的标准形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{7.95a}$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + Du \tag{7.95b}$$

在恒稳态中，式(7.95a)和式(7.95b)可化简为

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{ss} + \boldsymbol{B}u_{ss} \tag{7.96a}$$

$$y_{ss} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{ss} + Du_{ss} \tag{7.96b}$$

473

想要求解对于任意数值的 r_{ss}，都有 $y_{ss}=r_{ss}$ 成立的值。为此，令 $\boldsymbol{x}_{ss}=\boldsymbol{N}_x r_{ss}$ 并且 $u_{ss}=N_u r_{ss}$。通过这些替换可将式(7.96)写成一个矩阵方程；消去常因子 r_{ss}，得到如下的增益方程：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_x\\ N_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{bmatrix} \tag{7.97}$$

通过这个方程可求得 $\boldsymbol{N}_x$ 和 N_u 为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_x\\ N_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & D\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{bmatrix}$$

有了这些值，就有了引入参考输入的前提条件，使得系统对阶跃输入能产生零稳态误差：

$$u=N_u r-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{N}_x r) \tag{7.98a}$$

$$=-\boldsymbol{Kx}+(N_u+\boldsymbol{KN}_x)r \tag{7.98b}$$

括号内的 r 的系数为一个预先计算出来的常值。用符号 $\overline{N}$ 表示，即

$$u=-\boldsymbol{Kx}+\overline{N}r \tag{7.99}$$

系统框图如图 7.15 所示。

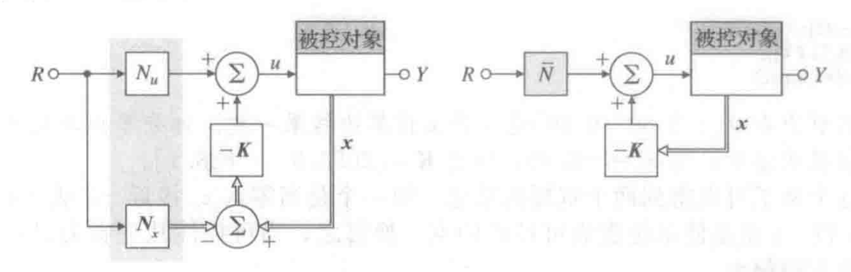


图 7.15 引入参考输入用于全状态反馈框图

例 7.17 引入参考输入

对于在 x_1 处引入的阶跃指令信号，计算产生零稳态误差所需的增益，并针对例 7.14 中的振荡器画出当 $\omega_0=1$ 时所对应的单位阶跃响应。

解答。将式(7.71)的矩阵(因为 $y=x_1$，所以 $\omega_0=1$，$\boldsymbol{C}=[1\quad 0]$)代入式(7.97)，得到

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_x\\ N_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{7.100}$$

解为(在 Matlab 中 $x=a\backslash b$，其中 a，b 分别为左侧和右侧的矩阵)

$$\boldsymbol{N}_x=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$N_u=1$$

对于给定的控制律，有

$$\boldsymbol{K}=[3\omega_0^2\quad 4\omega_0]=[3\quad 4]$$

$$\overline{N}=N_u+\boldsymbol{KN}_x=4 \tag{7.101}$$

相应的阶跃响应曲线如图 7.16 所示(利用 Matlab 中的 step 函数)。◀

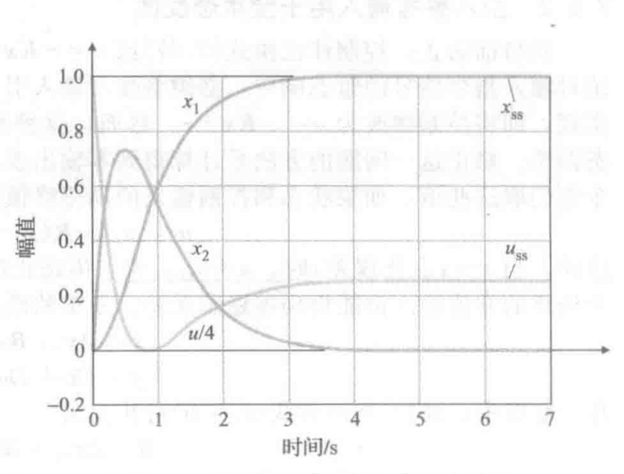


图 7.16 振荡器对参考输入的阶跃响应

值得注意的是，控制律由式(7.98b)和式(7.99)给出。虽然这些表达式在理论上是等价的，但是在实际中它们是有差异的，式(7.98b)比式(7.99)对参数误差具有更强的鲁棒性，尤其是被控对象有一个极点在原点位

置，且系统为1型时。下面这一例子非常清晰的说明了这一差异。

例 7.18 1型系统的参考输入：直流电动机

对于例5.1中的直流电动机，计算引入一个对阶跃信号产生零稳态误差的参考输入所需的输入增益，用矩阵描述状态变量形式：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\qquad D=0$$

假设状态反馈增益为$[K_1\quad K_2]$

解答。将本例的系统矩阵代入求解输入增益的式(7.97)，解为

$$\boldsymbol{N}_x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$N_u=0$$

$$\overline{N}=K_1$$

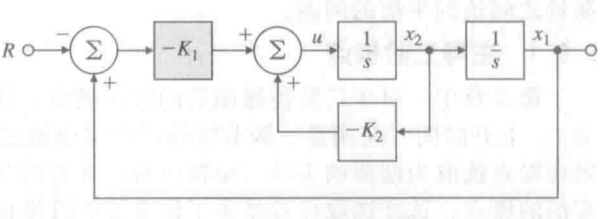
用$\boldsymbol{N}_x$和N_u[式(7.98b)]表示的控制律简化为

$$u=-K_1(x_1-r)-K_2x_2$$

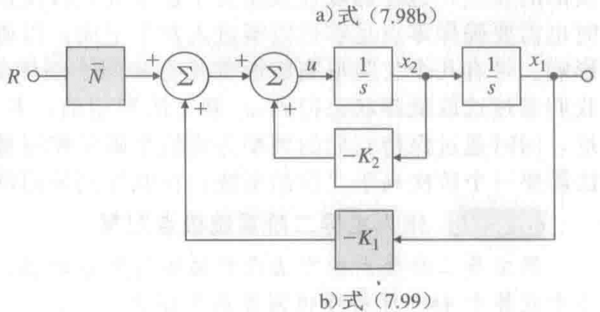
而用$\overline{N}$[式(7.99)]所表示的控制律变为

$$u=-K_1x_1-K_2x_2+K_1r$$

图7.17给出了每一个控制方程所对应的系统框图。式(7.99)对应的框图如图7.17b所示，必须将输入乘上一个增益$K_1(=\overline{N})$，且K_1应当恰好等于反馈通路中的增益。如果这两个增益匹配得不准确，将会产生稳态误差。另一方面，式(7.98b)的框图如图7.17a所示，在参考输入和第一个状态的差值处仅用一个增益，即使这个增益稍微存在偏差，也会得到零稳态误差。图7.17a所示的系统比图7.17b所示的系统具有更强的鲁棒性。



a)式(7.98b)



b)式(7.99)

图7.17 引入参考输入的两种结构

在适当的位置加入参考输入，则闭环系统的输入为r，输出为y。从状态描述中可知，系统的极点为闭环系统矩阵$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$的特征值。为了计算闭环系统的暂态响应，必须知道从$r$到$y$的传递函数的闭环零点所在的位置。将式(7.64)应用到闭环描述中可以求得零点，假设闭环系统从输入u到输出y没有直接的通路，即$D=0$。则零点为满足下式的s的值：

$$\det\begin{bmatrix}s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}) & -\overline{N}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}=0 \tag{7.102}$$

474~476

利用行列式的两个基本性质化简式(7.102)。首先，将行列式的最后一列除以标量$\overline{N}$，行列式值为零的点保持不变。然后，将行列式的最后一列乘上$\boldsymbol{K}$再加到第一(方框)列上，行列式的值保持不变，这样就可以消去$\boldsymbol{BK}$。则求解零点的矩阵方程可化简为

$$\det\begin{bmatrix}s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}=0 \tag{7.103}$$

在应用反馈之前，式(7.103)与式(7.64)所求得的被控对象的零点是相同的。由此得出一个重要的结论：按式(7.98b)或式(7.99)加入全状态反馈时，系统的零点并未因反馈的加入而改变。

7.6　为良好设计选取极点位置

极点配置方法的第一步是确定闭环极点的位置。在选取极点的位置时，要时刻谨记所要求的控制量与开环极点通过反馈被移动了多远的距离密切相关，这对设计非常有益。此外，当零点与极点的位置很接近时，系统可能是近似不可控的，从7.5节可知，移动这些极点需要很大的控制增益，从而需要很大的控制量；然而，设计者可以将需要的控制量考虑进来进行综合选择。因此，极点配置原则旨在修正开环响应的不理想的特性，以及避免大幅增加带宽或由于移动在零点附近的极点而产生的作用。与不考虑初始开环零极点位置来任意挑选所有极点的原则相比，该原则允许有较小的增益，进而允许使用较小的控制执行器。

本节讨论有助于极点选取过程的两种方法。第一种方法——主导二阶极点——用于处理极点选取而不考虑所选取的极点对控制量的影响；然而，设计者可将控制量考虑进去综合选择。第二种方法(称为最优控制，或对称根轨迹设计)特别注重在良好的系统响应与控制量之间达到平衡的问题。

7.6.1　主导二阶极点

第3章中，对于二阶传递函数的阶跃响应，其复极点的无阻尼自振频率为ω_n、阻尼比为ζ。上升时间、超调量、调节时间可直接由极点的位置推导出来。对于高阶系统，可将闭环极点选取为期望的主导二阶极点对，并且将其余的极点选取为与过阻尼状态具有相应实部的极点，这样选取极点是为了使系统能够模拟二阶响应，并具有较合理的控制量。同时也需要确保零点足够远以至进入左半平面，以避免它们对二阶系统的性能产生任何显著影响。带有几个欠阻尼高频振荡状态和两个刚体低频状态的系统就符合这一原则。在此，我们通过选取低频状态得到ω_n和ζ的期望值，并且选取其余的极点来增加高频状态的阻尼，同时通过保持它们的频率为常值来确保控制量的最小化。显然，为了说明这一控制方法需要一个阶次高于二阶的系统；在此我们采用例7.10中的磁带驱动伺服电动机为例。

477

例7.19　作为主导二阶系统极点配置

用主导二阶极点的方法设计磁带伺服电动机，满足超调量小于或等于5%，上升时间小于或等于4s。保持峰值强度尽可能低。

解答。从如图3.19所示的二阶暂态响应曲线可以看出，阻尼比$\zeta=0.7$满足超调量的要求，由这一阻尼比以及上升时间为4s可知自然频率为1/1.5。系统总共有5个极点，因此其他的三个极点需要配置在主导极点对的左边很远处；对于我们的目标而言，“很远处”意味着由快速极点引起的暂态过程应该在由主导极点引起的暂态响应过程完成之前结束。并且我们假设这个距离为各个无阻尼自然频率的4倍就足够了。基于这些考虑，期望的极点可由下式给出：

$$pc=[-0.707+0.707*j;-0.707-0.707*j;-4;-4;-4]/1.5 \tag{7.104}$$

利用这些期望的极点，针对例7.10中的矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$以及式(7.67)使用函数acker，可以求出控制增益

$$\boldsymbol{K}_2=[8.5123\quad 20.3457\quad -1.4911\quad -7.8821\quad 6.1927] \tag{7.105}$$

这些结果可由Matlab语句实现：

```
A = [0 2 0 0 0;-.1 -.35 .1 .1.75;0 0 0 2 0;.4 .4 -.4 -1.4 0;
    0 -.03 0 0 -1];
B = [0;0;0;0;1];
pc = [-.707+.707*j;-.707-.707*j;-4;-4;-4]/1.5;
K2 = acker(A,B,pc)
```

本例题和另外一个设计(将在7.6.2小节中讨论)的阶跃响应和相应的电压图分别由图7.18和图7.19给出。由图可知，上升时间约为4s，超调量约为5%，均符合要求。

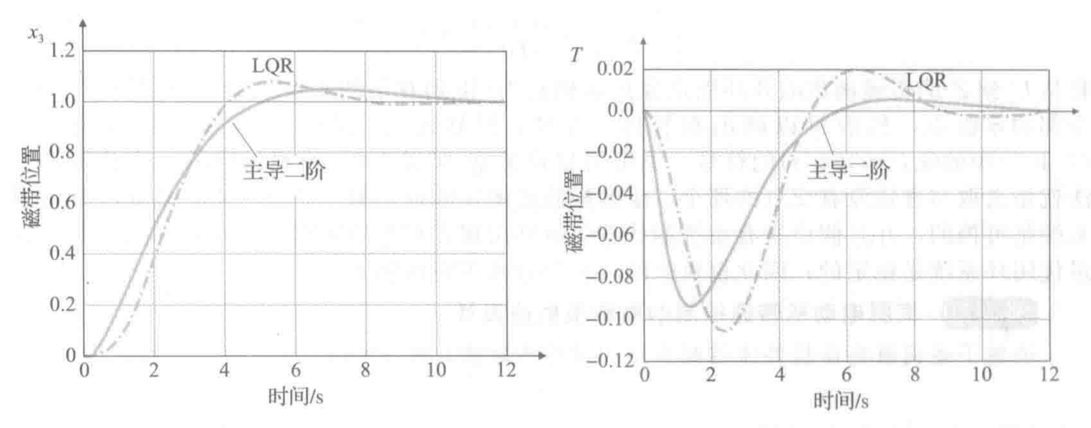


图 7.18 磁带伺服电动机的阶跃响应　　图 7.19 磁带伺服电动机阶跃响应的电压曲线

因为该设计过程是逐步迭代的，选取极点仅仅是第一步，接下来需要对所选取的极点进行进一步的修正，使其尽可能精确的满足指标要求。◀

本例中，我们首次尝试就恰好找到了适当的极点位置。

7.6.2 对称根轨迹(SRL)

线性控制系统中一个非常有效且广泛使用的方法是，最优线性二次调节器(LQR)。LQR 问题的简化描述即为寻找一个控制律使得以下性能指标：

478 ~ 479

$$\mathcal{J}=\int_0^{+\infty}[\rho z^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t \tag{7.106}$$

对如下的系统最小：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{B}u \tag{7.107a}$$

$$z=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x} \tag{7.107b}$$

其中：式(7.106)中的 ρ 为设计者选取的权系数。值得注意的是，使得$\mathcal{J}$最小化的控制律由下式的线性状态反馈给出：

$$u=-\boldsymbol{Kx} \tag{7.108}$$

这里，$\boldsymbol{K}$ 的最优值为能使闭环极点配置在如下对称根轨迹(SRL)方程(1980 年，凯拉斯(Kailath))的稳定根(都在 LHP)位置上的 $\boldsymbol{K}$ 值：

$$1+\rho G_0(-s)G_0(s)=0 \tag{7.109}$$

其中：G_0 为从 u 到 z 的开环传递函数：

$$G_0(s)=\frac{Z(s)}{U(s)}=\boldsymbol{C}_1(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{N(s)}{D(s)} \tag{7.110}$$

注意，这就是在第 5 章中讨论过的关于参数 ρ 的根轨迹问题，在性能指标方程(7.106)中参数 ρ 权衡了(跟踪误差)z^2 对于被控量 u^2 的相对损耗。同样可以看出，s 与 $-s$ 以同样的方式影响式(7.109)，因此，对于式(7.109)的任意一个根 s_0，也必将有一个根 $-s_0$。我们称这样所得到的根轨迹为对称根轨迹，因此位于左半平面的轨迹在右半平面将有一镜像；即根轨迹关于虚轴对称。所以，我们通过先选取矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 来选取最优闭环极点，$\boldsymbol{C}_1$ 决定了跟踪误差，且设计者希望跟踪误差保持为很小的值，然后选取 ρ，确保跟踪误差以及控制量的重要性相平衡。注意将输出选取为跟踪误差而不需要选择对象传感器输出。这就是式(7.107)中的输出用 z 表示而不用 y 表示的原因。

从式(7.109)的解中选取一组稳定的极点得到期望的闭环极点，然后将这些极点应用在极点配置公式中，例如阿克曼公式(式(7.88))，计算得到 $\boldsymbol{K}$。由于在实传递函数 G_0 的所有根轨迹中，每一条轨迹关于实轴也都是对称的；也就是说，根轨迹关于实轴和虚轴都是对称的。将对称根轨迹方程写成如下的标准根轨迹形式：

$$1+\rho\frac{N(-s)N(s)}{D(-s)D(s)}=0 \tag{7.111}$$

将从 U 到 Z 的传递函数的开环极点通过虚轴映射(得到双倍的零极点数)，这样就得到了全部的零极点，然后可以画出根轨迹。注意，根轨迹可以是 0°或 180°，这取决于式(7.109)中的$G_0(-s)G_0(s)$的符号。决定用哪种类型(0°或 180°)的根轨迹的一个快捷的方法就是选取与虚轴没有交点的那个。绘制根轨迹的实轴规则揭示了这一点。在此我们假设系统是可控的，并且假设所有系统的状态矢量都出现在被选的输出 z 当中，那么一定保证最优闭环系统是稳定的；因此根轨迹的所有部分都不在虚轴上。

例 7.20　伺服电动机转速控制的对称根轨迹设计

绘制下述伺服电动机转速控制系统的对称根轨迹，取 $z=y$：

$$\dot{y}=-ay+u \tag{7.112a}$$

$$G_0(s)=\frac{1}{s+a} \tag{7.112b}$$

解答。本例[式(7.109)]的对称根轨迹方程为

$$1+\rho\frac{1}{(-s+a)(s+a)}=0 \tag{7.113}$$

如图 7.20 所示对称根轨迹为 0°根轨迹。此时最优(稳定)极点可直接求得

$$s=-\sqrt{a^2+\rho} \tag{7.114}$$

因此，使式(7.106)中的性能指标最小的闭环根位于实轴上，它距原点的距离由式(7.114)给出，并且它总是在开环根的左侧。◀

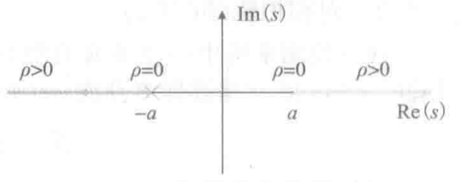


图 7.20　一阶系统的对称根轨迹

例 7.21　卫星姿态控制器的对称根轨迹设计

画出卫星系统的对称根轨迹，取 $z=y$。

解答。系统的运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u \tag{7.115}$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \tag{7.116}$$

480～481

然后通过式(7.115)和式(7.116)计算得

$$G_0(s)=\frac{1}{s^2} \tag{7.117}$$

图 7.21 给出了 180°对称根轨迹图。产生对称根轨迹的 Matlab 语句为

```
s=tf('s');
sysGG=1/s^4;
rlocus(sysGG);
```

有趣的是，(稳定)闭环极点的阻尼比为 $\zeta=0.707$。对于给定的 ρ 值在对称根轨迹上选取两个稳定的根，例如，当 $\rho=4.07$ 时 $s=-1\pm \mathrm{j}1$，用它们进行极点配置以及控制律的设计。◀

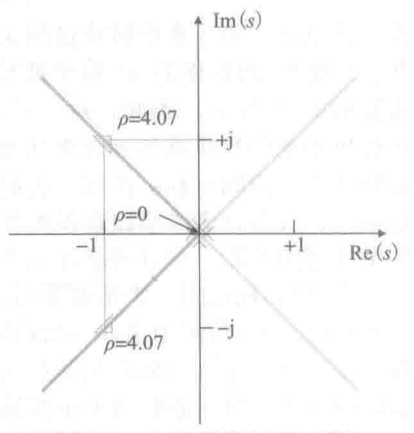


图 7.21　卫星系统的 SRL 设计

选择不同的 ρ 值产生不同的极点位置，以此达到在快速响应 $\left(\int z^2\mathrm{d}t\text{ 取很小的值}\right)$ 和低控制量 $\left(\int u^2\mathrm{d}t\text{ 取很小的值}\right)$ 之间取得平衡。图 7.22 给出了卫星(双积分器)被控对象[式(7.15)]对于 ρ 从

0.01 变化到 100 的所有值的折中曲线设计。这个曲线有两条渐近线(虚线)分别对应控制使用的低损失(大的 ρ 值)和高损失(小的 ρ 值)。在实际应用中，通常选取靠近折中曲线拐点处的某一点所对应的 ρ 值。这是因为它能够在控制的使用和快速响应之间提供一个合理的折中。对于卫星被控对象，$\rho=1$ 的值与曲线的拐点相对应。此时，闭环极点的阻尼比为 $\zeta=0.707$。图 7.23 给出了相应的奈奎斯特图，其相位裕度为 PM=65°，且幅值裕度为无穷大。这些优良的稳定性正是 LQR 设计的一般特征。然而，回想这一方法，假设在反馈中所有的状态矢量都是可得到的(可测的)，而在实际中这是不可能的。在下节中将讨论状态矢量不可测但可以被估计的情况，这也许不能得到优良的 LQR 稳定特性。

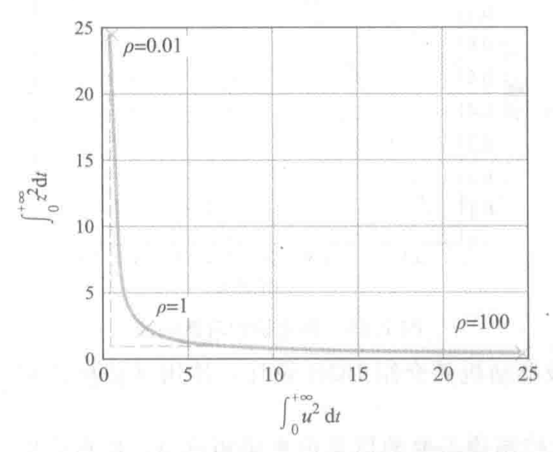


图 7.22 卫星被控对象折中曲线设计

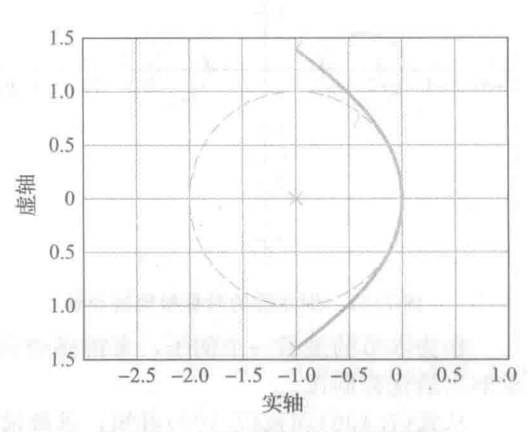


图 7.23 LQR 设计的奈奎斯特图

对于开环不稳定系统的设计，使用对称根轨迹和 LQR 方法有可能找到最优极点的位置。

例 7.22 倒立摆的对称根轨迹设计

画出简单倒立摆的线性化方程的对称根轨迹图，令 $\omega_0=1$。取输出 z 为位置的两倍加上速度的和(使得位置和速度都加重或减弱)。

解答。系统的运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u \tag{7.118}$$

482~483

对于给定的输出，即 2×位置+速度，通过下式计算输出：

$$z=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x} \tag{7.119}$$

由式(7.118)和式(7.119)计算，得

$$G_0(s)=-\frac{s+2}{s^2-\omega_0^2} \tag{7.120}$$

对称 0°根轨迹如图 7.24 所示。生成对称根轨迹的 Matlab 语句(对于 $\omega_0=1$)如下。

```
s=tf('s');
G=-(s+2)/(s^2-1);
G1=-(-s+2)/(s^2-1);
sysGG=G*G1;
rlocus(sysGG);
```

对于 $\rho=1$，闭环极点为 $-1.36\pm j0.606$ 时，相应的 $\boldsymbol{K}=[-2.23\quad -2.73]$，如果将本例中的系统矩阵代入到求解输入增益的式(7.97)中，则得到解为

$$\boldsymbol{N}_x=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$N_u=1$$

$$\overline{N}=-1.23$$

利用这些值，用 $\boldsymbol{N}_x$ 和 N_u 表示的控制律表达式(7.89b)可简化为

$$u=-\boldsymbol{Kx}+\overline{N}r$$

相应的位置阶跃响应如图 7.25 所示。◀

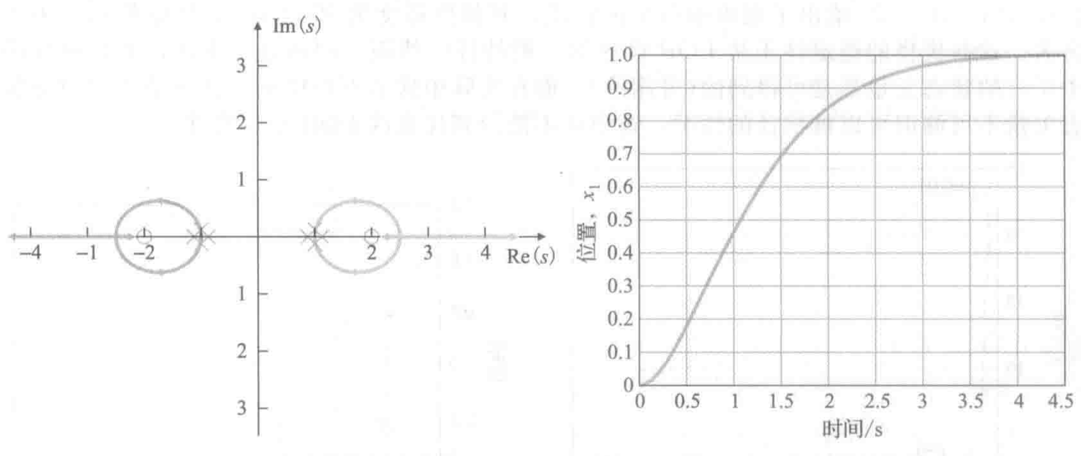


图 7.24　倒立摆的对称根轨迹设计　　　图 7.25　倒立摆的阶跃响应

作为本节的最后一个例子，考虑磁带伺服电动机并介绍 LQR 设计，使用计算机直接求解出最优控制律。

从式(7.106)和式(7.108)可知，求解最优控制律需要的信息由系统矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和输出矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 给出。包括 Matlab 在内的大多数计算机辅助软件包都使用式(7.106)的更一般形式

$$\mathcal{J}=\int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t \tag{7.121}$$

如果取 $Q=\rho\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{R}=1$，则式(7.121)可化简为更简单的形式如式(7.106)。直接求解最优控制增益的 Matlab 语句为

$$\mathrm{K=lqr(A,B,Q,R)} \tag{7.122}$$

开始 LQR 设计迭代的一个合理方法由布鲁森(Bryson)规则给出(Bryson 和 Ho，1969)。在实际应用中，选取合理的 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 值的一个合适的方法是对角矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 的初始选择满足

$$Q_{ii}=1/[x_i^2]\text{ 的最大合理值}$$
$$R_{ii}=1/[u_i^2]\text{ 的最大合理值}$$

然后在逐步迭代过程中修正加权矩阵，使得在性能和控制量之间取得合理的折中。

例 7.23　磁带驱动系统的 LQR 设计

(1) 寻找例 7.10 中的磁带驱动系统的最优控制律，在性能指标中使用位置 x_3 作为输出。令 $\rho=1$，与先前用主导二阶极点方法得到的结果进行比较。

(2) 当 $\rho=0.1$，1，10 时，试比较各 LQR 设计的结果。

484 ～ 485

解答。

(1) 这里我们要做的是将各矩阵代入到式(7.122)，形成反馈系统，并绘制响应曲线。性能指标矩阵为 $\boldsymbol{R}=1$；最难的问题是求状态成本矩阵 $\boldsymbol{Q}$。已知输出成本变量为 $z=x_3$，则由例 7.10 得到输出矩阵为

$$\boldsymbol{C}_3=[0.5\quad 0\quad 0.5\quad 0\quad 0]$$

当 $\rho=1$，则所求的矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_3$$

$$
=\begin{bmatrix}0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

用以下的 Matlab 语句求出增益：

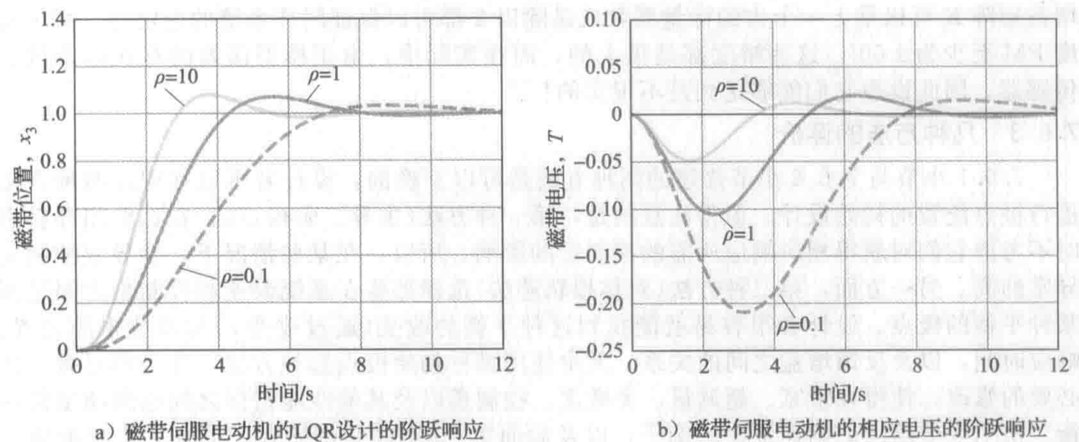
```
A=[0 2 0 0 0; -.1 -.35 .1 .1.75;0 0 0 2 0;.4 .4 -.4 -1.4;0
    -.03 0 0 -1];
B=[0; 0; 0; 0; 1];
C3=[.5 0 .5 0 0];
R=1;
rho=1;
Q=rho*C3'*C3;
K=lqr(A,B,Q,R)
```

由 Matlab 计算出的增益为

$$
\boldsymbol{K}=[0.6526\quad 2.1667\quad 0.3474\quad 0.5976\quad 1.0616] \tag{7.123}
$$

图 7.18 和图 7.19 给出了位置阶跃响应曲线和相应的电压图(用 Matlab 的 step()函数)，可以与先前的响应图相比较。显然，对于矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 中的元素有很大的选择范围，因此，有效地使用 LQR 设计需要大量的实际经验。

(2) 对于相同的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\mathbf{R}$，当 $\rho=0.1$，1，10 时，可以重复进行上述(1)问部分的 LQR 设计。图 7.26 给出了这三种设计方法的位置阶跃响应和相应电压的比较图。从结果中可以看出，ρ 值越小，相应的控制量损耗越大，响应越慢；而 ρ 值越大，相应的控制量损耗越低，响应相对越快。◀



a）磁带伺服电动机的LQR设计的阶跃响应　　b）磁带伺服电动机的相应电压的阶跃响应

图　7.26

LQR 调节器极点的极限特性

将最优闭环极点作为根轨迹参数(即 ρ)的函数，考虑其极限特性是很有趣的，尽管在实际中都不使用。

“昂贵控制”的情况($\rho\to 0$)：从本质上讲，式(7.106)不利于控制能量的利用。如果控制是昂贵的，那么最优控制只移动那些在右半平面内的开环极点。在右半平面的极点仅仅是移动到与它们对称的左半平面内的镜像位置上。

最优控制采用的这种方法是，在避免移动左半平面内的极点的基础上，使用最小的控制量达到系统稳定的目的。闭环极点的位置仅仅是左半平面内的对称根轨迹上的起始点。在这种情况下，最优控制没有加快系统的响应。对于卫星被控对象，图 7.22 所示垂直虚线对应着这种“昂贵控制”情况，而且说明使用很低的控制导致在 z 上产生了很大的误差。

486~487

"廉价控制"情况 $\rho\to+\infty$：在这种情况中，被控对象不是能量控制，而且最优控制律可以使用任意的控制量。控制律是将某些闭环极点配置到左半平面的零点处。而其余的极点沿着对称根轨迹的渐近线移动到无穷远处。如例 7.22 所示，如果系统是非最小相位系统，那么某些闭环极点就被移动到这些零点在左半平面内的镜像位置上。而其余的极点沿着巴特沃思(Butterworth)滤波器极点图形移动到无穷远处，如例 7.21 所示。最优控制律提供了与 LQR 成本函数一致的最快允许响应时间。在这种情况中，反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是无界的。对于双积分的被控对象而言，图 7.22 所示的水平虚线就对应着"廉价控制"的情况。

LQR 调节器的鲁棒性能

已经证明用 LQR 设计的奈奎斯特图绕过了以 -1 点为圆心的单位圆(安德森(Anderson)和摩尔(Moore)于 1990 年提出)，如图 7.23 所示。这就产生了特别的相位和增益裕度特性。可以看出(见习题 7.33)回差必须满足

$$|1+\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}|\geqslant 1 \tag{7.124}$$

下面将回路增益改写为它的实部和虚部之和的形式：

$$L(\mathrm{j}\omega)=\boldsymbol{K}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\mathrm{Re}(L(\mathrm{j}\omega))+\mathrm{j}\mathrm{Im}(L(\mathrm{j}\omega)) \tag{7.125}$$

由式(7.124)意味着，有

$$([\mathrm{Re}(L(\mathrm{j}\omega)]+1)^2+[\mathrm{Im}(L(\mathrm{j}\omega)]^2\geqslant 1 \tag{7.126}$$

这说明奈奎斯特图的确绕过了以 -1 为圆心的单位圆。这暗示着 $\frac{1}{2}<\mathrm{GM}<+\infty$，也即增益裕度的上限为 $\mathrm{GM}=+\infty$，增益裕度的下限为 $\mathrm{GM}=\frac{1}{2}$(见第 6 章习题 6.24)。因此 LQR 增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以乘上一个大的标量系数或是除以 2 都可以保证闭环系统的稳定性。相位裕度 PM 至少为 $\pm60°$。这些裕度都是很大的，而在实际中，由于模型误差的存在以及缺少传感器，因此设想它们能够达到是不现实的！

7.6.3 几种方法的评价

7.6.1 小节与 7.6.2 小节描述的两种方法是可以互换的，设计者可以利用这两种方法进行极点配置的初始设计。值得注意的是，第一种方法(主导二阶极点法)在选取闭环极点时不考虑它们对获得相应响应所需的控制量的影响。所以，在某些情况下，会导致控制量异常的高。另一方面，第二种方法(对称根轨迹法)选择那些在系统误差和控制量之间达到某种平衡的极点。设计者很容易就能找到这种平衡的改变(通过改变 ρ)与系统根的位置、响应时间，以及反馈增益之间的关系。无论使用哪种初始极点选择方法，几乎都要做一些必要的修改，使得在带宽、超调量、灵敏度、控制量以及其他性能指标之间达到期望的平衡。由 7.8 节给出的阐述补偿的例子，以及后面第 10 章的实例研究，可进一步掌握极点选择法。

488

7.7 估计器设计

7.5 节在设计控制律时假设反馈中的所有状态矢量都是可测的。但是在大多数的情况下，由于所需传感器的价格可能会过高，所以并不是所有的状态都是可测的。或者，物理上不可能测出所有的状态变量，例如，在核动力对象中就不可能测得所有的状态。本节中，我们将阐述如何根据系统中一些测量值来重构系统所有的状态变量。如果用 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 表示状态的估计值，那么将式(7.99)的控制律中的真实状态用这些估计值来代替，则控制律变为 $u=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{N}r$。这样做的确是可行的，正如 7.8 节看到状态估计重构是状态空间控制设计的一个关键部分。

7.7.1 全阶估计器

估计状态的一种方法是对被控对象动态构建一个全阶估计模型，即

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u \tag{7.127}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{x}}$为实际状态 $\boldsymbol{x}$ 的估计；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $u(t)$已知。

因此，如果能够找到正确的初始状态 $x(0)$，令$\hat{\boldsymbol{x}}(0)$等于 $\boldsymbol{x}(0)$，那么这个估计器就是满足要求的。图 7.27 描述了这个开环估计器。然而，明显缺少构造估计器所需的 $\boldsymbol{x}(0)$的信息。否则，被估计的状态会准确跟踪实际的状态。因此，如果对初始状态的估计不精确，那么被估计的状态就会产生持续增加的误差，或者误差趋于零的速度很慢，以至于失去作用。此外，在已知系统($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$)中，微小的误差也将会使估计的状态偏离真实状态。

为了研究估计器的动态，我们定义估计误差为

$$\tilde{\boldsymbol{x}} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \tag{7.128}$$

则误差系统的动态由下式给出：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}(0) - \hat{\boldsymbol{x}}(0) \tag{7.129}$$

我们无法改变状态的估计值向真实状态值收敛的速率。

现在我们引入黄金规则：有麻烦，用反馈。考虑将被测输出和待估输出之差反馈到输入端，并用该误差信号连续不断地修正模型。如图 7.28 所示，该方案对应的方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u - \boldsymbol{L}(y - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{7.130}$$

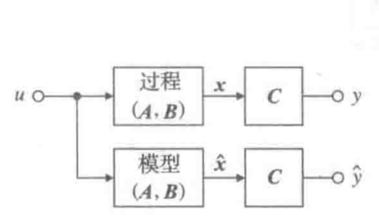


图 7.27　开环估计器框图

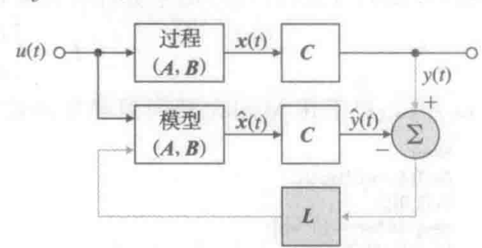


图 7.28　闭环估计器框图

这里，$\boldsymbol{L}$ 为比例增益，定义为

$$\boldsymbol{L} = [l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_n]^{\mathrm{T}} \tag{7.131}$$

选取 $\boldsymbol{L}$ 以得到满意的误差特性。用状态[式(7.41)]减去状态估计值[式(7.130)]得到误差的动态特性，误差方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{7.132}$$

误差的特征方程为

$$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LB})] = 0 \tag{7.133}$$

如果选择 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ 具有使系统稳定并且快速收敛的特征值，那么$\tilde{\boldsymbol{x}}$将衰减到零并保持在零——而不依赖已知的强迫函数 $u(t)$以及它对状态 $\boldsymbol{x}(t)$的影响，也与初始状态$\tilde{\boldsymbol{x}}(0)$无关。这意味着无论$\hat{\boldsymbol{x}}(0)$取何值，$\hat{\boldsymbol{x}}(t)$都将会收敛到 $x(t)$；此外，选择误差的动态特性为稳定的，这比利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所确定的开环动态快得多。

值得注意的是，在得出式(7.132)的过程中，我们假设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 在物理对象和计算机的实现中是相同的。若得不到被控对象($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$)的精确数学模型，那么误差的动态特性将不再受式(7.132)控制。然而，通过选取 $\boldsymbol{L}$ 使得误差系统仍保持基本的稳定，并且即使对于(很小的)模型误差和扰动输入，误差也仍能保持在允许的最小值范围内。重点强调被控对象和估计器的本质差别相当大。被控对象是一个实际的物理系统，如一个化学过程或者伺服机构，而估计器通常是一个数字处理器，由式(7.130)计算估计的状态。

$\boldsymbol{L}$ 的选取可以按照控制律设计中选取 $\boldsymbol{K}$ 时完全相同的方法进行。如果规定估计器误差极点的期望位置为

$$s_i = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$

489～490

则期望的估计器特征方程为

$$\alpha_e(s) \stackrel{\text{def}}{=} (s-\beta_1)(s-\beta_2)\cdots(s-\beta_n) \tag{7.134}$$

然后，将式(7.133)与式(7.134)进行比较可求出 $\boldsymbol{L}$。

例 7.24 单摆系统的估计器设计

给单摆设计一个估计器。计算估计器的增益矩阵，将两个估计器的误差极点都设置在 $-10\omega_0$(是例 7.14 中选定的控制器极点的 5 倍)。取 $\omega_0=1$，用 Matlab 对结果进行验证。评估该估计器的性能。

解答。单摆的运动方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{7.135a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \tag{7.135b}$$

要求将两个估计器的误差极点均放置在 $-10\omega_0$。相应的特征方程为

$$\alpha_e(s) = (s+10\omega_0)^2 = s^2 + 20\omega_0 s + 100\omega_0^2 \tag{7.136}$$

由式(7.133)可得

$$\det[s\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})] = s^2 + l_1 s + l_2 + \omega_0^2 \tag{7.137}$$

将式(7.136)与式(7.137)的系数进行比较，可得

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\omega_0 \\ 99\omega_0^2 \end{bmatrix} \tag{7.138}$$

取 $\omega_0=1$，用下述 Matlab 语句同样可得到上述结果：

```
wo=1;
A=[0 1;-wo*wo 0];
C=[1 0];
pe=[-10*wo;-10*wo];
Lt=acker(A',C',pe);
L=Lt'
```

得到 $\boldsymbol{L}=[20 \quad 99]^{\mathrm{T}}$，与手工计算结果一致。

给被控对象加上实际的状态反馈，并画出观测误差曲线，由此可测试该估计器的性能。注意，这并不是系统最终所建立的方式，但是它提供了一种测试估计器性能的方法。

491

将带有状态反馈的被控对象式(7.68)与带有输出反馈的估计器式(7.130)联立，得到整个系统的方程如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{LC}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{7.139}$$

$$y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{7.140}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{7.141}$$

图 7.29 给出了该系统的框图。

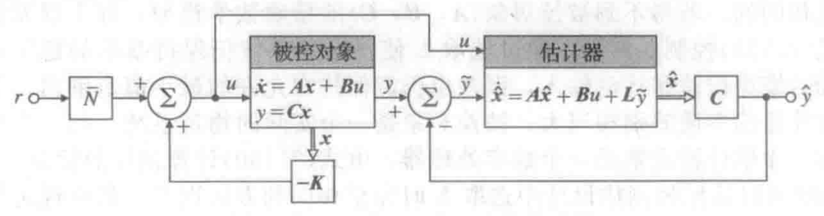


图 7.29 与被控对象相连的估计器

图 7.30 给出了 $\omega_o=1$ 时且闭环系统的初始状态为 $\boldsymbol{x}_o=[1.0,\ 0.0]^T$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_o=[0,\ 0]^T$ 时的响应曲线，其中 $\boldsymbol{K}$ 由例 7.14 给出，$\boldsymbol{L}$ 由式(7.138)给出。该响应曲线可由 Matlab 的 impulse 和 initial 函数给出。从图中可以看出，即使 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的初始值有很大的误差，经过一个初始的暂态过渡后，最终状态估计也会收敛到实际的状态矢量。并且，观测误差的衰减比状态本身的衰减几乎快了 5 倍，而这与我们的设计相吻合。

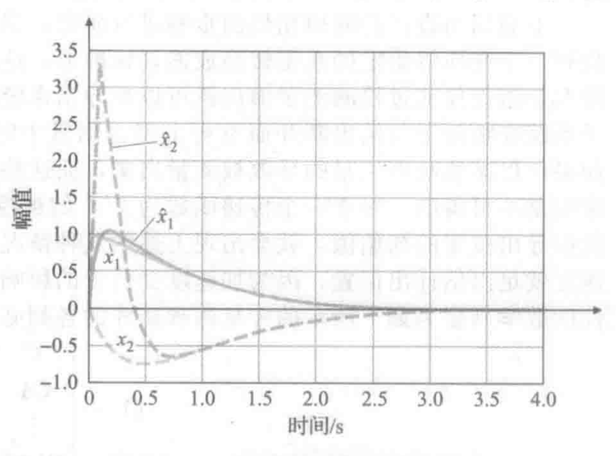


图 7.30 $\boldsymbol{x}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的振荡器初始条件响应

能观标准形

正如控制律设计的情况一样，存在一种标准形能使估计器增益设计方程变得极其简单，并且可显而易见的判断估计器解的存在性。7.4.1 小节介绍了这种标准形。方程组为能观标准形，并且具有以下结构：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_o=\boldsymbol{A}_o\boldsymbol{x}_o+\boldsymbol{B}_o u \tag{7.142a}$$

$$y=\boldsymbol{C}_o\boldsymbol{x}_o \tag{7.142b}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}_o=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 1\\ -a_n & 0 & & 0 & & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_o=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0],\ D_o=0$$

图 7.31 给出了三阶系统能观标准形的框图。在能观标准形中，所有的反馈回路都是从输出或从被观测的信号引出。与能控标准形相同，能观标准形也是一种“直接”形式，矩阵中重要的元素值都是直接从相应的传递函数 $G(s)$ 的分子和分母多项式的系数中得到的。因为方程的系数出现在矩阵的左侧，所以称矩阵 $\boldsymbol{A}_o$ 为特征方程的左相伴矩阵。

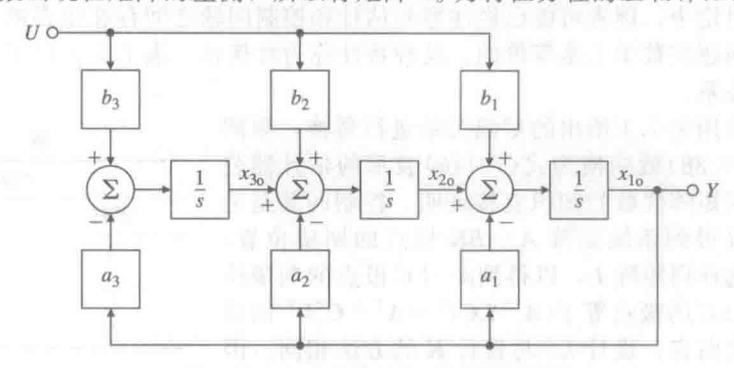


图 7.31 三阶系统的能观标准形框图

能观标准形的一个优势是通过观察就能得到估计器的增益。三阶系统估计器误差闭环矩阵为

$$\boldsymbol{A}_o-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}_o=\begin{bmatrix}-a_1-l_1 & 1 & 0\\ -a_2-l_2 & 0 & 1\\ -a_3-l_3 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{7.143}$$

其特征方程为

$$s^3+(a_1+l_1)s^2+(a_2+l_2)s+(a_3+l_3)=0 \tag{7.144}$$

492 ~ 493

将式(7.144)与式(7.134)中的 $\alpha_e(s)$ 的系数进行比较即可求出估计器的增益。

下面用与设计控制律相似的步骤进行研究，当且仅当系统存在一种结构特性时，可以找到一个变换将给定的系统转换成能观标准形，这种特性称为可观测性。粗略地讲，可观测性是指仅仅通过检测测量输出就可以推导出系统所有的模态信息的能力。当某些模态或子系统在物理上与输出断开而不再出现在测量中时，就产生了不可观测性的结果。例如，如果仅仅某些状态矢量的导数被测量出来，而这些状态矢量又不影响动态特性，那么积分常数是不可得的。对于一个传递函数为 $1/s^2$ 的被控对象，如果仅速度可测，由于此时不可能推导出位置的初始值，就会出现上述的这种情况。另一方面，对于一个振荡器，测量出速度就足以估计出位置，因为加速度受位置的影响，而加速度可观测到速度。验证可观测性的数学判据为如下所示的可观测性矩阵的各列必须线性无关：

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7.145}$$

我们将研究单输出的情况，$\mathcal{O}$为方阵，因此能观的必要条件为$\mathcal{O}$是非奇异的，或者$\mathcal{O}$的行列式不为零。通常，当且仅当可观测性矩阵为非奇异矩阵时，就能找到将系统矩阵转换成能观标准形的变换矩阵。注意，这同前面推导的将系统矩阵转化成能控标准形的结论相似。

同控制律设计一样，可以找到转换成能观标准形的变换矩阵，根据式(7.144)的等效形式计算增益，然后变换回去。计算 $\boldsymbol{L}$ 的另一种方法就是使用阿克曼公式的估计器形式，即

$$\boldsymbol{L} = \alpha_e(\boldsymbol{A})\,\mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.146}$$

其中：$\mathcal{O}$为式(7.145)给出的可观测性矩阵。

估计和控制问题间的对偶性

从上述的讨论中，读者可能已经注意到估计和控制问题之间存在很多的相似之处。事实上，这两个问题在数学上是等价的。这种特性称为对偶性。表 7.1 给出了估计和控制问题之间的对偶关系。

表 7.1

对偶性	
控制	估计
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

例如，如果用表 7.1 给出的对偶关系进行替换，则阿克曼控制公式(7.88)就变换为式(7.146)表示的估计器公式。我们可以用矩阵代数的知识直接证明。控制问题是选择行矩阵 $\boldsymbol{K}$，以得到系统矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$ 极点的期望位置；估计器问题是选择列矩阵 $\boldsymbol{L}$，以得到$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ 极点的期望位置。然而，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}$ 的极点等于$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 的极点，对这种形式而言，设计 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 与设计 $\boldsymbol{K}$ 的方法相同。因此，对于控制问题，使用如下形式的阿克曼公式或 place 算法：

```
K = acker(A,B,pc),
K = place(A,B,pc),
```

对于估计器问题，则使用

```
Lt= acker(A′,C′,pe),
Lt= place(A′,C′,pe),
L= Lt′,
```

其中：p_e 为包含期望估计器误差极点的矢量。因此，对偶性允许我们在控制问题以及估计

器问题上，使用相同的设计工具。通过比较($\boldsymbol{A}_c$，$\boldsymbol{B}_c$，$\boldsymbol{C}_c$)和($\boldsymbol{A}_o$，$\boldsymbol{B}_o$，$\boldsymbol{C}_o$)，这两个三元矩阵组，也可以看出这两种标准形具有对偶性。

7.7.2　降阶估计器

在 7.7.1 节中介绍了估计器的设计方法，用某些状态矢量的测量值重构整个状态矢量。如果传感器没有噪声干扰，那么全阶估计器就会包含冗余设计，对于估计可直接测量的状态矢量的必要性产生质疑。可以用那些能够直接且精确测量的状态矢量来降低估计器的复杂度吗？答案是肯定的。然而，如果测量结果有严重的噪声干扰，那么最好使用全阶估计器，因为全阶估计器除了对那些不可测的状态进行估计外，还可以对测量结果进行滤波。

494～495

降阶估计器通过测量输出数(此处为 1)来降低估计器的阶数。为了推导这种降阶估计器，先假设将第一个状态作为输出，例如 $y=x_a$。如果这样不行，就需要进行预处理。变换为估计器的形式是可行的，但是工作量太大；可以对 $\boldsymbol{C}$ 进行任意非奇异变换作为第一行。现将状态矢量分为两部分：可直接测得的状态矢量 x_a，以及余下的需要估计的那部分状态矢量 $\boldsymbol{x}_b$。若将系统矩阵相应的分块，则系统的完整描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_a\\ \dot{\boldsymbol{x}}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{aa} & \boldsymbol{A}_{ab}\\ \boldsymbol{A}_{ba} & \boldsymbol{A}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a\\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_a\\ \boldsymbol{B}_b\end{bmatrix}u \tag{7.147a}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a\\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix} \tag{7.147b}$$

不可测状态矢量的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_b=\boldsymbol{A}_{bb}\boldsymbol{x}_b+\underbrace{\boldsymbol{A}_{ba}x_a+\boldsymbol{B}_b u}_{\text{已知输入}} \tag{7.148}$$

其中，最右边的两项为已知项，并且可以看作是进入 $\boldsymbol{x}_b$ 动态的输入。因为 $x_a=y$，所以被测动态由如下标量方程给出

$$\dot{x}_a=\dot{y}=A_{aa}y+\boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{x}_b+B_a u \tag{7.149}$$

如果将式(7.149)的已知项移到方程的一侧，得

$$\underbrace{\dot{y}-A_{aa}y-B_a u}_{\text{已知测量值}}=\boldsymbol{A}_{ab}\boldsymbol{x}_b \tag{7.150}$$

这样就得到了方程左边的已知量，即测量值，与方程右边的未知状态变量之间的关系式。因此，式(7.149)和式(7.150)对状态 $\boldsymbol{x}_b$ 与原始方程[式(7.147b)]对状态 $\boldsymbol{x}$ 有相同的关系。根据这一原因，在原始的估计器方程中进行如下的替换可得到 $\boldsymbol{x}_b$ 的一个(降阶)估计器：

$$\boldsymbol{x}\leftarrow\boldsymbol{x}_b \tag{7.151a}$$

$$\boldsymbol{A}\leftarrow\boldsymbol{A}_{bb} \tag{7.151b}$$

$$\boldsymbol{B}u\leftarrow\boldsymbol{A}_{ba}y+\boldsymbol{B}_b u \tag{7.151c}$$

$$y\leftarrow\dot{y}-A_{aa}y-B_a u \tag{7.151d}$$

$$\boldsymbol{C}\leftarrow\boldsymbol{A}_{ab} \tag{7.151e}$$

所以，将式(7.151)代入到全阶估计器式(7.130)即可得到降阶估计器方程：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_b=\boldsymbol{A}_{bb}\hat{\boldsymbol{x}}_b+\underbrace{\boldsymbol{A}_{ba}y+\boldsymbol{B}_b u}_{\text{输入}}+\boldsymbol{L}(\underbrace{\dot{y}-A_{aa}y-B_a u}_{\text{测量}}-\boldsymbol{A}_{ab}\hat{\boldsymbol{x}}_b) \tag{7.152}$$

如果将估计器误差定义为

496

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_b\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{x}_b-\hat{\boldsymbol{x}}_b \tag{7.153}$$

那么，将式(7.152)减去式(7.148)，可以得到误差动态方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_b=(\boldsymbol{A}_{bb}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{ab})\tilde{\boldsymbol{x}}_b \tag{7.154}$$

它的特征方程由下式给出：

$$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}_{bb}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{ab})]=0 \tag{7.155}$$

通过选取 $\boldsymbol{L}$ 设计估计器的动态，使得式(7.155)与降阶的 $\alpha_e(s)$ 相匹配，则式(7.152)改写为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_b = (\boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{ab})\hat{\boldsymbol{x}}_b + (\boldsymbol{A}_{ba} - \boldsymbol{L}A_{aa})y + (\boldsymbol{B}_b - \boldsymbol{L}B_a)u + \boldsymbol{L}\dot{y} \tag{7.156}$$

事实上，从式(7.156)中得到测量值的微分存在实际的困难。众所周知，微分运算增强噪声干扰，因此如果 y 为噪声，则使用 $\dot{y}$ 是不可取的。为了克服这一困难，定义新的控制器状态为

$$\boldsymbol{x}_c \overset{\text{def}}{=\!=} \hat{\boldsymbol{x}}_b - \boldsymbol{L}y \tag{7.157}$$

由这一新状态，降阶估计器的实现式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = (\boldsymbol{A}_{bb} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{ab})\hat{\boldsymbol{x}}_b + (\boldsymbol{A}_{ba} - \boldsymbol{L}A_{aa})y + (\boldsymbol{B}_b - \boldsymbol{L}B_a)u \tag{7.158}$$

$\dot{y}$ 不再直接出现。图 7.32 给出了降阶估计器的框图。

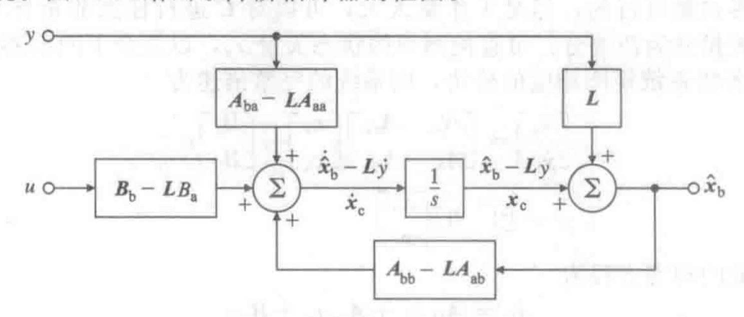


图 7.32 降阶估计器结构图

例 7.25 摆的降阶估计器设计

为摆设计一个降阶估计器，其误差极点为 $-10\omega_0$。

解答。系统方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

分块后的矩阵为

$$\begin{bmatrix}A_{aa} & \boldsymbol{A}_{ab}\\ \boldsymbol{A}_{ba} & \boldsymbol{A}_{bb}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}B_a\\ \boldsymbol{B}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

497

由式(7.155)得到由 L 表示的特征方程：

$$s - (0 - L) = 0$$

将上式的特征方程与期望方程

$$\alpha_e(s) = s + 10\omega_0 = 0$$

相比较得

$$L = 10\omega_0$$

根据式(7.158)得估计器方程为

$$\dot{x}_c = -10\omega_0\,\hat{x}_2 - \omega_0^2 y + u$$

并且由式(7.157)得状态估计为

$$\hat{x}_2 = x_c + 10\omega_0 y$$ ◀

使用先前例题中给出的控制律。图 7.33 给出了 $\omega_0 = 1$ 时，被控对象初始条件为

$x_0=[1.0 \quad 0.0]^T$和估计器初始条件为 $x_{c0}=0$ 的曲线。该响应曲线可由 Matlab 中的 impulse 或 initial 函数得到。注意观察该初始条件响应曲线与图 7.30 所示的全阶估计器的响应曲线的相似之处。

使用如下的 Matlab 语句得到降阶估计器的增益：

```
Lt = acker(Abb', Aab', pe),
Lt = place(Abb', Aab', pe),
 L = Lt'.
```

降阶估计器的存在条件与全阶估计器的存在条件相同，即可以证明($\boldsymbol{A}_{bb}$，$\boldsymbol{A}_{ab}$)的可观测性与($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$)的可观测性相同。

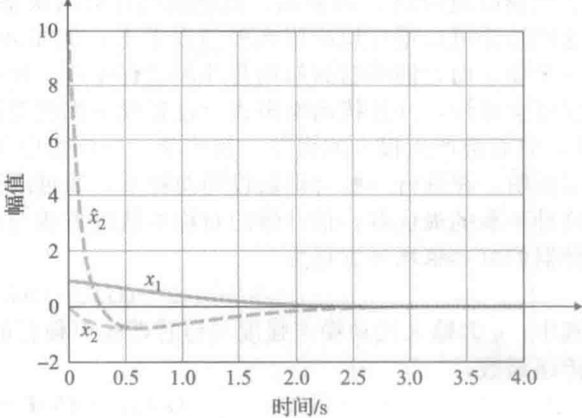


图 7.33 降阶估计器的初始条件响应

7.7.3 估计器极点的选取

可以基于 7.6 节讨论的控制器极点的选择方法来选择估计器的极点。作为一个经验法则，可将估计器极点选取得比控制器极点快 2～6 倍。这样可保证估计器误差比期望动态衰减得更快，从而使控制器极点主导整个响应过程。如果传感器噪声足够大，以至于成为一个需要考虑的主要因素，则所选的估计器极点要比 2 倍的控制器极点慢一些，以此得到一个宽带较低、噪声平滑的系统。然而，在这种情况下，我们期望估计器极点的位置强烈地影响整个系统的响应。如果估计器的极点慢于控制器的极点，我们期望系统对于扰动的响应受估计器的动态特性控制，而不是受由控制律选定的动态特性控制。

与控制器极点选取相比，估计器极点的选择时需要考虑一个与控制量迥然不同的关系。与控制器的情况相同，在估计器中同样也存在一个反馈，随着要求的响应速度的加快，该反馈项的幅值也随之增大。然而，该反馈项在计算机中是以电信号或数字的形式存在的，所以它的增大没有引起特别的困难。在控制器中，加快响应速度就要加大控制量；这就意味着，要使用一个更大的执行机构，就得需要增加执行机构的尺寸、重量和费用。估计器响应速度的加快，引起的一个严重的后果，就是估计器的宽带变得更高，由此导致更多的传感器噪声传递到控制器执行机构。当然如果($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$)不是能观的，那么估计器增益取任何值都得不到理想的状态估计。因此，与控制器设计一样，最好的估计器设计就是能够在理想的暂态响应和保证传感器噪声不会严重损害执行器性能的最低宽带之间达到平衡。使用主导二阶和最优控制的思想都能满足这些要求。

基于对称根轨迹的估计器增益设计也有一个结论。在最优估计理论中，估计器增益的最佳选择方案取决于传感器的噪声强度 v 与过程(扰动)噪声强度[(式 7.160)中的 w]之比。为了更好地理解这一点，再研究一下估计器方程：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{L}(y-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{7.159}$$

研究当过程噪声 w 出现时，这个方程是如何与系统相互影响的。下式描述的是带有过程噪声的被控对象：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{B}_1 w \tag{7.160}$$

带有传感器噪声 v 的测量方程式为

$$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+v \tag{7.161}$$

将式(7.160)减去式(7.159)，并将 y 用式(7.161)代替，可直接求出带有上述外加输入的估计器误差方程为

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}_1 w-\boldsymbol{L}v \tag{7.162}$$

498～499

在式(7.162)中，传感器噪声前乘以系数 $\boldsymbol{L}$，而过程噪声前没有乘以系数 $\boldsymbol{L}$。如果 $\boldsymbol{L}$ 很小，那么传感器噪声的影响就被消除了，但是估计器的动态响应就会变“慢”，因此该误差就不能很好地抑制 w 的影响。低增益估计器的状态不会很好地跟踪不确定的被控对象输入。这些结论可以很好地应用到模型误差上，例如 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{B}$。这些模型误差将使式(7.162)增加一些项，而它们所起到作用与外加过程噪声一样。另一方面，如果 $\boldsymbol{L}$ 较大，那么估计器响应将会加快，并且扰动噪声或者过程噪声都将受到抑制，但是由于传感器噪声乘上了系数 $\boldsymbol{L}$，故而会产生很大的误差。很明显，应该折中考虑这两方面的影响，使其达到平衡。事实证明，在进行一些合理假设的前提下，通过求解估计器对称根轨迹方程就可以找出达到这种平衡的最优解，估计器的对称根轨迹方程与最优控制公式(式 7.109)非常相似。该估计器的对称根轨迹方程为

$$1+qG_e(-s)G_e(s)=0 \tag{7.163}$$

其中：q 为输入扰动噪声强度与传感器噪声强度的比值；G_e 为从过程噪声到传感器输出的传递函数，

$$G_e(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}_1 \tag{7.164}$$

从式(7.109)和式(7.163)注意到 $G_e(s)$ 与 $G_0(s)$ 相似。然而，比较式(7.110)与式(7.164)，表明 $G_e(s)$ 中的输入矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 代替了 $\boldsymbol{B}$，且 $G_0(s)$ 为从控制输入 u 到成本输出 z 的传递函数，输出矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 代替了 $\boldsymbol{C}$。

使用估计器对称根轨迹[式(7.163)]等同于使用控制器对称根轨迹。先画一个关于 q 的根轨迹，由此找到几组最优估计器的极点，这些极点或多或少都和过程噪声强度与传感器噪声强度的比值有关。设计者可以选取一组综合考虑各方面因素影响而又看起来最佳的(稳定)极点。使用对称根轨迹方法的一个显著的优势就是在过程噪声输入矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 选定后，“自由度”减为 1，即只选择 q，取代了直接在高阶系统中选取极点时要求的许多自由度。

最后，讨论降阶估计器。由于从 y 经过 $\boldsymbol{L}$ 到 $\boldsymbol{x}_b$(见图 7.32)存在一个直接的传输项，所以同全阶估计器相比，降阶估计器从传感器到控制器的带宽更高一些。因此，如果传感器噪声是一个重要的影响因素，由于可能保留的复杂性比增大对噪声的灵敏度所引起的偏移要多，则此时降阶估计器的优势就不那么明显了。

例 7.26 单摆的对称根轨迹估计器设计

令 $\omega_0=1$，画出单摆线性化方程的估计器对称根轨迹。取输出为位置的噪声测量，该测量的噪声强度比为 q。

500

解答。已知系统方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}w$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+v$$

由式(7.164)可得

$$G_e(s)=\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$$

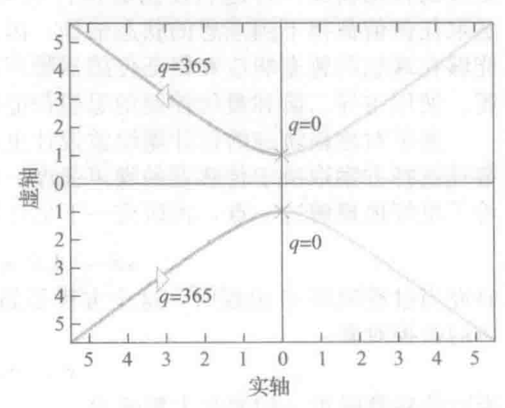


图 7.34 倒立摆估计器设计的对称根轨迹

180°的对称根轨迹如图 7.34 所示。生成对于 $\omega_0=1$，对称根轨迹的 MATLAB 语句如下：

```
s=tf('s');
G=1/(s^2+1);
sysGG=G*G;
rlocus(sysGG);
```

对于给定值 q，选择两个稳定的根，比如对于 $q=365$，$s=-3+j3.18$，然后用于估计器极点配置。 ◀

7.8 补偿器设计：复合控制律与估计器

如果将 7.5 节所介绍的控制律设计方法与 7.7 节介绍的估计器设计方法相结合，用估计的状态变量来实现控制律的设计，那么可以获得抑制扰动却不跟踪外部参考输入的调节器。然而，因为控制律是为实际(非估计)状态的反馈而设计的，人们可能想知道用$\hat{\boldsymbol{x}}$代替$\boldsymbol{x}$会对系统动态产生什么影响。本节就来讨论这种影响。为此，我们要先计算出闭环特征方程以及开环补偿器传递函数，然后用这些结果比较状态空间设计与根轨迹、频率响应设计方法之间的差别。 501

具有反馈的被控对象方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{7.165}$$

可将上式用状态误差$\tilde{\boldsymbol{x}}$表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}) \tag{7.166}$$

将式(7.166)与估计误差[式(7.132)]相结合，从而得到状态形式的整个系统动态为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} \tag{7.167}$$

该闭环系统的特征方程为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{0} & s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C} \end{bmatrix} = 0 \tag{7.168}$$

因为该矩阵为块三角形式(参见附录 WD，网址 www. fpe7e. com 可供参考及查询)，所以可将式(7.168)改写为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\cdot\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}) = \alpha_c(s)\alpha_e(s) = 0 \tag{7.169}$$

换句话说，复合系统的这组极点由控制极点与估计极点组成。这意味着控制律与估计器的设计可以独立进行，然而，当两者按此方式结合使用时，极点保持不变[⊖]。

将状态变量设计方法与在第 5 章和第 6 章所讨论的变换方法相比较，由图 7.35 蓝色阴影部分注意到对应着补偿器。将控制律 $u=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}$(由于它是补偿器的一部分)代入估计器式(7.130)，从而得到该补偿器的状态方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}y \tag{7.170a}$$

$$u = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{7.170b}$$

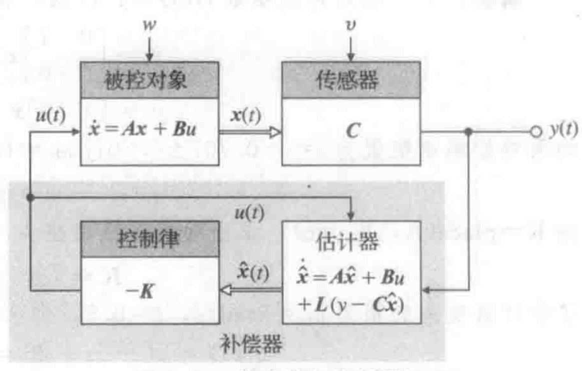


图 7.35 估计器与控制器机理

注意，式(7.170a)与式(7.18a)具有相同的结构，重写式(7.170a)为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{7.171}$$

由于式(7.18a)的特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = 0 \tag{7.172}$$

比较式(7.170a)与式(7.171)，将等效矩阵代入式(7.172)，从而得到补偿器的特征方程为

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}) = 0 \tag{7.173}$$

注意到我们既没有确定式(7.173)的根也没有在我们的状态空间设计法的讨论中用到这些根(注意补偿器并不一定稳定；式(7.173)的根有可能在右半平面)。从 y 到 u 的传递函数

⊖ 这是分离原理(Gunckel and Frankun，1963)的特例，该定理适用于更一般情形，而且在某些随机情况下，可以将控制律与估计器的设计结合起来。

代表了动态补偿器，通过观察式(7.45)，以及代换式(7.173)中的相应矩阵，得到该传递函数为

$$D_c(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{L} \tag{7.174}$$

同样的方法可用于降阶估计器。此时，控制律为

$$u=-\begin{bmatrix}K_a & \boldsymbol{K}_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_a\\ \hat{\boldsymbol{x}}_b\end{bmatrix}=-K_a y-\boldsymbol{K}_b\hat{\boldsymbol{x}}_b \tag{7.175}$$

将式(7.175)代入式(7.171)，然后使用式(7.158)及一些代数方法，得到

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c=\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{x}_c+\boldsymbol{B}_r y \tag{7.176a}$$

$$u=\boldsymbol{C}_r\boldsymbol{x}_c+D_r y \tag{7.176b}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}_r=\boldsymbol{A}_{bb}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{ab}-(\boldsymbol{B}_b-\boldsymbol{L}B_a)\boldsymbol{K}_b \tag{7.177a}$$

$$\boldsymbol{B}_r=\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{L}+\boldsymbol{A}_{ba}-\boldsymbol{L}A_{aa}-(\boldsymbol{B}_b-\boldsymbol{L}B_a)K_a \tag{7.177b}$$

$$\boldsymbol{C}_r=-\boldsymbol{K}_b \tag{7.177c}$$

$$D_r=-K_a-\boldsymbol{K}_b\boldsymbol{L} \tag{7.177d}$$

该动态补偿器具有传递函数为

$$D_{cr}(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=\boldsymbol{C}_r(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_r)^{-1}\boldsymbol{B}_r+D_r \tag{7.178}$$

502 ~ 503

当我们针对一个具体例子计算出 $D_c(s)$ 或 $D_{cr}(s)$ 时，会发现虽然使用的是与第 5 章和第 6 章所提出的经典补偿器完全不同的方法，但相应结果却非常类似。

例 7.27 卫星姿态控制系统的全阶补偿器设计

使用极点配置法给传递函数为 $1/s^2$ 的卫星被控对象设计补偿器。将控制极点配置在 $s=-0.707\pm0.707j(\omega_n=1\text{rad/s},\ \zeta=0.707)$，将估计器极点配置为 $\omega_n=5\text{rad/s},\ \zeta=0.5$。

解答。对于给定传递函数 $G(s)=1/s^2$ 的一种状态变量描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

如果将控制根配置为 $s=-0.707\pm0.707j(\omega_n=1\text{rad/s},\ \zeta=0.7)$，那么

$$\alpha_c(s)=s^2+s\sqrt{2}+1 \tag{7.179}$$

由 K=place(A，B，pc)，求出状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

若估计器误差的根为 $\omega_n=5\text{rad/s},\ \zeta=0.5$，那么期望的估计器特征多项式为

$$\alpha_e(s)=s^2+5s+25=s+2.5\pm4.3j \tag{7.180}$$

由 Lt=place(A′，C′，pe)，得到估计器反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}5\\25\end{bmatrix}$$

由式(7.174)给出补偿器传递函数为

$$D_c(s)=-40.4\frac{(s+0.619)}{s+3.21\pm4.77j} \tag{7.181}$$

由于它的极点右侧的实轴上有一个零点，所以上式很像一个超前补偿器；然而，式(7.181)有两个复极点而不是一个实极点。零点提供了超前相位的微分反馈，而两个极点平滑了传感器噪声。

在第 5 章和第 6 章中用根轨迹或频率响应方法来评价补偿的性能，这里可以使用相同方法来评估补偿对该系统闭环极点的影响。式(7.181)中的增益 40.4 是用式(7.179)和

式(7.180)进行极点选择而得到的。如果用变量增益K来替换补偿器增益的特定值，那么由被控对象和补偿器所组成的闭环系统的特征方程就变为

$$1+K\frac{s+0.619}{(s+3.21\pm 4.77\mathrm{j})s^2}=0 \qquad (7.182)$$

如图7.36所示，根轨迹法可以计算出关于K的方程的根。注意到轨迹穿越了式(7.179)和式(7.180)所选择的根，而且，当$K=40.4$时，闭环系统的4个根与所指定的根是相等的。

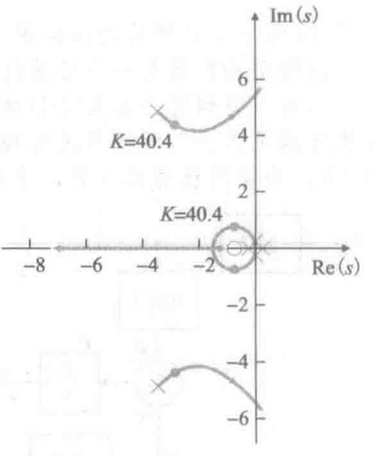


图7.36 以过程增益为参数，复合控制器与估计器的根轨迹

图7.37所给出的频率响应图表明用状态空间法设计的补偿与用频率响应法设计得到了相同的结果。尤其是未补偿的0°相位裕度在补偿后增长到53°，而且增益$K=40.4$，产生一个$\omega_c=1.35\mathrm{rad/s}$的穿越频率。正如我们所期待的那样，这两个值与具有$\omega_n=1\mathrm{rad/s}$与$\zeta=0.7$的控制器闭环极点大致相符，这是因为这些控制器慢极点与估计器快极点相比，前者在系统响应中占有主导地位。◀

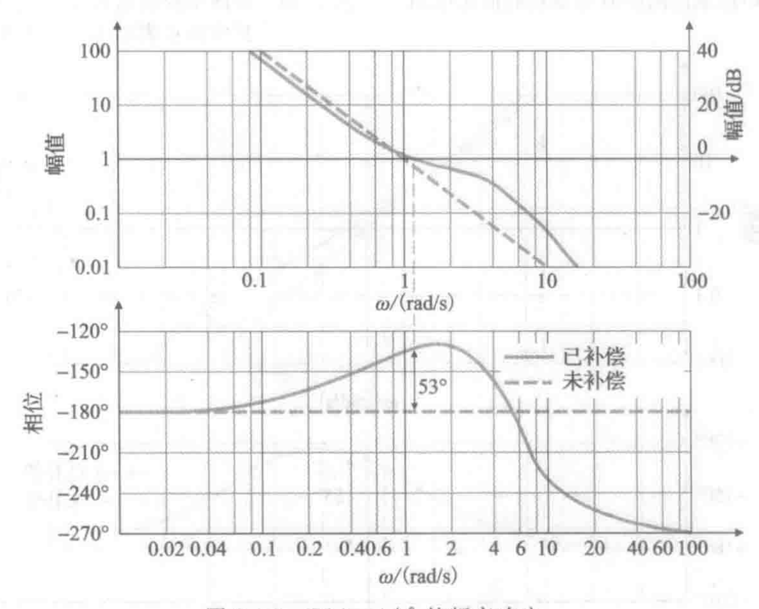


图7.37 $G(s)=1/s^2$的频率响应

现在，我们来考虑相同系统降阶估计器设计。

例7.28 卫星姿态控制系统的降阶估计器设计

对传递函数为$1/s^2$的卫星被控对象设计一个降阶估计器，配置估计器极点为$-5\mathrm{rad/s}$。

解答。由式(7.155)可知估计器增益为

$$L=5$$

由式(7.176a，b)得到标量式补偿器方程为

$$\dot{x}_c=-6.41x_c-33.1y$$
$$u=-1.41x_c-8.07y$$

其中：由式(7.157)有

$$x_c=\hat{x}_2-5y$$

由式(7.178)求出补偿器具有如下形式的传递函数：

$$D_{cr}(s) = -\frac{8.07(s+0.619)}{s+6.41}$$

图 7.38 给出了补偿器的结构图。

该降阶补偿器是一个超前网络。这是个有趣的发现，因为它再次表明了变换法与状态变量法可以得到完全相同类型的补偿。从图 7.39 所示的根轨迹曲线可以看出，闭环极点在指定的位置上。补偿系统的频率响应如图 7.40 所示，由该图可以看出，相位裕量大约为 55°。与全阶估计器相同，使用其他方法分析证实了被选的根位置是正确的。◀

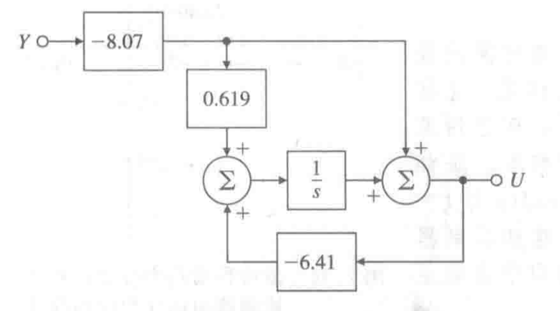


图 7.38 相位超前的降阶控制器的简化框图

图 7.39 带降阶控制器和 $1/s^2$ 过程的根轨迹，其中圆点表示 $K=8.07$ 时根的位置

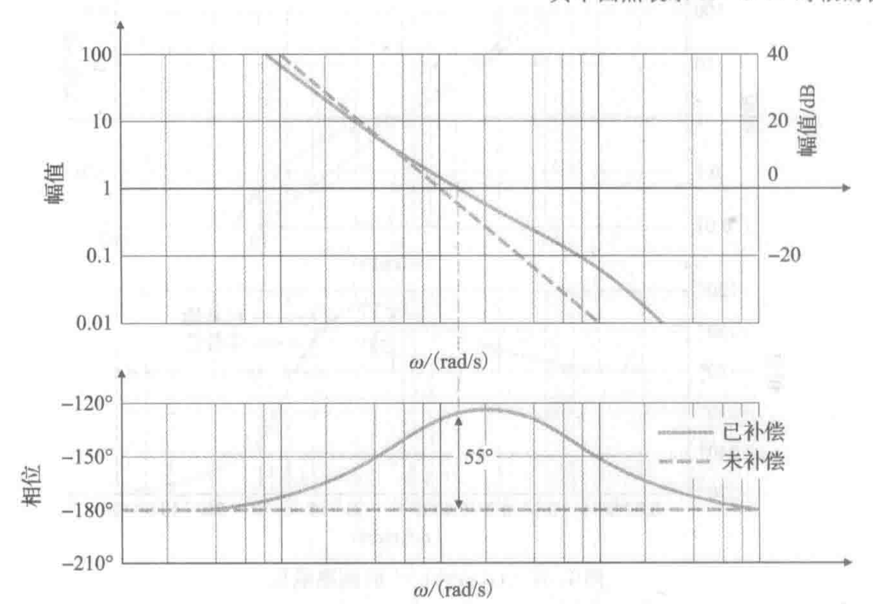


图 7.40 带降阶估计器的 $G(s)=1/s^2$ 被控对象的频率响应

以一个三阶系统为例，说明极点配置方法更细微的性质。

例 7.29 直流伺服系统的全阶补偿器设计

使用状态空间极点配置方法为直流伺服系统设计补偿器，该系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$$

使用能观标准形的状态描述，将控制极点配置于 pc=[−1.42；−1.04±2.14j]，将全阶估计器的极点配置于pe=[−4.25；−3.13±6.41j]。

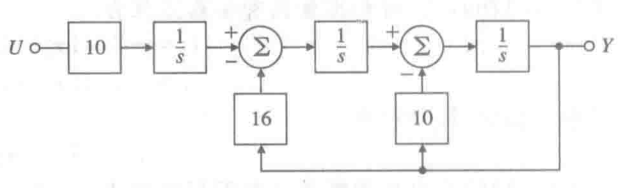


图 7.41 用能观标准形表示的直流伺服系统

解答。图 7.41 给出了该系统能

观标准形下的一种框图。相应的状态空间矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-10 & 1 & 0\\ -16 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=[1\quad 0\quad 0],\ D=0$$

期望极点为

$$\text{pc}=[-1.42;-1.04+2.14*\text{j};-1.04-2.14*\text{j}]$$

用 K=(A, B, pc)命令，求出状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=[-46.4\quad 5.76\quad -0.65]$$

估计器误差极点为

$$\text{pe}=[-4.25;-3.13+6.41*\text{j};-3.13-6.41*\text{j}]$$

用 Lt=place(A′, C′, pe)命令，L=Lt′求出估计器增益为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.5\\61.4\\216\end{bmatrix}$$

代入式(7.174)得到补偿器的传递函数为

$$D_c(s)=-190\frac{(s+0.432)(s+2.10)}{(s-1.88)(s+2.94\pm 8.32\text{j})}$$

图 7.42 绘制了由补偿器与被控对象串联所组成系统的根轨迹，其中以补偿器增益为参数。该图证实了当增益 $K=190$ 时，尽管得到特殊的(不稳定的)补偿，但所有的根仍处于所期望的指定位置。即使这个补偿器在 $s=+1.88$ 有不稳定的根，系统的所有闭环极点(控制器与估计器)都是稳定的。◀

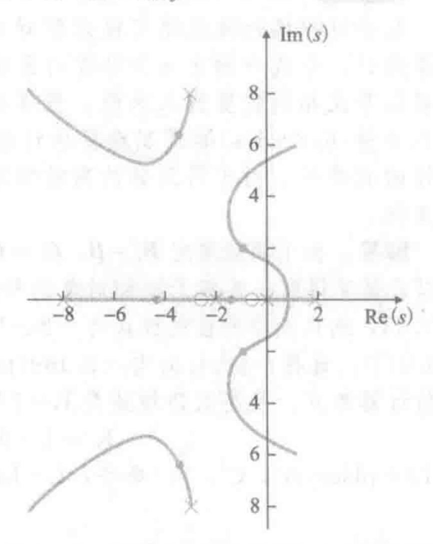


图 7.42 直流伺服系统极点配置的根轨迹

由于在装置测试过程中，检测补偿器自身或检测处于开环状态的系统都存在困难，不稳定的补偿器通常是不被接受的。然而，在一些情况下，却可以由不稳定的补偿器得到更好的控制效果；那么在检测过程中带来的不便也是值得的[⊖]。

图 7.33 表明使用不稳定补偿器导致的直接结果是当增益从标称值开始减小时，系统也变得不稳定了。这类系统称为条件稳定系统，应该尽可能避免。正如第 9 章所述，响应大信号的执行器饱和会产生降低有效增益的情况，而且在条件稳定系统中会导致系统不稳定。同样，如果电子设备在启动过程中，控制放大器的增益从零连续增长到标称值，那么这样的系统在初始时刻就是不稳定的。考虑到这些情况，我们就要为这类条件稳定系统寻找其他设计方法。

例 7.30 带有降阶估计器的直流伺服系统的再设计

使用相同的控制极点，但利用降阶估计器，为例 7.29 中的直流伺服系统设计一个补偿器，取 $\omega_n=6\text{rad/s}$，$\zeta=0.707$，并将估计器极点配置在 $-4.24\pm 4.24\text{j}$ 的位置。

解答。降阶估计器相应的极点为

$$\text{pe}=[-4.42+4.42*\text{j};-4.24-4.24*\text{j}]$$

将系统矩阵分块，有

⊖ 甚至有些使用稳定的补偿器的系统也不能镇定。

$$\begin{bmatrix} A_{aa} & \boldsymbol{A}_{ab} \\ \boldsymbol{A}_{ba} & \boldsymbol{A}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_a \\ \boldsymbol{B}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

解估计器误差的特征多项式为

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_{bb} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_{ab}) = \alpha_e(s)$$

(用 place 函数)求得

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 36 \end{bmatrix}$$

由式(7.178)计算出补偿器传递函数为

$$D_{cr}(s) = 20.93\frac{(s-0.735)(s+1.871)}{(s+0.990\pm 6.120j)}$$

该系统相应的根轨迹如图 7.43 所示。注意，这次得到的是非最小相位稳定的补偿器以及一个零度的根轨迹。由于所选增益都必须使所有闭环极点位于左半平面，所以根轨迹位于右半平面就不会引起麻烦。

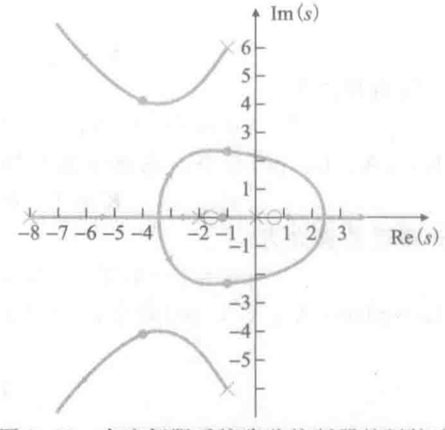


图 7.43 直流伺服系统降阶控制器的根轨迹

下面尝试用对称根轨迹方法作为对该系统进行控制设计的另外一种途径。

例 7.31 使用对称根轨迹方法对直流伺服补偿器进行再设计

基于对称根轨迹法使用极点配置对例 7.29 中的直流伺服系统设计补偿器。对于控制律设计，令成本输出 z 与被控对象输出相同；对于估计器设计，假设过程噪声与系统控制信号在相同位置进入系统。根据控制带宽大概为 2.5rad/s 选择根，根据约为控制带宽 2.5 倍(6.3rad/s)的带宽选择估计器的根。通过画出阶跃响应以及一些说明，证明该设计的有效性。对于得到解的离散实现参见附录 W7.8，网址 www. fpe7e. com 可供参考及查询。

解答。由于问题规定 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{C}$，那么控制器与估计器的对称根轨迹法是相同的，所以只需要得到一条基于被控对象的传递函数的根轨迹。针对该系统的对称根轨迹法可见图 7.44，选择期望的控制极点为 $-2\pm 1.56j$ 与 -8.04(pc=[−2+1.56 * j; −2−1.56 * j; −8.04])。选择 $-4\pm 4.9j$ 与 -9.169(pe=[−4+4.9 * j; −4−4.9 * j; −9.169])为期望的估计器极点。状态反馈增益是 K=(A, B, pc)或者

504 ~ 510

$$\boldsymbol{K} = [-0.285 \quad 0.219 \quad 0.204]$$

用 Lt=place(A′, C′, pe)命令，L=Lt′求出估计器增益为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 7.17 \\ 97.4 \\ 367 \end{bmatrix}$$

注意到反馈增益较之前小很多。由式(7.174)计算出补偿器传递函数为

$$D_c(s) = -\frac{94.5(s+7.98)(s+2.52)}{(s+4.28\pm 6.42j)(s+10.6)}$$

取该补偿器，将其与被控对象串联起来，并将补偿器增益作为参数。得到的闭环系统的根轨迹，如图 7.45 所示。当根轨迹增益等于标称增益值 94.5 时，根恰好位于对称根轨迹法所选的闭环极点位置上，与上述要求相符。阶跃响应与相应的控制量如图 7.46 所示。

注意到现在的补偿器为稳定且是最小相位的。之所以能得到改进的设计，很大程度上是由于被控对象极点 $s=-8$ 实质上没有被控制器改变，也没有被估计器改变。要得到理想性能并不需要改变这个极点；实际上，在原来的 $G(s)$ 中，唯一需要修改之处是 $s=0$ 的极点。通过对称根轨迹法，我们发现改变 $s=0$ 与 -2 处的两个低频极点，而保持 $s=-8$ 这个极点不变，就能使控制作用得到最大程度的利用。这样一来，控制增益就大大降低，

而补偿器设计就不太重要了。这个例子就说明了为什么 LQR 设计方法通常优于极点配置方法。◀

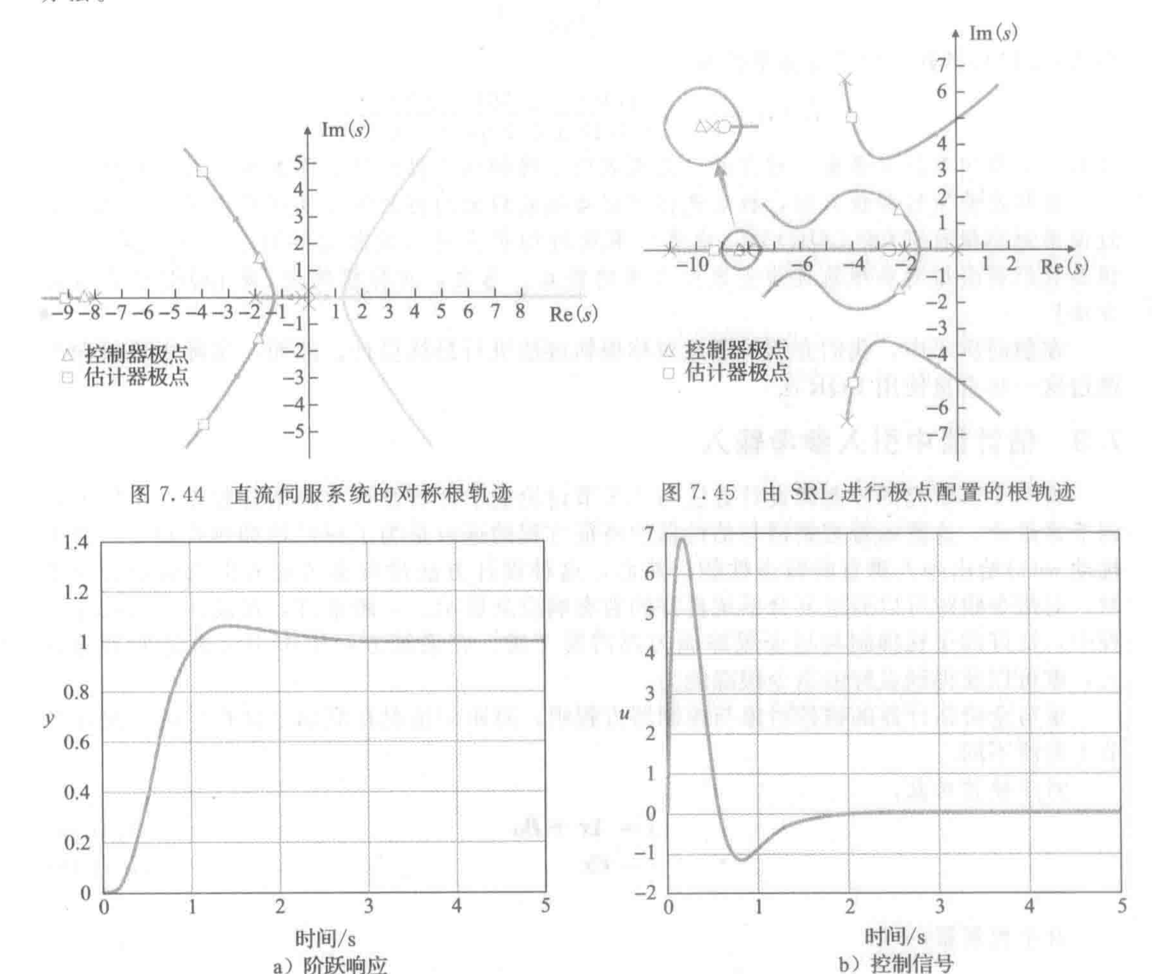


图 7.44 直流伺服系统的对称根轨迹

图 7.45 由 SRL 进行极点配置的根轨迹

a）阶跃响应

b）控制信号

图 7.46 阶跃响应与控制信号

我们重新来看，利用更合适的极点及从例 7.31 所掌握的知识，探讨本例极点配置的方法。开始时，使用三阶极点，产生了三个自然频率为 2rad/s 的极点。该设计方法将极点从 $s=-8$ 移到 $s=-1.4$，这违反了开环极点不应被移动的原则，除非这是极点问题。现在，让我们再尝试用主导的二阶极点位置来替换那些慢速极点，而保留在 $s=-8$ 处的快速极点不变。

例 7.32 带有改进主导二阶根轨迹的直流伺服系统再设计

用极点配置法，为例 7.29 中的直流伺服系统设计补偿器，控制极点为

$$pc=[-1.41\pm 1.41j;-8]$$

估计器极点为

$$pe=[-4.24\pm 4.24j;-8]$$

解答。有了这些极点，用 K=place(*A*, *B*, pc)命令求出期望的反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=[-0.469\quad 0.234\quad 0.0828]$$

与极点在 $s=-8$ 移动的情况相比，该反馈增益的幅值更小。

利用 Lt=place(A′, C′, pe)命令，L=Lt′)可以求出估计器增益为

$$L = \begin{bmatrix} 6.48 \\ 87.8 \\ 288 \end{bmatrix}$$

由式(7.174)得到补偿器传递函数为

$$D_c(s) = -\frac{414(s+2.78)(s+8)}{(s+4.13 \pm 5.29j)(s+9.05)}$$

这是一个稳定系统且是最小相位的。此例表明正确的选择极点及对称根轨迹法的重要性。

在初次使用这些极点时，极点选择不好会导致较大的控制量以及不稳定的补偿器。通过使用对称根轨迹(或 LQR)法，或者选取改进的极点可以消除上述两个不理想的性质。但是我们需要用对称根轨迹法去选择合适的极点。总之，对称根轨迹(或 LQR)法为可选方法！ ◀

511 ~ 513

在前面例子中，我们介绍了通过对称根轨迹法进行最优设计。然而，实际中更倾向于跳过这一步直接使用 LQR 法。

7.9 估计器中引入参考输入

将 7.5 节研究的控制律设计方法与 7.8 节讨论的估计器设计方法结合起来，本质上是调节器设计。这意味着控制器与估计器的特征方程的选取是为了更好地抑制扰动——对于扰动 $w(t)$给出令人满意的暂态性能。然而，这种设计方法没有参考输入也没给出指令跟踪，对指令跟踪可以通过复合系统良好的暂态响应来展示。一般来讲，在设计控制系统过程中，良好的干扰抑制与指令跟踪能力都需要考虑。在系统方程组中引入合适的参考输入，就可以获得到良好的指令跟踪能力。

重写全阶估计器的被控对象与控制器方程组；降阶的情况在概念上是相同的，仅在细节上有所不同。

对于被控对象，

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{7.183a}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{7.183b}$$

对于控制器，

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{L}y \tag{7.184a}$$

$$u = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \tag{7.184b}$$

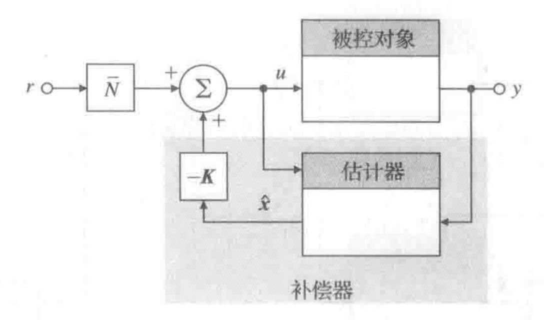
图 7.47 给出将指令输入 r 引入系统的两种可能性。该图说明了一个普遍存在的问题，即应将补偿放到反馈通道中还是前馈通道中。因为传递函数的零点不同，所以系统对指令输入的响应根据系统结构不同而不同。但是，令 $r=0$ 且注意到两个系统是相同的，就可以很容易证实闭环系统的极点是一致的。

很容易看出两个结构的响应差别。考虑阶跃输入 r 的影响。在图 7.47a 中，阶跃信号激励估计器的方式与激励被控对象的方式完全相同；因此，估计器的误差将在阶跃信号作用过程中与作用后保持为零。这意味着估计器动态不是由指令输入来激励的，所以，从 r 到 y 的传递函数一定有零点处于估计器极点位置上，从而抵消掉那些极点。因此，一个阶跃指令将激励系统行为，使其仅与控制极点一致——即是 $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})=0$ 的根。

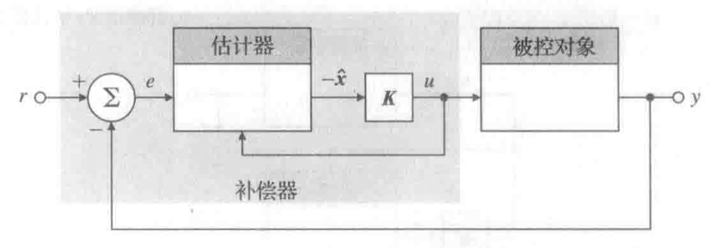
图 7.47b 中，阶跃指令 r 直接进入估计器，由此产生估计误差，该误差随估计器的动态特性与相应控制极点的响应而衰减。因此，一个阶跃指令将激励系统行为，使其与控制极点与估计器极点一致，即是

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}) \cdot \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}+\mathbf{L}\mathbf{C}) = 0$$

的根。



a)反馈通道补偿



b)前馈通道补偿

图 7.47 引入指令输入的可能位置

基于这个原因，图 7.47a 所示的结构是控制该系统的一种典型优选方式，其中，$\bar{N}$可由方程组式(7.97)～式(7.99)得到。

在 7.9.1 小节中，将会介绍引入参考输入的一般结构，该结构有三种选择参数的方式来实现前馈或反馈情况。我们将从系统零点以及零点对系统暂态响应的影响的角度来分析这三种选择方式。最后，7.9.2 小节中我们将会介绍如何选择剩余的参数来消除常值误差。

7.9.1 参考输入的一般结构

514～515

给定参考输入 $r(t)$，将 r 引入系统方程组的最一般的线性方式是在控制器方程组中加入与 r 成正比的项。这可以通过将 $\bar{N}r$ 加到式(7.184b)和将 $\boldsymbol{M}r$ 加到式(7.184a)来实现。注意，在这种情况下，$\bar{N}$为标量，$\boldsymbol{M}$ 为 $n\times1$ 的矢量。加入这些项后，**控制器方程**变为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}y+\boldsymbol{M}r \tag{7.185a}$$

$$u=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}+\bar{N}r \tag{7.185b}$$

框图如图 7.48a 所示。图 7.47 给出了相应于 $\boldsymbol{M}$ 和$\bar{N}$取不同值时的另一种形式。由于$r(t)$为外部信号，很明显，$\boldsymbol{M}$ 和$\bar{N}$都不能影响控制器-估计器组成的复合系统的特征方程。就传递函数而言，$\boldsymbol{M}$ 和$\bar{N}$的选择只会影响从 r 到 y 的传输零点，因此，会很大程度上影响暂态性能而非稳定性。那么，应该如何选取 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 得到满意的暂态响应呢？需要指出的是，我们已经通过反馈增益 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 分配了系统极点，现在将利用前馈增益 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 来分配零点。

选取 $\boldsymbol{M}$ 和$\bar{N}$有三种策略。

(1) 自治估计器：选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$，使得状态估计器的误差方程与 r 无关(见图 7.48b)。

(2) 跟踪误差估计器：选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 使得在控制中仅使用跟踪误差 $e=(r-y)$(见图 7.48c)。

(3) 零点配置估计器：选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\bar{N}$ 使得整个传递函数的 n 个零点全部位于设计者指定位置(见图 7.48a)。

a）一般情况－零点配置

b）标准情况－估计器无激励，零点$=\alpha_e(s)$

c）误差控制情况－经典补偿

图 7.48　引入参考输入的几种方式

情形 1：从估计器性能角度来看，第一种方法非常有吸引力而且是最为广泛应用的可选方案。如果$\hat{x}$产生 x 的有效估计，那么$\tilde{x}$一定要尽可能地避免受外部激励；即从 r 看去，$\tilde{x}$应是不可控的。计算 $\boldsymbol{M}$ 和$\overline{N}$来实现这一点是十分容易的。用式(7.183a)减去式(7.185a)，将被控对象输出方程[式(7.183a)]代入估计器方程[式(7.184a)]，将控制方程[式(7.184b)]代入被控对象方程[式(7.183a)]，得到估计器误差方程为

$$\dot{x}-\dot{\hat{x}}=\boldsymbol{A}x+\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{K}\hat{x}+\overline{N}r)-[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{x}+\boldsymbol{L}y+\boldsymbol{M}r] \tag{7.186a}$$

$$\dot{\tilde{x}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{x}+\boldsymbol{B}\overline{N}r-\boldsymbol{M}r \tag{7.186b}$$

若 r 在式(7.186a)中不出现，则应选取

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}\overline{N} \tag{7.187}$$

由于$\overline{N}$为标量，$\boldsymbol{M}$ 就被固定在一个常数范围内。注意，如此选取了 $\boldsymbol{M}$，我们可将控制器方程写为

$$u=-\boldsymbol{K}\hat{x}+\overline{N}r \tag{7.188a}$$

$$\dot{\hat{x}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\hat{x}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{L}y \tag{7.188b}$$

该控制器方程与图 7.48b 所示的结构相配置。这一选择的作用是在控制加入之前，通过对反馈增益与参考输入的计算得到的，然后将该控制量加入被控对象与估计器中。在这种形式下，如果被控对象的控制量受到饱和影响(见图 7.48b，图中包含了饱和非线性的情况，以及在第 9 章所讨论的内容)，那么在式(7.188)中，相同的控制限制可以应用到进入估计状态$\hat{x}$方程的控制量中，同时$\tilde{x}$的非线性也消去了。这一性质对于获得良好的估计器性能是必需的。这一方法的相应框图在图 7.48b 中给出。在讨论完选择 $\boldsymbol{M}$ 的另两种方法后，在 7.9.2 小节中，我们将回过头来研究参考输入的增益系数$\overline{N}$的选取。

情形 2：之前提到的第二种方法是使用跟踪误差。当传感器只能测量输出误差时，控制系统的设计者有时就不得不使用这个方法。例如，在许多温度调节器中，输出为被控温度与设定温度之差，控制器的可用参考温度没有完全标明。同样，一些雷达跟踪系统有一个与指示误差成正比的读数，此误差信号被用来作为反馈控制。在这些情况下，我们必须

516 ~ 517

选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$，使式(7.188)仅被误差信号驱动。若选取

$$\overline{N}=0 \quad 及 \quad \boldsymbol{M}=-\boldsymbol{L} \tag{7.189}$$

这一要求就可被满足，估计器方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}(y-r) \tag{7.190}$$

在前馈通道中，这种情形下的补偿器对于低阶设计系统而言，是一个标准的超前补偿器。从前面几章可以看出由于补偿器的零点的存在，这种设计可能会产生相当大的超调量。该设计和第 5 章与第 6 章利用变换方法所设计的补偿器恰好一致。

情形 3：选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$ 的第三种方法是选取其值使得系统零点可配置到设计者所指定的任意位置上。这个方法为设计者对于满足暂态响应与稳态增益的限制提供了最大限度的灵活度。另外，其他两种方法是第三种方法的特例。所有三种方法都依赖于系统的零点。在第 7.5.2 小节中，可以看到，当估计器与参考输入没有加到控制系统中时，闭环系统的零点是固定不变的，就是开环对象的零点。重新检查在估计器加到系统中后对零点会产生什么影响。为了实现这一目标，我们重新考虑式(7.188)的控制器。如果存在一个从 r 到 u 的传输零点，那么一定也存在一个从 r 到 y 的传输零点，除非存在一个与零点处于同一位置的极点。因此，仅研究控制器，就足以确定 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$ 的选择会对系统零点产生什么影响。由式(7.188)得到的从 r 到 u 的零点方程为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC} & -\boldsymbol{M} \\ -\boldsymbol{K} & \overline{N} \end{bmatrix}=0 \tag{7.191}$$

(由于我们只关心 r 的影响，所以令 $y=0$)。若将最后一列除以(非零)标量 $\overline{N}$，然后将最后一列乘以 $\boldsymbol{K}$ 加到其余列上，我们发现，前馈零点是满足下式的 s 的值：

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC}-\dfrac{\boldsymbol{M}}{\overline{N}}\boldsymbol{K} & -\dfrac{\boldsymbol{M}}{\overline{N}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=0$$

或

$$\det\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC}-\frac{\boldsymbol{M}}{\overline{N}}\boldsymbol{K}\right)=\gamma(s)=0 \tag{7.192}$$

此时，式(7.192)恰好是式(7.133)的形式，式(7.133)通过选择 $\boldsymbol{L}$ 来得到估计器极点的期望位置。这里，我们需要为由参考输入到控制的传递函数的期望的零值多项式 $\gamma(s)$ 选择 $\boldsymbol{M}/\overline{N}$。这样，$\boldsymbol{M}$ 的选择给影响暂态响应提供了相当大的自由度。给从 r 到 u 和从 r 到 y 的传递函数分别加入了任意的 n 阶多项式；也就是，除了先前分配的所有极点，我们还可以分配 n 个零点。若 $\gamma(s)$ 的根没有被系统极点消去，那么，它们将被包含在从 r 到 y 的传输零点中。 518

在 $\boldsymbol{M}/\overline{N}$ 的选择时，即零点位置的选取，有两方面可供我们考虑。第一是动态响应。从第 3 章可知，零点很大程度上影响暂态响应，而且，第 3 章给出的探索性准则有助于选取有效的零点位置。第二是稳态误差或恒速控制，它将状态空间设计与变换技术的其他结论联系起来。在第 4 章中，我们推导了关于 1 型系统的稳态精度和闭环极点、零点的关系。若为 1 型系统，那么响应阶跃输入的稳态误差将为零，单位斜坡输入的稳态误差将为

$$e_{\infty}=\frac{1}{K_{\mathrm{v}}} \tag{7.193}$$

其中：K_{v} 为速度常数。而且，若闭环极点位于 $\{p_{\mathrm{i}}\}$，闭环零点位于 $\{z_{\mathrm{i}}\}$，那么(对于 1 型系统)，特鲁赛尔公式为

$$\frac{1}{K_{\mathrm{v}}}=\sum\frac{1}{z_{\mathrm{i}}}-\sum\frac{1}{p_{\mathrm{i}}} \tag{7.194}$$

式(7.194)提供了对 $\gamma(s)$ 选择的部分基础。该选择方案是基于以下两点观察确定的。

(1) 若 $|z_{\mathrm{i}}-p_{\mathrm{i}}|\ll 1$，那么这个极 p_i 零点对对于动态响应的影响会很小，因为极点几

乎会被零点消去，且任何暂态响应处极点的留数将很小。

(2) 即使 z_i-p_i 很小，但 $1/z_i-1/p_i$ 可能会很大，根据式(7.194)可知，这样会对 K_v 产生很大影响。

这两条结论应用到对 $\gamma(s)$、$\boldsymbol{M}$、$\overline{N}$的选择中，会得到一个滞后网络设计。下面用一个例子来说明这种情况。

例 7.33　伺服机构：通过零点配置提高速度常数

考虑如下描述的二阶伺服机构系统：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

其状态描述为

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_2+u$$

使用极点配置方法设计控制器，使得两个极点均位于 $s=-2$，系统速度常数为 $K_v=10\mathrm{s}^{-1}$。通过阶跃响应和控制作用画图证明设计的有效性。解的离散形式参见附录 W7.9，网址 www.fpe7e.com 可供参考及查询。

519

解答。对于这一问题，状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=[8\ 3]$$

可得到期望的控制极点。在该增益下，$K_v=2\mathrm{s}^{-1}$，而要求 $K_v=10\mathrm{s}^{-1}$。根据选择 $\boldsymbol{M}$ 和$\overline{N}$的三种方法设计估计器，会对我们的设计产生什么影响呢？第一种策略(自治估计器)可发现 K_v 值不变。若用第二种方法(误差控制)，引入一个位置事先未知的零点，该零点对 K_v 的影响无法直接设计控制。然而，若我们使用第三种方法(零点配置)和特鲁赛尔公式[式(7.194)]，则动态响应与稳态需求均可满足要求。

针对 $K_v=10\ \mathrm{s}^{-1}$，首先选择满足式(7.194)的估计器极点 p_3 与零点 z_3。我们希望将 z_3-p_3 保持很小，使得对动态响应只有很小的影响，但 $1/z_3-1/p_3$ 的值可以大到使 K_v 的值增大。为实现上述目标，相对应控制系统动态特性，将 p_3 设置成任意小。例如，令

$$p_3=-0.1$$

注意，这种方法与通常需要快速响应的估计设计的原则相反。利用式(7.194)得到

$$\frac{1}{K_v}=\frac{1}{z_3}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_3}$$

其中：$p_1=-2+2\mathrm{j}$，$p_2=-2-2\mathrm{j}$，$p_3=-0.1$，求解 z_3 使得 $K_v=10$，此时，有

$$\frac{1}{K_v}=\frac{4}{8}+\frac{1}{0.1}+\frac{1}{z_3}=\frac{1}{10}$$

或

$$z_3=-\frac{1}{10.4}=-0.096$$

我们设计一个降阶估计器，使其极点位于-0.1处，选择 $\boldsymbol{M}/\overline{N}$ 使得 $\gamma(s)$在-0.096 处有一个零点。所得系统框图如图 7.49(a)所示。很容易验证，对于特定的，系统的整个传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{8.32(s+0.096)}{(s^2+4s+8)(s+0.1)} \tag{7.195}$$

$K_v=10s^{-1}$，符合要求。

图 7.49a 所示的补偿有两种输入(e 和 y)，一个输出，在某种意义上来说，这是一个非经典补偿。如果我们通过找到从 e 和 u 的传递函数来求解这些方程，以提供纯误差补偿，得到式(7.195)，可获得如图 7.49b 所示的系统。如下所见，相关控制器方程为

520

$$\dot{x}_c=0.8e-3.1u$$
$$u=8.32e+3.02y+x_c$$

其中：x_c 为控制器的状态。对这些方程取拉普拉斯变换，消去 $X_c(s)$ 项，并将输出用 $[Y(s)=G(s)U(s)]$ 代换，可以求出补偿器为

$$\frac{U(s)}{E(s)}=D_c(s)=\frac{(s+1)(8.32s+0.8)}{(s+4.08)(s+0.0196)}$$

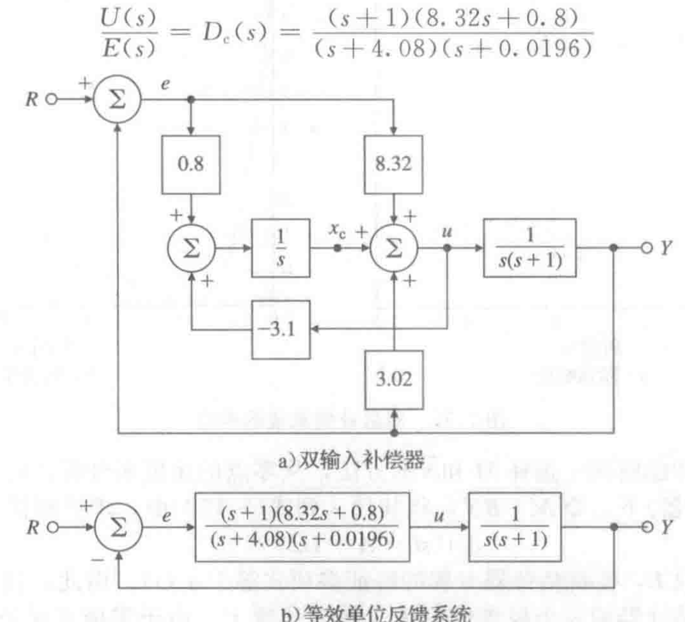


图 7.49 具有配置零点的伺服机构(滞后网络)

这种补偿为经典的滞后-超前网络。图 7.49b 所示系统的根轨迹如图 7.50 所示。注意原点附近的零极点分布(模式)具有滞后网络的特性。图 7.51 所示的伯德图表明，系统在低频段有滞后相位，在高频有超前相位。该系统的阶跃响应如图 7.52a 所示，可以看到由于慢极点 −0.1 使得响应曲线出现"尾部"。相应的控制作用如图 7.52 所示。当然，该系统为 1 型系统，而且最终跟踪误差将为零。◀

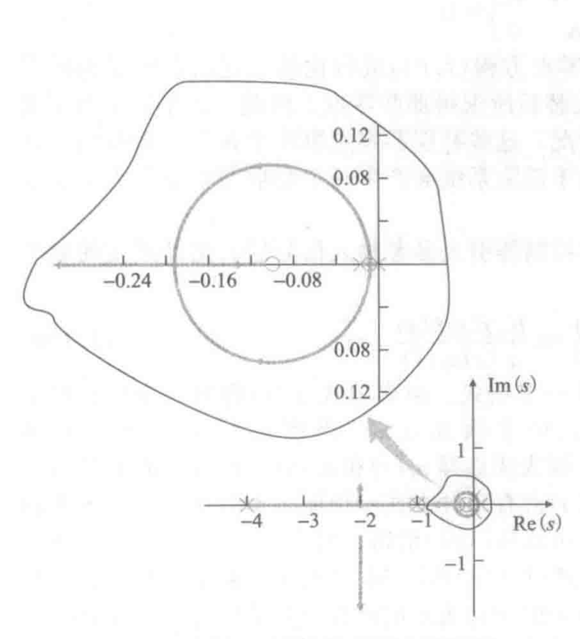


图 7.50 滞后-超前补偿系统的根轨迹

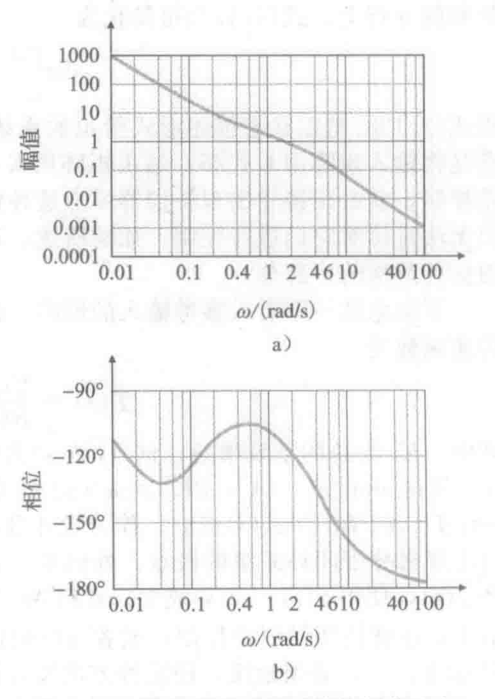
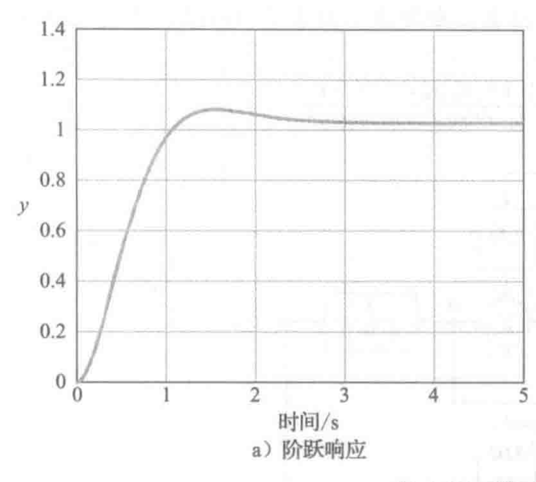
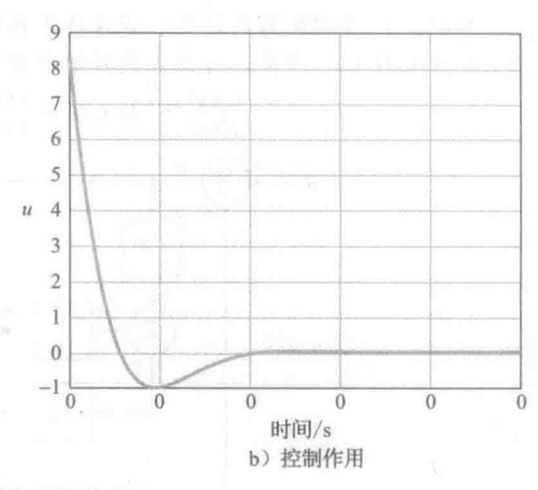


图 7.51 滞后-超前补偿系统的频率响应



a）阶跃响应



b）控制作用

图 7.52 滞后补偿系统的响应

现在，重新考虑前两个选择 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$ 的方法，从零点的角度来分析它们的含义。在第一种方法(自治估计器)下，令 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}\overline{N}$，将其代入到式(7.192)中，求控制器前馈零点，满足

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC})=0 \tag{7.196}$$

通过这个方程选取 $\boldsymbol{L}$，使得估计器方程的特征多项式等于 $\alpha_e(s)$。因此，我们已经造出了 n 个零点，它们与估计器的 n 个极点恰好位于相同位置上。由于零极点对消的现象(导致估计器状态不可控性)，整个传递函数极点只包含状态反馈控制器极点。

第二个方法(跟踪误差估计器)选取 $\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{L}$，$\overline{N}=0$。如果将这些条件代入式(7.191)，那么，前馈零点由下式给出：

521 ~ 523

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC} & \boldsymbol{L} \\ -\boldsymbol{K} & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{7.197}$$

上式最后一列右乘 $\boldsymbol{C}$，并从前 n 列中减去这一结果，然后，在最后一行左乘 $\boldsymbol{B}$，并将结果加到前 n 行上，式(7.197)可简化为

$$\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & \boldsymbol{L} \\ -\boldsymbol{K} & 0 \end{bmatrix}=0 \tag{7.198}$$

将式(7.198)与以状态描述形式给出的系统零点方程(7.63)进行比较，可以看出增加的零点是将输入矩阵用 $\boldsymbol{L}$ 代替，输出矩阵用 $\boldsymbol{K}$ 代替后所求得那些零点。因此，如果希望利用误差控制，就必须接受出现补偿器零点这种情况，这些补偿器零点取决于 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的取值，我们无法直接对它们进行控制。如前所述，对于低阶系统会产生一个超前补偿器作为单位反馈拓扑结构的一部分。

下面总结一下引入**参考输入**的影响。在控制器引入参考输入信号后，闭环系统的整个传递函数为

$$\mathcal{T}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_s\gamma(s)b(s)}{\alpha_e(s)\alpha_c(s)} \tag{7.199}$$

其中：K_s 为总的系统增益；$\gamma(s)$，$b(s)$ 为首一多项式。由多项式 $\alpha_c(s)$ 得到一个控制增益 K，使得 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}]=\alpha_c(s)$ 成立。由多项式 $\alpha_e(s)$ 得到估计器增益 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC}]=\alpha_e(s)$ 成立。作为设计者，因为要选择 $\alpha_c(s)$ 和 $\alpha_e(s)$，所以我们有足够的自由度来分配闭环系统的极点。处理多项式 $\gamma(s)$ 有三种方式：用图 7.48b 所示的实现来选择 $\gamma(s)$，使得 $\gamma(s)=\alpha_e(s)$ 成立。此时 $\boldsymbol{M}/\overline{N}$ 由式(7.187)给出；可以认为 $\gamma(s)$ 由式(7.198)给出，这样使用了误差控制；或者可以根据式(7.192)选取 $\boldsymbol{M}/\overline{N}$ 的值，从而给出具有任意参数的 $\gamma(s)$。必须指出，用这种方法没有移动由 $b(s)$ 表示的被控对象的零点，除非选取的 α_c 或 α_e 将这些零点的一部分抵消掉，否则，它们仍是闭环传递函数的一部分。

7.9.2 增益选择

现在，来讨论在选择 M 的三种方法中确定增益$\overline{N}$的选取过程。若使用方法1，控制规律由式(7.188a)给出且有$\hat{x}_{ss}=x_{ss}$。因此，可以使用式(7.99)中 $\overline{N}=Nu+\boldsymbol{KN}_x$ 或用 $u=N_u r-\boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{N}_x r)$，这是最常用的选择。若用方法2，则得到的结果无意义；重新考虑对于误差控制，$\overline{N}=0$。若使用方法3，选择$\overline{N}$使得整个闭环直流增益为1[一]。

524

则整个系统方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}-\overline{\boldsymbol{M}}\end{bmatrix}\overline{N}r \tag{7.200a}$$

$$y=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix} \tag{7.200b}$$

其中：$\overline{\boldsymbol{M}}$的值是用式(7.191)或式(7.187)选择零点位置得到的。如果有下式成立，则闭环系统具有单位直流增益：

$$-\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}-\overline{\boldsymbol{M}}\end{bmatrix}\overline{N}=1 \tag{7.201}$$

若从式(7.201)求解$\overline{N}$，得到[二]

$$\overline{N}=-\frac{1}{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^{-1}\boldsymbol{B}[1-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})^{-1}(\boldsymbol{B}-\overline{\boldsymbol{M}})]} \tag{7.202}$$

本节中的方法很容易推广到降阶估计器情况。

7.10 积分控制与鲁棒跟踪

7.9节中，选择增益$\overline{N}$会使系统对阶跃信号产生零稳态误差，但是，这一结果并不具有鲁棒性，原因是被控对象参数的任何变化都会导致误差不为零。所以，需要利用积分控制来得到鲁棒跟踪性能。

迄今为止，讨论过的状态空间设计方法中，还未提到积分控制，设计实例中没有产生包含积分项的补偿。在7.10.1小节中，我们将直接将系统误差的积分加到动态方程中，以此引入积分控制。积分控制是控制的一种特殊情况，它跟踪一个在稳态时不会达到零值的信号。我们将介绍(7.10.2小节)一种鲁棒跟踪方法，该方法提供了内模原理，以此解决整个跟踪问题与干扰抑制控制问题。最后，7.10.4小节中，我们将证明，若系统中有一个估计器，且系统需要抑制已知结构的扰动，则可以在估计器方程中引入扰动模型，用计算机对扰动的估计来抵消实际被控对象对输出的影响。

525

7.10.1 积分控制

首先，通过具有积分动态的扩维状态矢量，给出积分控制的特定解决方案。对于系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{B}_1 w \tag{7.203a}$$

$$y=\boldsymbol{Cx} \tag{7.203b}$$

通过给被控对象增加额外(积分)状态 x_I，将误差[三] $e=y-r$ 进行积分，并将该积分以及被控对象的状态 $\boldsymbol{x}$ 反馈回来，其中，x_I 服从如下微分方程：

$$\dot{x}_I=\boldsymbol{Cx}-r(=e)$$

因此

[一] 一个选取 $\overline{N}$ 的合理方法，使得当 r 和 y 都不变化时，从 r 到 u 的直流增益是从 y 到 u 的直流增益的相反数。如此选择后，控制器的结构就是误差控制和广义微分控制相结合的形式；如果系统能够执行1型行为，就会实现这种能力。

[二] 使用下式：$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{C}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\end{bmatrix}$

[三] 注意这里的符号：我们使用常规表达式的相反数。

$$x_I = \int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$$

增广状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_I\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}w \tag{7.204}$$

反馈律为

$$u=-[K_1\quad \boldsymbol{K}_0]\begin{bmatrix}x_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$

或简写为

$$u=-\boldsymbol{K}\begin{bmatrix}x_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$

有了这个系统的修正定义，我们就可以应用7.5节中给出的相似的设计方法；这样就得到了如图7.53所示的控制系统结构。

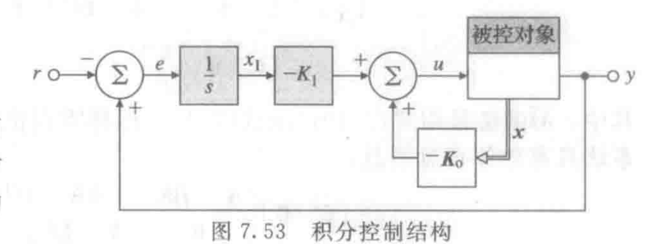


图 7.53　积分控制结构

例 7.34　电动机速度系统的积分控制

考虑下式描述的电动机速度系统：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+3}$$

即有 $A=-3$，$B=1$，和 $C=1$。设计系统使其具有积分控制，且在 $s=-5$ 处有两个极点。设计估计器，极点在 $s=-10$ 处。扰动与控制量在相同位置进入系统。计算跟踪响应和抗扰动响应。

解答。要求的极点位置等价于

$$\text{pc}=[-5;-5]$$

包含扰动 w 的增广系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_I\\ \dot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_I\\ x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(u+w)-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}r$$

因此，由下式，我们可以找到 $\boldsymbol{K}$：

$$\det\left(s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{K}\right)=s^2+10s+25$$

或者

$$s^2+(3+K_0)s+K_1=s^2+10s+25$$

因此，

$$\boldsymbol{K}=[K_1\quad K_0]=[25\quad 7]$$

用 acker 函数可以验证该结果。系统如图7.54所示，它具有几个反馈和一个扰动输入 w。

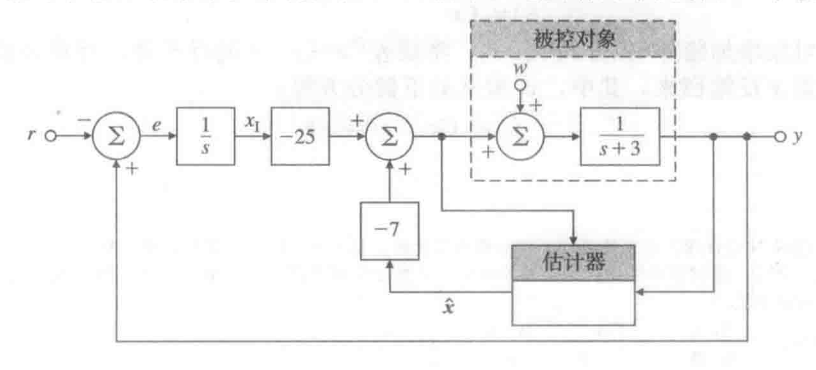


图 7.54　积分控制示例

估计器增益 $L=7$ 可由下式得到

$$\alpha_e(s)=s+10=s+3+L$$

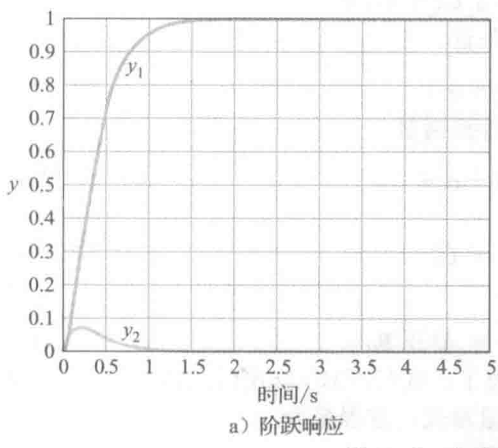
估计器方程具有以下形式：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}&=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly\\&=-10\hat{x}+u+7y\end{aligned}$$

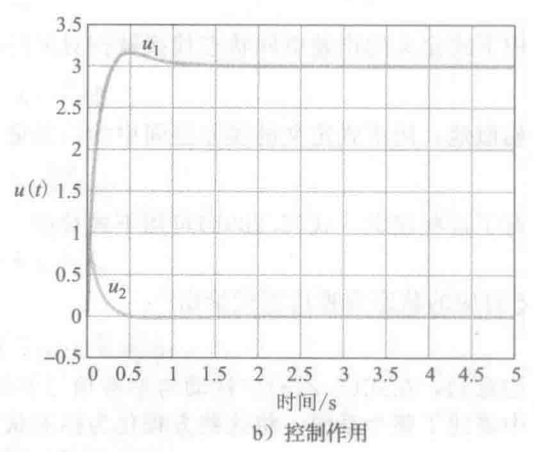
且

$$u=-K_0\hat{x}=-7\hat{x}$$

由阶跃参考输入 r 引起的阶跃响应 y_1，与由阶跃扰动输入 w 引起的输出扰动响应 y_2 如图 7.55a所示，相应的控制作用(u_1 和 u_2)如图 7.55b 所示。正如所期望的，系统为 1 型系统，它跟踪了阶跃参考输入信号而且渐近地抑制了阶跃扰动。◀



a）阶跃响应



b）控制作用

图 7.55　电动机转速系统的暂态响应

△7.10.2　鲁棒跟踪控制：误差空间法

在 7.10.1 小节中，为了获得对参考输入和扰动输入的积分作用，我们用一种直接的方式引入了积分控制，并选择了实现的结构。现在，介绍一种更解析的方式，赋予控制系统具有以下能力：(以零稳态误差)跟踪非衰减输入，(以零稳态误差)抑制非衰减扰动，如阶跃、斜坡或正弦输入。该方法基于将这些外部信号满足的方程作为问题公式的一部分，然后在误差空间中求解控制问题，因此即使输出正在跟踪一个非衰减甚至一个增加的指令信号(像斜坡信号)，或者某些参数改变了(鲁棒性)，误差也一定可以到达零值。虽然该方法对满足二阶微分方程的信号进行了说明，但是，将该方法拓展到更复杂的信号也不困难。

526 ~ 528

假设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u+\mathbf{B}_1w \tag{7.205a}$$

$$y=\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{7.205b}$$

而且，参考信号满足一个特定的微分方程。产生输入的方程的初始条件是未知的。例如，输入可以为斜率和初始值均未知的斜坡信号，同样类型的被控对象扰动也可能存在。希望为该系统设计一个控制器，使得闭环系统具有规定的极点，并能够无稳态误差地跟踪输入指令信号，且抑制上述扰动。我们仅对二阶微分方程进行讨论。定义参考输入满足如下关系

$$\ddot{r}+\alpha_1\dot{r}+\alpha_2r=0 \tag{7.206}$$

扰动恰好满足同一方程：

$$\ddot{w}+\alpha_1\dot{w}+\alpha_2w=0 \tag{7.207}$$

(跟踪)误差定义为

$$e = y - r \tag{7.208}$$

跟踪 r 和抑制 w 的问题可以看作是设计一种控制律来提供误差调节的练习；也就是说，随着时间的增大，误差 e 将趋于零。即使最初的系统参数出现了一些“小”扰动，在稳态时 e 也要控制到零点，从这种意义上说，控制必须结构稳定或具有鲁棒性。注意，在实际中，被控对象的模型并非理想的，参数值实际上总要发生一些变化，所以鲁棒性始终很重要。

我们知道指令输入满足式(7.206)，而且希望从误差方程中消去参考信号。先将式(7.206)中的 r 用式(7.208)中的误差替换。这样式(7.206)中参考输入信号消去了，从而得到了由状态表示的误差公式

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_2 e = \ddot{y} + \alpha_1 \dot{y} + \alpha_2 y \tag{7.209a}$$

$$= \boldsymbol{C}\ddot{\boldsymbol{x}} + \alpha_1 \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \alpha_2 \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{7.209b}$$

用下式定义的误差空间状态代换被控对象的状态矢量：

$$\boldsymbol{\xi} \overset{\text{def}}{=\!=} \ddot{\boldsymbol{x}} + \alpha_1 \dot{\boldsymbol{x}} + \alpha_2 \boldsymbol{x} \tag{7.210}$$

相似地，用下式定义的误差空间中的控制量来代替控制量

529

$$\mu \overset{\text{def}}{=\!=} \ddot{u} + \alpha_1 \dot{u} + \alpha_2 u \tag{7.211}$$

有了这些定义，式(7.209b)可用下式替换

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_2 e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\xi} \tag{7.212}$$

$\boldsymbol{\xi}$ 对应的状态方程由下式给出[1]：

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dddot{\boldsymbol{x}} + \alpha_1 \ddot{\boldsymbol{x}} + \alpha_2 \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{B}\mu \tag{7.213}$$

注意到，在式(7.213)中扰动与参考信号都抵消掉了。式(7.212)与式(7.213)在误差空间中描述了整个系统。将这些方程化为标准状态变量形式，方程变为

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{A}_s \boldsymbol{z} + \boldsymbol{B}_s \mu \tag{7.214}$$

其中：

$$\boldsymbol{z} = [e \quad \dot{e} \quad \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

且

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boldsymbol{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{7.215}$$

若误差系统($\boldsymbol{A}_s$，$\boldsymbol{B}_s$)可控，那么用状态反馈可以使其具有任意动态特性。若被控对象($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$)可控，且它的零点与参考信号特征方程 $\alpha_r(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$ 的任意根均不相同，则误差系统($\boldsymbol{A}_s$，$\boldsymbol{B}_s$)可控。[2]假定这些条件成立，则存在如下形式控制律：

$$\mu = -[K_2 \quad K_1 \quad \boldsymbol{K}_0] \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{z} \tag{7.216}$$

通过极点配置可以使得误差系统实现任意动态特性。现在，需要将这一控制律用实际过程状态 $\boldsymbol{x}$ 和实际控制量表示。将式(7.216)，式(7.210)与式(7.211)三式联立，得到用 u 和 $\boldsymbol{x}$ 表示的控制律$\left(\text{以下用 } u^{(2)} \text{ 表示} \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}\right)$：

$$(u + \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{x})^{(2)} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_i (u + \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{x})^{(2-i)} = -\sum_{i=1}^{2} K_i e^{(2-i)} \tag{7.217}$$

---

[1] 注意，这一概念可拓展到更复杂的具有 r 的方程和多变量系统。

[2] 例如，不可能给对象增加积分控制使其具有原点处的零点。

跟踪常值输入时，式(7.217)的实现结构很简单。在这种情况下，参考输入的方程为$\dot{r}=0$。以 u 和 $\boldsymbol{x}$ 表示的控制律(式(7.217))简化为

$$\dot{u}+\boldsymbol{K}_0\dot{\boldsymbol{x}}=-K_1 e \tag{7.218}$$

530

这时，只需对上式进行积分即可得到控制律，积分控制作用

$$u=-K_1\int^t e(\tau)\mathrm{d}(\tau)-\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} \tag{7.219}$$

该系统的框图如图 7.56 所示，从图中可以清楚看到控制器中存在一个纯积分器。在此情况下，图 7.56 所示的内模法与图 7.54 所示的特别方法之间的唯一差别在于积分器和增益的相对位置。

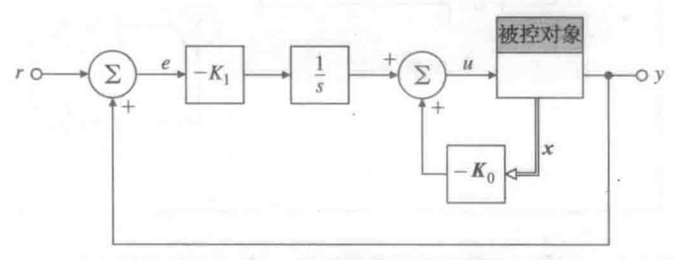


图 7.56 使用内模的积分控制

为了清晰说明误差空间方法对鲁棒跟踪的能力，我们提出一个更复杂的问题：要求以零稳态误差跟踪正弦输入。例如，一个大容量磁盘头组装中的控制问题。

例 7.35 磁盘驱动伺服机构：跟踪正弦输入的鲁棒控制

一个简单的计算机磁盘驱动伺服机构的标称模型由下式给出：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\quad J=0$$

由于磁盘上的数据不完全在中心圆上，伺服系统必须跟踪一个角频率 ω_0 的正弦信号，其中，ω_0 是由轴速所决定的。

(1) 给出系统控制器的结构，使得该系统以零稳态误差跟踪给定的参考输入。

(2) 假定 $\omega_0=1$，期望闭环极点为$-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}\pm \mathrm{j}1$。

(3) 用 Matlab 和 Simulink 验证该系统的跟踪特性和干扰抑制性能。

解答。

(1) 参考输入满足微分方程 $\ddot{r}=-\omega_0^2 r$，所以，有 $\alpha_1=0$ 和 $\alpha_2=\omega_0^2$。有了这些值，根据式(7.215)可得误差－状态矩阵为

$$\boldsymbol{A}_s=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}_s=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_s-\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{K}$ 的特征方程为

$$s^4+(1+K_{02})s^3+(\omega_0^2+K_{01})s^2+[K_1+\omega_0^2(1+K_{02})]s+K_{01}\omega_0^2K_2=0$$

根据上式用极点配置法选择增益。根据式(7.217)实现的补偿器如图 7.57 所示，从该图可以清楚地看到，在控制器中存在一个角频率为 ω_0 的振荡器(称为输入振荡器的内模)。[⊖]

⊖ 这是内模原理的特殊情况，内模原理要求外部信号的模型在控制器内部，以实现鲁棒跟踪以及干扰抑制，系统这一问题的处理方法参见 *Francis and Wonham*(1975)。

图 7.57 伺服机构精确跟踪角频率为 ω_0 的正弦信号的补偿器结构

(2) 假设 $\omega_0 = 1\text{rad/s}$，期望闭环极点为

$$\text{pc} = [-1 + \text{j} * \sqrt{3}; -1 - \text{j} * \sqrt{3}; -\sqrt{3} + \text{j}; -\sqrt{3} - \text{j}]$$

531 ~ 532

那么，反馈增益为

$$\boldsymbol{K} = [K_2 \quad K_1 : \boldsymbol{K}_0] = [2.0718 \quad 16.3923 : 13.9282 \quad 4.4641]$$

由此得到控制器为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_c = \boldsymbol{A}_c \boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{B}_c e$$

$$u = \boldsymbol{C}_c \boldsymbol{x}_c - \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_c = \begin{bmatrix} -16.3923 \\ -2.0718 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_c = [1 \quad 0]$$

相关 Matlab 语句如下。

```
% plant matrices
A=[0 1; 0 -1];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=[0];
% form error space matrices
omega=1;
As=[0 1 0 0;-omega*omega 0 1 0;0 0 0 1;0 0 0 -1];
Bs=[0;0;B];

% desired closed-loop poles
j=sqrt(-1);
pc=[-1+sqrt(3)*j ;-1-sqrt(3)*j;-sqrt(3)+j;-sqrt(3)-j];
K=place(As,Bs,pc);
% form controller matrices
K1=K(:,1:2);
Ko=K(:,3:4);
Ac=[0 1;-omega*omega 0];
Bc=-[K(2);K(1)];
Cc=[1 0];
Dc=[0];
```

控制器的频率响应如图 7.58 所示，从该图中看出，在 $\omega_0 = 1\text{rad/s}$ 的转速频率时，增益为正无穷。从 r 到 e 的频率响应[即灵敏度函数 $\mathcal{S}(s)$]如图 7.59 所示，从图中可以看到，

在转动频率 ω_0=rad/s 处有一个尖锐凹口。从 w 到 y 的传递函数的频率响应也有相同的凹口。

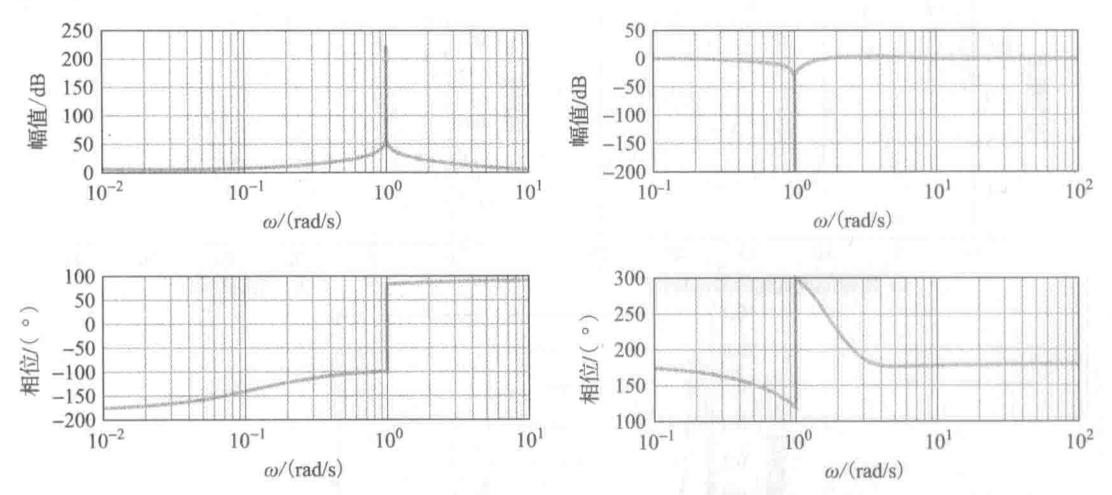


图 7.58　对于鲁棒伺服机构控制器的频率响应　　图 7.59　鲁棒伺服机构频率响应的灵敏度函数

(3) 图 7.60 给出该系统的 Simulink 仿真图。虽然在 Matlab 环境下也可以进行仿真，但用 Simulink 的交互式图解环境更具指导意义。Simulink 也提供了追加非线性特性(见第 9 章)和有效进行鲁棒研究的能力。[⊖] 系统的跟踪性质如图 7.61a 所示，该图显示了系统的渐近跟踪性质。相应的控制量和跟踪误差信号分别如图 7.61b 和 c 所示。系统的干扰抑制性质如图 7.62a所示，该图显示了对正弦扰动输入的渐近抑制过程。相应的控制效果如图 7.62b 所示。鲁棒的伺服机构的闭环频率响应[即互补传递函数 $\mathcal{T}(s)$]如图 7.63 所示。由该图可知，从 r 到 y 的频率响应在 ω_0=rad/s 处为 1，与要求相符。

533

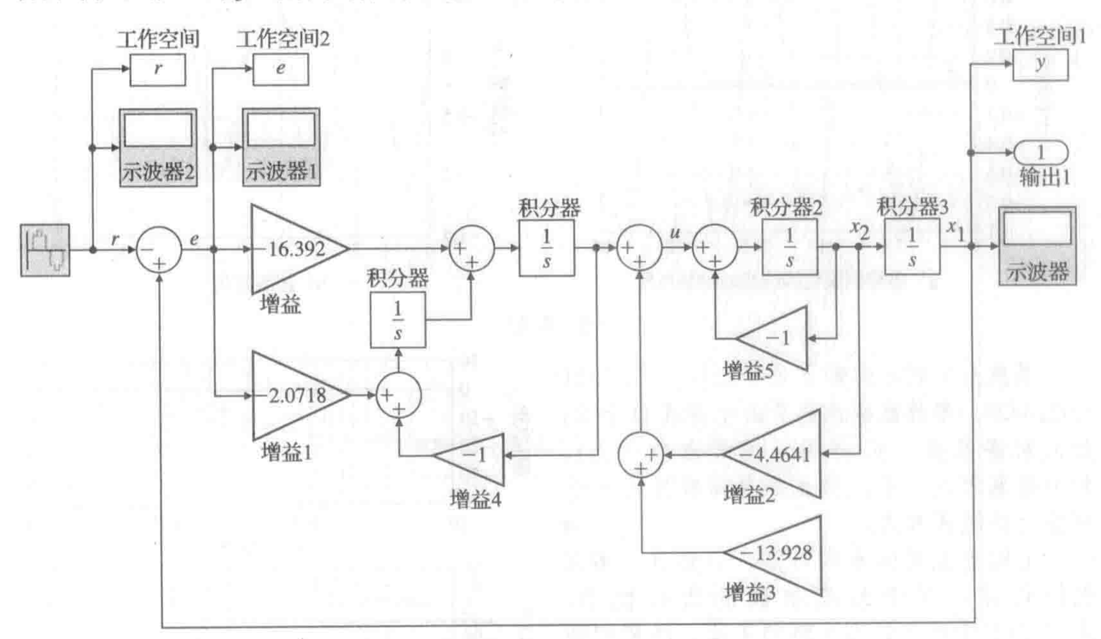
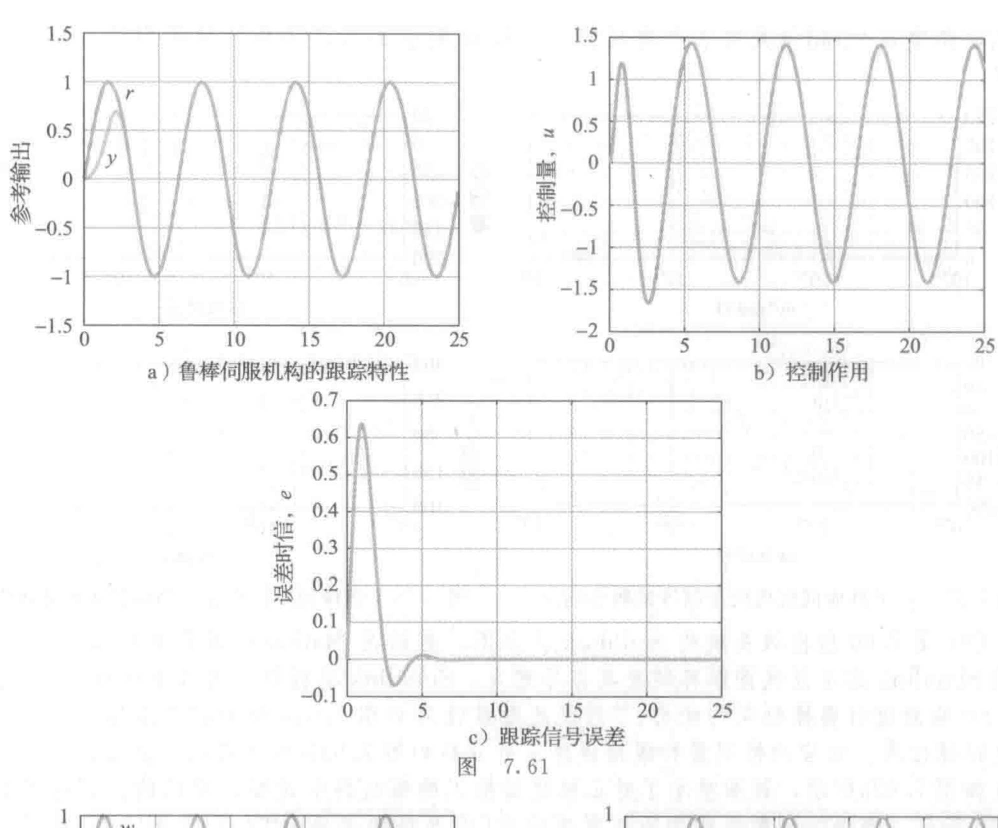


图 7.60　鲁棒伺服机构 Simulink 框图

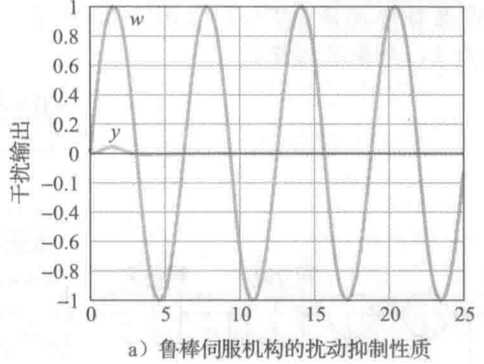
⊖ 一般来说，设计可以在 Matlab 上完成，而非线性的仿真可在 Simulink 上进行。



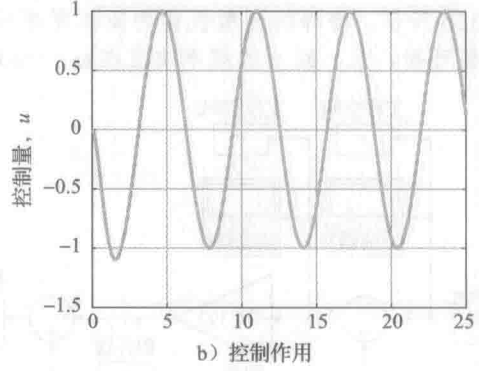
a）鲁棒伺服机构的跟踪特性　　b）控制作用

c）跟踪信号误差

图　7.61



a）鲁棒伺服机构的扰动抑制性质



b）控制作用

图　7.62

系统从 r 到 e 的零点位于 $\pm$j，$-2.7321\pm$j2.5425。鲁棒跟踪性能是由于存在位于 $\pm$j 处的阻塞零点。从 w 到 y 的零点位于 $\pm$j，均为阻塞零点。干扰抑止的鲁棒特性是由于存在这些阻塞零点。◀

由极点配置的本质可知，只要 $\boldsymbol{A}_s-\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{K}$ 保持稳定，对于系统参数的所有扰动，式(7.214)中所有状态 z 将趋于零。注意到被抑制的信号是那些满足这些方程的信号，方程中 α_i 的值实际上在外部信号模型中实现。该方法假设这些均为已知，且可精确实现。若这些实现的值有误，就会产生稳态误差。

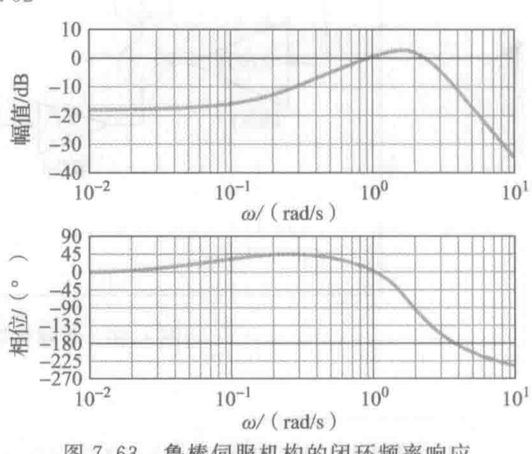


图 7.63　鲁棒伺服机构的闭环频率响应

现在重新研究对于积分控制7.10.1小节中的例子。

例7.36 用误差空间设计法实现的积分控制

对于系统

$$H(s)=\frac{1}{s+3}$$

其状态变量描述为

$$A=-3,\quad B=1,\quad C=1$$

为该系统构造一个极点为 $s=-5$ 的控制器来跟踪满足 $\dot{r}=0$ 的输入。

解答。误差空间系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \xi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mu$$

其中：$e=y-r$，$\xi=\dot{x}$，和 $\mu=\dot{u}$。如果取期望的特征方程为

$$\alpha_c(s)=s^2+10s+25$$

那么，$\boldsymbol{K}$ 的极点配置方程为

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_s+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{K}]=\alpha_c(s) \tag{7.220}$$

将式(7.220)详细展开得

$$s^2+(3+K_0)s+K_1=s^2+10s+25$$

得到

$$\boldsymbol{K}=[25\quad 7]=[K_1\quad K_0]$$

系统实现如图7.64所示。该系统从 r 到 e 的传递函数，即灵敏度函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\mathcal{S}(s)=-\frac{s(s+10)}{s^2+10s+25}$$

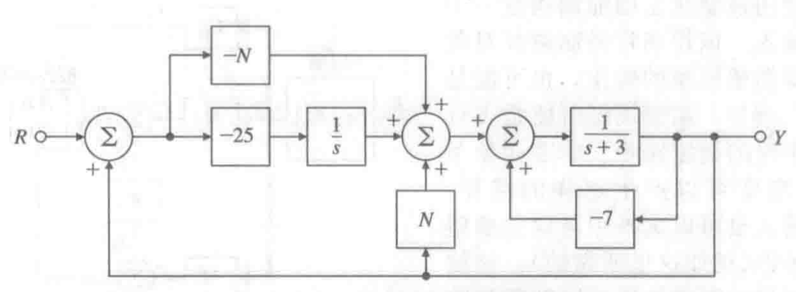


图7.64 具有前馈控制的内模示例

它有一个位于 $s=0$ 的阻塞零点，该零点阻止了常值输入影响误差。闭环传递函数，即互补灵敏度函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{T}(s)=1-\mathcal{S}(s)=\frac{25}{s^2+10s+25}$$ ◀

图7.65所示的结构中，允许我们加入参考输入的前馈，这给零点分配提供一个额外的自由度。若在式(7.219)加入一个与 r 成正比的项，则有

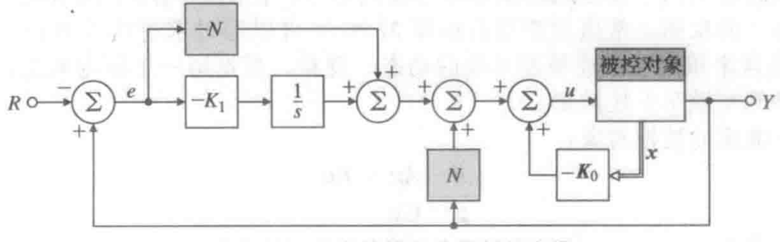


图7.65 具有前馈积分控制的内模

$$u = -K_1\int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} + Nr \tag{7.221}$$

这样，就产生了一个位于$-K_1/N$的零点。通过选取这个零点的位置，可以改善系统的暂态响应。在实际实现中，可将式(7.221)改写成e的形式，即

534 ~ 538

$$u = -K_1\int^t e(\tau)\mathrm{d}\tau - \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{x} + N(y-e) \tag{7.222}$$

系统框图如图7.65所示。在例子中，总的传递函数变为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{Ns+25}{s^2+10s+25}$$

注意到对于任意N值，直流增益均为1，而且通过对N选择，可以将零点配置为能改善系统动态响应的任意实值。设置零点位置的一个策略是，让它与系统的某个极点相消，本例中取极点为$s=-5$。对于$N=5$、0、8的情况，系统的阶跃响应如图7.66所示。因为知道积分控制设计可以消去一个极点，所以一定可以选取一个期望控制极点，使其既为实数又能通过恰当的选择N的实现对消。

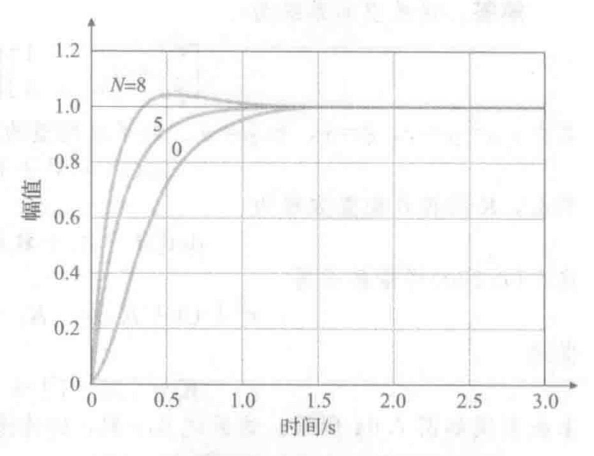


图7.66 带积分控制与前馈的阶跃响应

△7.10.3 模型跟随设计

跟踪一个持续参考输入的相关方法叫做模型跟随设计(见图7.67)。这是一个开环方法，使用模型状态的前馈构造一个指定的控制输入。该控制将强制被控对象输出渐近跟踪期望模型的输出，也可能是持续的跟踪。例如，期望模型可能是飞行器需要精确跟踪的指定路径。非零初始条件的LTI模型常可以产生这样的路径。或者，脉冲输入也可以选择用来建立期望模型的初始条件(正如这里所做的)。该技术可以产生更好的跟踪性能来跟随期望路径。在布鲁森(1994年)著作中对其有更全面的描述，包括干扰抑制的情况，用于为波音747型设计着陆照明的控制理论。假设用三个矩阵($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$)描述被控对象，有状态$\boldsymbol{x}$和输出y。而且，假设给定一个产生被控对象期望响应的模型，该被控对象由三个矩阵($\boldsymbol{A}_m$，$\boldsymbol{B}_m$，$\boldsymbol{C}_m$)描述，有状态$\boldsymbol{z}$和输出y_m。该方法是，用状态$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{z}$来构造控制信号，使得误差$y-y_m$“快速”接近零点。换句话说，我们想要被控对象以一个趋于零的误差跟随模型。接下来你会看到，通过调节控制输入，使得被控对象的输出信号被迫跟踪期望参考输入信号。控制律利用了模型状态$\boldsymbol{z}$的前馈和被控对象状态$\boldsymbol{x}$的反馈。常值前馈增益矩阵$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{N}$可以通过求解线性方程组得到。设计反馈增益$\boldsymbol{K}$通常来镇定或加速被控对象的动态。现在，根据第一个原则来进行模型跟随设计，并通过举例来说明上述结果。

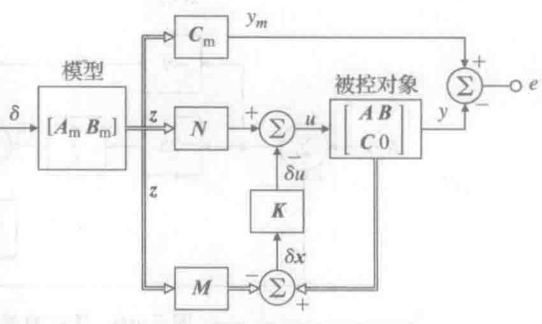


图7.67 模型跟随设计的框图

539

考虑如下描述的被控对象：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u \tag{7.223}$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{7.224}$$

期望模型由下式给出：

$$\dot{z} = \boldsymbol{A}_m z + \boldsymbol{B}_m \delta(t) \tag{7.225}$$

$$y_m = \boldsymbol{C}_m z \tag{7.226}$$

其中：$\boldsymbol{A}_m$ 为 $n_m \times m_m$ 矩阵。此时，由脉冲 $\delta(t)$，或本质上只是初始条件来驱动模型。假设 u，y 和 y_m 维数相同。令

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}z + \delta\boldsymbol{x} \tag{7.227}$$

$$u = \boldsymbol{N}z + \delta u \tag{7.228}$$

$$y = y_m + \delta y \tag{7.229}$$

其中：$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 为常矩阵。我们希望通过快速地 $\delta y \to 0$ 使得 $y \to y_m$。如果将式(7.227)和式(7.228)代入式(7.223)与式(7.224)中，那么可以得到

$$\boldsymbol{M}\dot{z} + \delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{M}z + \delta\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{N}z + \delta u) \tag{7.230}$$

$$y = y_m + \delta y = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{M}z + \delta\boldsymbol{x}) \tag{7.231}$$

540

将上式改写为

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\delta u + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_m + \boldsymbol{B}\boldsymbol{N})z - \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}_m\delta(t) \tag{7.232}$$

$$\delta y = \boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{C}_m)z \tag{7.233}$$

若选择矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 使得上述矩阵乘以式(7.232)和式(7.233)中的模型状态 z 消失，那么我们有如下两个矩阵方程[⊖]：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_m + \boldsymbol{B}\boldsymbol{N} = 0 \tag{7.234}$$

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}_m \tag{7.235}$$

式(7.234)称为西尔维斯特(Sylvester)方程。式(7.234)和式(7.235)中，有 $n_m(n+1)$ 个线性方程组，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 中有 $n_m(n+1)$ 个未知元素。方程组式(7.234)和式(7.235)的解存在的一个充要条件是被控对象的传递零点与模型 $\boldsymbol{A}_m$ 的特征值不匹配。令控制律为

$$u = \boldsymbol{N}z - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{M}z) \tag{7.236}$$

其中：$\boldsymbol{K}$ 按通常的方法设计，使得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ 具有满意的稳态控制。我们观察到，

$$\delta u = u - \boldsymbol{N}z = \boldsymbol{N}z - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{M}z) - \boldsymbol{N}z = -\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{x} \tag{7.237}$$

在给定控制律作用下，式(7.236)即被控对象方程变为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{N}z - \boldsymbol{K}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{M}z)) \\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{N} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{M})z\end{aligned} \tag{7.238}$$

在频域中，注意到 $\boldsymbol{Z}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m$，可以写为

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{N} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{M})(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m \tag{7.239}$$

现在，将式(7.234)中的 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}$ 代入上式，并加减 $s\boldsymbol{M}$，可以写为

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}[\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_m - \boldsymbol{A}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{M}](s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m \tag{7.240}$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)](s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m \tag{7.241}$$

若乘开，则结果为

$$\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{M}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m - (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}_m \tag{7.242}$$

因此，输出 $Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)$ 为

$$Y(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{M}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m - \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}_m \tag{7.243}$$

541

最后，由于 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}_m$，则有

$$Y(s) = \boldsymbol{C}_m(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_m)^{-1}\boldsymbol{B}_m - \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}_m \tag{7.244}$$

因此，在时域中，有

$$y(t) = y_m(t) - [\text{由 } \boldsymbol{K} \text{ 控制的衰减暂态项}] \tag{7.245}$$

这正是我们开始时提出的。

例 7.37 磁盘驱动器的模型跟随设计

假设要跟随的模型由振荡器给出，即

⊖ Bryson(1994)提出了使用 Matlab Kronecker product(kron)指令来解方程组(7.234)和(7.235)的一个算法。

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{\mathrm{m}}=[1\quad 0]$$

该被控对象和例 7.36 中所给出的相同，而且希望跟踪相同的正弦波信号。假设期望的闭环极点为

$$\mathrm{pc}=[-1+\mathrm{j}*\sqrt{3};-1-\mathrm{j}*\sqrt{3}]$$

解答。反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=[4\quad 1]$$

通过解方程组式(7.234)和式(7.234)，可以得到

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{N}=[-1\quad 1]$$

内模设计方法与例 7.36 中的相同。比较内模法与模型跟随设计得到的跟踪误差分别如图 7.68 与图 7.69 所示。两种方法都以渐近的方式精确跟踪正弦信号。模型跟随方法具有较敏捷的响应，较小的误差最大值，如图 7.69 所示。

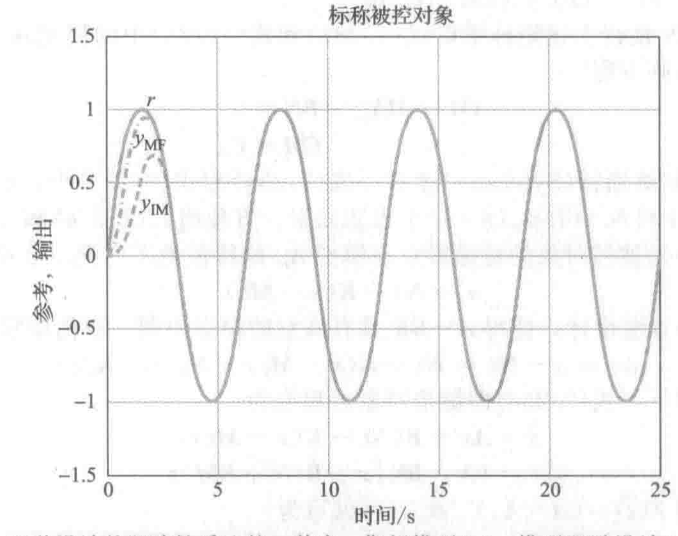


图 7.68　两种设计的跟踪性质比较：其中，期望模型(r)，模型跟随设计(y_{MF})，具有标称被控对象的内模设计(y_{IM}，例 7.36)

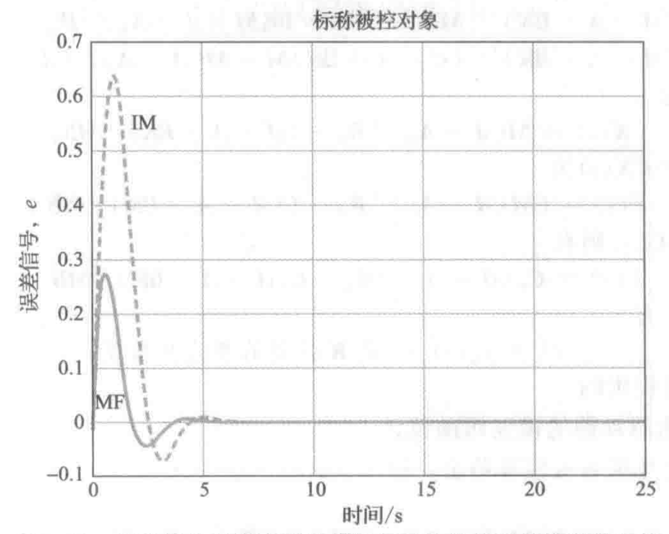


图 7.69　两种设计的跟踪误差信号与标称被控对象模型的比较

现在，让我们研究当被控对象存在扰动时，上述两种设计方法的鲁棒性。为了比较鲁棒性，假设模型跟随系统与内模闭环系统都在运行，但是被控对象系统矩阵具有如下摄动情况：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix}$$

上述两个情况的跟踪误差如图 7.70 所示。注意到，图 7.70 中的模型跟随设计有较小的误差最大值，但是，当内模设计连续精确跟踪正弦波时，就会存在一个持续误差，因此不具有鲁棒性。◀

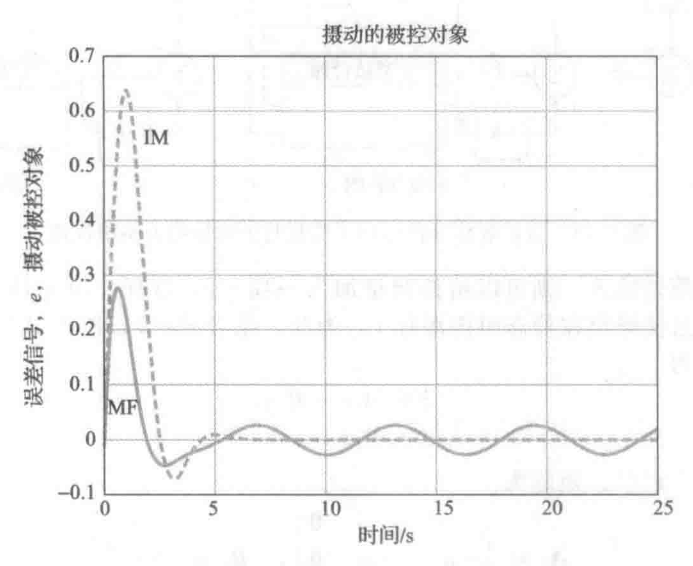


图 7.70　摄动的被控对象的模型的两个设计方案的跟踪误差的比较

△7.10.4　扩展估计器

目前为止，关于鲁棒控制的讨论是基于全状态反馈的控制系统进行的。若状态不可获得，则通常情况下，全状态反馈 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 可用之前建立的状态估计器的状态估计 $\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}$ 进行代替。最后，研究使用外部输入的控制设计方法，本节，我们研究一种跟踪参考输入并且抑制干扰的设计方法。这一方法基于增广估计器，包含了对外部信号的估计，在此方式下可以消除外部信号对系统误差的影响。

542 ~ 543

假设被控对象由下式给出

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{B}w \tag{7.246a}$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{7.246b}$$

$$e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - r \tag{7.246c}$$

而且，假设参考信号 r 和干扰信号 w 已知，且满足下式[⊖]

$$\alpha_w(s)w = \alpha_\rho(s)w = 0 \tag{7.247}$$

$$\alpha_r(s)r = \alpha_\rho(s)r = 0 \tag{7.248}$$

其中：

$$\alpha_\rho(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

在图 7.71a 中，上式对应的多项式为 $\alpha_w(s)$ 和 $\alpha_r(s)$。通常情况下，图 7.71b 中的等效扰动多项式 $\alpha_\rho(s)$ 选取为 $\alpha_w(s)$ 和 $\alpha_r(s)$ 的最小公倍数。第一步是意识到，就输出的稳态响应而言，存在一个等效输入信号 ρ，该信号满足 r 和 w 相同的方程，而且与图 7.71b 所示的类似，所给出的控制信号都是在相同位置进入系统的。像之前一样，必须假设被控对象的零

⊖　再次研究了外部信号的二阶方程满足的结果，该结果可以拓展到高阶方程组的研究中。

点与式(7.247)任意一个根均不相等。为此，我们可以用下式代替方程组式(7.223)：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(u+\rho) \tag{7.249a}$$

$$e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{7.249b}$$

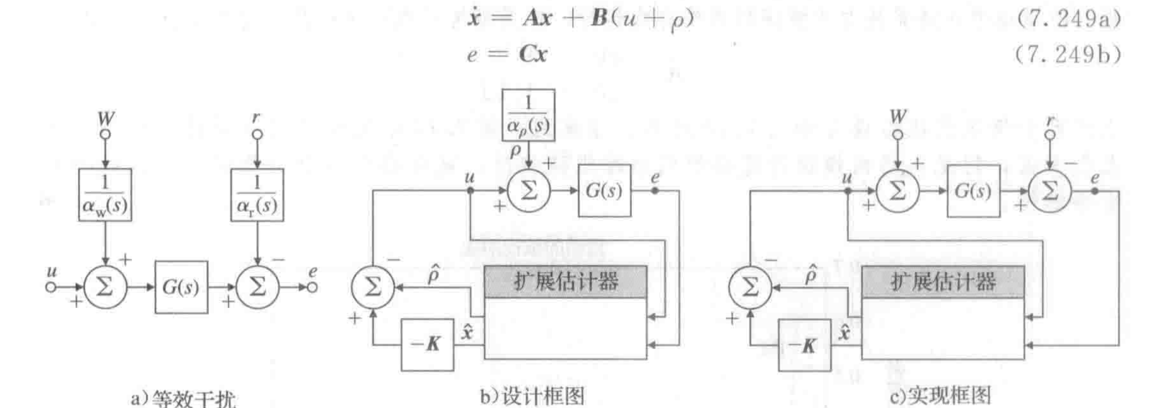


图 7.71　带扩展估计器的用于跟踪与干扰抑制的系统框图

若能估计该等效输入，则可以给控制量加入一项$-\hat{\rho}$，这样，将消掉真实干扰和参考输入的影响，而且使输出在稳态时能跟踪 r。为此，结合式(7.223)与式(7.247)，得到一个状态描述形式为

$$\dot{z} = \boldsymbol{A}_s z + \boldsymbol{B}_s u \tag{7.250a}$$

$$e = \boldsymbol{C}_s z \tag{7.250b}$$

其中：$z=[\rho \quad \dot{\rho} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。矩阵为

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boldsymbol{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \tag{7.251a}$$

$$\boldsymbol{C}_s = [0 \quad 0 \quad \boldsymbol{C}] \tag{7.251b}$$

既然 u 不能影响 ρ，所以由式(7.251)给出系统是不可控的。然而，若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为可观测的，且如果系统($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$)不具有零点，也就是式(7.247)的根，那么式(7.251)的系统将是可观测的，我们可以构造观测器计算被控对象的估计状态和 ρ 的估计值。估计器方程为标准形式，但控制器则不然：

544~545

$$\dot{\hat{z}} = \boldsymbol{A}_s \hat{z} + \boldsymbol{B}_s u + \boldsymbol{L}(e - \boldsymbol{C}_s \hat{z}) \tag{7.252a}$$

$$u = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\rho} \tag{7.252b}$$

按照原始变量，估计器方程为

$$\dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\rho}} \\ \ddot{\hat{\rho}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boldsymbol{0} \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \dot{\hat{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \boldsymbol{L}_3 \end{bmatrix} [e - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}] \tag{7.253}$$

系统设计的总框图如图 7.71b 所示。若写出式(7.253)中含$\hat{\boldsymbol{x}}$的最后一个方程，并代入式(7.252b)，消掉含$\hat{\rho}$的项，得到了结果的简化形式为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}} &= \boldsymbol{B}\hat{\rho} + \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\rho}) + \boldsymbol{L}_3(e - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{L}_3(e - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\bar{u} + \boldsymbol{L}_3(e - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}) \end{aligned}$$

由式(7.253)的估计器和式(7.252b)的控制，可得状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\rho}) + \boldsymbol{B}\rho \tag{7.254}$$

根据估计误差，式(7.254)可改写为

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + B\tilde{\rho} \tag{7.255}$$

由于设计的估计器必须为稳定的，所以稳态下，$\tilde{\rho}$与$\tilde{x}$的值趋于零，而且状态的终值不会受到外部输入的影响。用于实现的系统框图由图7.71c给出。下面给出一个非常简单的例子来说明设计的步骤。

例7.38 通过扩展估计器实现电机速度系统的稳态跟踪和干扰抑制

电机转速系统中，构造一个估计器控制状态并消除输出的常值偏差，同时跟踪一个常值参考输入，该系统描述如下：

$$\dot{x} = -3x + u \tag{7.256a}$$
$$y = x + w \tag{7.256b}$$
$$\dot{w} = 0 \tag{7.256c}$$
$$\dot{r} = 0 \tag{7.256d}$$

将控制极点置于$s=-5$处，两个扩展估计器的极点为$s=-15$。

解答。首先，通过忽略等效干扰设计控制律。然而，通过观察注意到值为-2的增益将把单极点从-3移动到期望值-5，因此，$K=2$。增加等效外部输入ρ的增广系统由下式给出，其中ρ取代了实际扰动ω和参考输入r。

$$\dot{\rho} = 0$$
$$\dot{x} = -3x + u + \rho$$
$$e = x$$

546

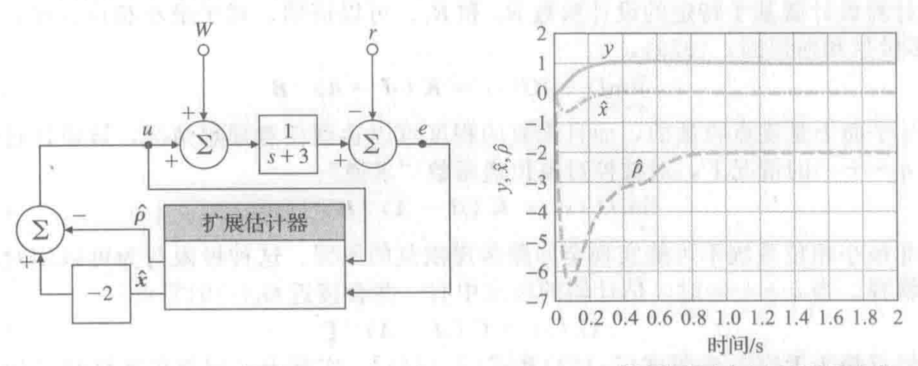
扩展估计器方程为

$$\dot{\hat{\rho}} = l_1(e - \hat{x})$$
$$\dot{\hat{x}} = -3\hat{x} + u + \hat{\rho} + l_2(e - \hat{x})$$

由下式的特征方程得到估计器误差增益为$\boldsymbol{L} = [225 \quad 27]^{\mathrm{T}}$：

$$\det\begin{bmatrix} s & l_1 \\ 1 & s+3+l_2 \end{bmatrix} = s^2 + 30s + 225$$

系统框图由图7.72a给出，对输入的阶跃响应如图7.72b所示，其中输入信号为控制指令r(在$t=0$s处加入)和扰动w(在$t=0.5$s进入)。



a) 框图 b) 指令阶跃响应与干扰阶跃响应

图7.72 具有扩展估计器的电机转速系统

△7.11 回路传递恢复

在状态反馈控制器回路中引入估计器可能对系统的鲁棒稳定特性产生不利的影响(即相位裕度(PM)和增益裕度(GM)特性可能会变得非常差，多伊尔(Doyle)提出的著名例子(多伊尔，1978年)说明了这一点)。然而，可以通过改进估计器设计，以便试着在一定程度上恢复LQR鲁棒稳定性。这一过程称为回路传递恢复(LTR)，它对最小相位系统尤为

有效。为了实现这种恢复，可以将一部分回路传递恢复估计器极点置于被控对象零点处(或其附近)，将其余极点移动(足够远)到左半平面。回路传递恢复的思想就是要用这种方法重新设计估计器，构建回路增益特性来近似 LQR 的回路增益特性。

547

使用回路传递恢复意味着可以在反馈控制系统的临界(回路断裂)点处设计反馈控制器，以实现期望的灵敏度[$\mathcal{S}(s)$]和互补灵敏度函数[$\mathcal{T}(s)$](例如，可在被控对象的输入或输出处加上反馈控制器)。当然，实现鲁棒稳定性的这种改进是要付出代价的！这种新设计的控制系统的传感器噪声灵敏度特性可能变差。直观上，可以认为，将(某些)估计器极点移动得足够快，使得回路增益近似等于 LQR 的回路增益。或者，可以考虑必要时将被控对象的传递函数"求逆"，用动态补偿器将被控对象所有左半平面的极点消去，以获得期望的回路模型。很明显，这需要一些折中，设计者需认真考虑，对给定的问题根据控制系统的性能指标做出正确的选择。

如今，回路传递恢复是一种非常有名的技术，并已经提出了切实可行的设计过程。(阿塔斯(Athans)，1986；斯坦因(Stein)和阿塔斯，1987；萨伯里(Saberi)等，1993)。该设计过程适用于非最小相位系统，但可能恢复的程度没有保证。LTR 方法可被视为一种系统的方法，用于研究基于线性二次型的补偿器设计的折中设计(多伊尔和斯坦因，1981)。现将 LTR 问题公式化。

考虑线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u + w \tag{7.257a}$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + v \tag{7.257b}$$

其中：w 和 v 是互不相关的零均值白色高斯过程和传感器噪声，它们的协方差矩阵为 $\boldsymbol{R}_w \geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{R}_v \geqslant 0$。估计器设计满足

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}(y - \hat{y}) \tag{7.258a}$$

$$\hat{y} = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{7.258b}$$

得到通用的动态补偿器为

$$D_c(s) = -\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{L} \tag{7.259}$$

现在，我们来处理噪声参数 $\boldsymbol{R}_w$ 和 $\boldsymbol{R}_v$，它们在动态补偿器的设计中是关键所在。不失一般性，选取 $\boldsymbol{R}_w = \boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{R}_v = 1$，对于回路传递恢复，假设 $\boldsymbol{\Gamma} = q\boldsymbol{B}$，其中，$q$ 为标量设计参数。这样估计器设计就基于特定的设计参数 $\boldsymbol{R}_w$ 和 $\boldsymbol{R}_v$。可以证明，对于最小相位系统，当 q 变大时(多伊尔和斯坦因，1979)，

$$\lim_{q\to\infty} D_c(s)G(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{7.260}$$

上式在 s 平面上是逐点收敛的，而且恢复的程度可以达到任意理想情况。该设计过程实际上是在 $q \to +\infty$ 的情况下，对被控对象传递函数"求逆"：

548

$$\lim_{q\to\infty} D_c(s) = \boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}G^{-1}(s) \tag{7.261}$$

这正是非最小相位系统不可能实现全回路传递恢复的原因。这种极限行为可以用对称的根轨迹来解释。当 $q \to +\infty$ 时，估计器的极点中有一些会接近 $G_e(s)$ 的零点：

$$G_e(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\Gamma} \tag{7.262}$$

其余的极点趋于无穷[⊖][参见式(7.163)和式(7.164)]。实际上，回路传递恢复设计过程仍然可以应用到非最小相位的被控对象。恢复的程度将取决于非最小相位系统零点所处的特定位置。如果右半平面内的零点位于特定的闭环带宽之外，那么在许多频率处实现充分的恢复应该是可能的。弗罗伊登伯格(Freudenberg)和洛西(Looze)(1985)讨论了由于右半平面(RHP)零点使得反馈系统可实现性能受到限制这一问题。下面，我们将通过一个简单的例子来阐述回路传递恢复过程。

⊖ 在 Butterworth 结构中。

例 7.39 卫星姿态控制系统的回路传递恢复设计

考虑如下状态空间描述的卫星系统：

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad C=[1\quad 0],\quad D=0$$

(1) 设计一个 LQR 控制器，其中，$Q=\rho C^{\mathrm{T}}C$，$R=1$，$\rho=1$，并确定回路增益。

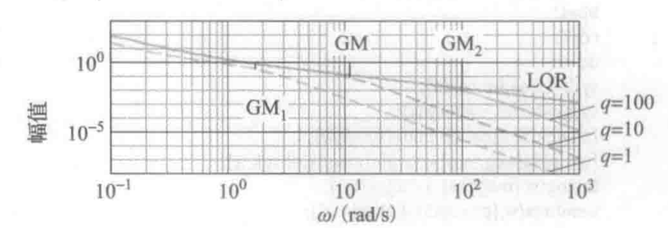
(2) 设计一个补偿器，当取 $q=1$，10，100 时，用回路传递恢复法来恢复(a)问中的 LQR 回路增益。

(3) 相对于外加白色高斯传感器噪声引起的执行器行为，将(b)问中的几种备选设计进行比较。

解答。用 lqr() 函数，由选定的 LQR 权值得到反馈增益 $K=[1\ 1.414]$。回路传递函数为

$$K(sI-A)^{-1}B=\frac{1.414(s+0.707)}{s^2}$$

该 LQR 回路增益的幅值频率响应如图 7.73 所示。用 lqe() 函数设计估计器，令 $\Gamma=qB$，$R_w=\Gamma^{\mathrm{T}}\Gamma$，$R_v=1$，并取 $q=10$，得到估计器的增益为



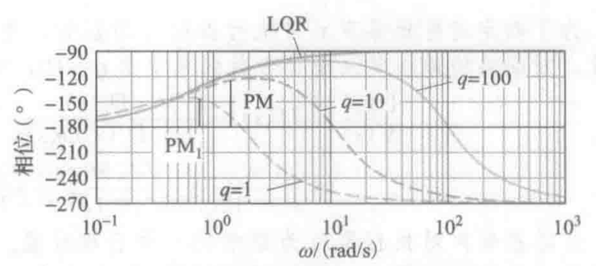


图 7.73 回路传递恢复法设计的频率响应图

$$L=\begin{bmatrix}14.142\\100\end{bmatrix}$$

补偿器传递函数为

$$\begin{aligned}D_c(s)&=K(sI-A+BK+LC)^{-1}L\\&=\frac{155.56(s+0.6428)}{(s^2+15.556s+121)}=\frac{155.56(s+0.6428)}{(s+7.77+7.77j)(s+7.77-7.77j)}\end{aligned}$$

回路传递函数为

$$D_c(s)G(s)=\frac{155.56(s+0.6428)}{s^2(s+7.77+7.77j)(s+7.77-j7.77)}$$

图 7.73 给出了 q 取几个不同值($q=1$，10，100)时回路传递函数的频率响应和理想的 LQR 回路传递函数的频率响应。从图中还可以看出，随着 q 值的增大，回路增益越来越接近 LQR 的回路增益。当 $q=10$ 时，“恢复后”的增益裕度为 GM=11.1=20.9dB，PM=55.06°。下面，给出实现上述回路传递恢复法设计步骤的 Matlab 语句：

```
A=[0 1; 0 0];
B=[0;1];
C=[1 0];
D=[0];
sys0=ss(A,B,C,D);
C1=[1 0];
sys=ss(A,B,C1,D);

w=logspace(-1,3,1000);
rho=1.0;
Q=rho*C1'*C1;
r=1;
[K]=lqr(A,B,Q,r)
sys1=ss(A,B,K,0);
[maggk1,phasgk1]=bode(sys1,w);
```

549~550

```
q=10;
gam=q*B;
Q1=gam'*gam;
rv=1;
[L]=lqe(A,gam,C,Q1,rv)

aa=A—B*K—L*C;
bb=L;
cc=K;
dd=0;
sysk=ss(aa,bb,cc,dd);
sysgk=series(sys0,sysk);
[maggk,phasgk,w]=bode(sysgk,w);
[gm,phm,wcg,wcp]=margin(maggk,phsgk,w)
loglog(w,[maggk1(:) maggk(:)]);
semilogx(w,[phasgk1(:) phsgk(:)]);
```

为了确定传感器噪声 v 对执行器行为的影响，先确定图 7.74 所示的从 v 到 u 的传递函数。对回路传递恢复法设计参数的选定值 $q=10$，有

$$\frac{U(s)}{V(s)}=H(s)=\frac{-D_c(s)}{1+D_c(s)G(s)}$$

$$=\frac{-155.56s^2(s+0.6428)}{s^4+15.556s^3+121s^2+155.56s+99.994}$$

传感器噪声对执行器行为影响的一种合理度量方法是，采用控制量 u 的均方根(RMS)作为度量，u 是由外加噪声 v 引起的。控制量的 RMS 值可以按下式计算：

$$\|u\|_{\text{rms}}=\left(\frac{1}{T_o}\int_0^{T_o}u(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2} \tag{7.263}$$

其中：T_o为信号作用的时间。假设白色高斯噪声为 v，则控制量的 RMS 值也可解析地确定（伯德(Boyd)和巴拉特(Barratt)，1991 年）。具有有限带宽的传感器白噪声激励的闭环系统的 Simulink 示意图如图 7.75 所示。对于回路传递恢复法设计参数 q 的不同取值，用 Simulink 仿真可以计算出控制量的 RMS 值，这些值列在表 7.2中。这些结果表明随着 q 值的增大，由执行器损耗引起的系统易损性也增加了。参见Matlab 中用于回路传递恢复法计算的 ltry 和 ltru 命令。

551

图 7.74 回路传递恢复法设计的闭环系统

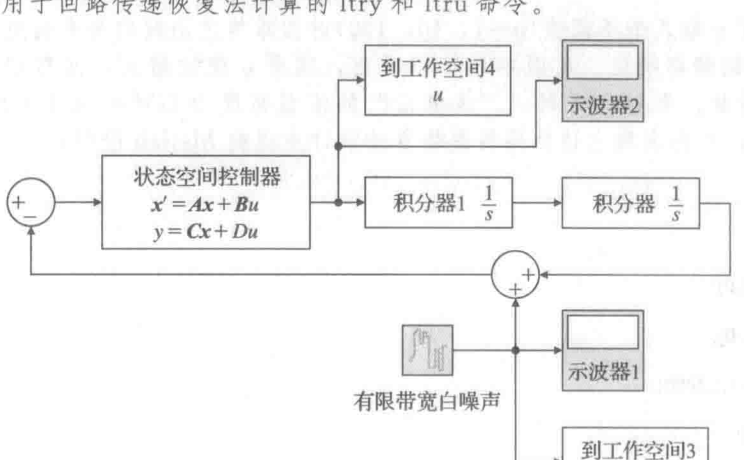


图 7.75 回路传递恢复法设计的 Simulink 框图

表 7.2 对回路传递恢复法调整参数 q 的不同取值计算出的 RMS 控制

q	$\|u\|_{\mathrm{rms}}$
1	0.1454
10	2.8054
100	70.5216

△7.12 有理传递函数的直接设计

目前讨论的状态空间法的另一种可选方案是假设具有两个输入(r 和 y)一个输出(u)的一般结构的动态控制器，寻求控制器的传递函数，以得到指定的从 r 到 y 的总传递函数，这种情况的框图如图 7.76 所示。用如下传递函数建立被控对象的模型：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b(s)}{a(s)} \tag{7.264}$$

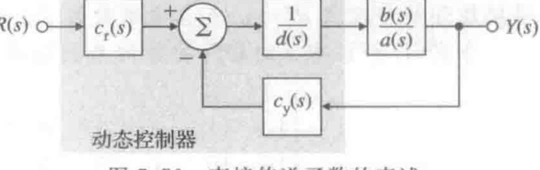


图 7.76 直接传递函数的表述

而不是通过状态方程。控制器也根据传递函数建模，这样，传递函数具有两个输入一个输出：

$$U(s)=-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s)+\frac{c_r(s)}{d(s)}R(s) \tag{7.265}$$

其中：$d(s)$，$c_y(s)$和 $c_r(s)$均为多项式。为了实现图 7.76 和式(7.265)给出的控制器，分子多项式 $c_y(s)$和 $c_r(s)$的阶数不应高于分母多项式 $d(s)$的阶数。

为了进行设计，要求由式(7.264)和式(7.265)定义的闭环传递函数应与下式的期望传递函数相匹配：

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{c_r(s)b(s)}{\alpha_c(s)\alpha_e(s)} \tag{7.266}$$

式(7.266)说明被控对象的零点必须是整个系统的零点。改变这一情况的唯一途径是让 $b(s)$的因子出现在 α_c或 α_e中。联立式(7.264)和式(7.265)得到

$$a(s)Y(s)=b(s)\left[-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s)+\frac{c_r(s)}{d(s)}R(s)\right] \tag{7.267}$$

可改写为：

$$[a(s)d(s)+b(s)c_y(s)]Y(s)=b(s)c_r(s)R(s) \tag{7.268}$$

比较式(7.266)和式(7.267)即可看出，对于任意给定的 a、b、α_c和 α_e，若能解出下述的丢番图方程，设计就完成了：

$$a(s)d(s)+b(s)c_y(s)=\alpha_c(s)\alpha_e(s) \tag{7.269}$$

由于每个传递函数都是多项式比的形式，因此，可以假设 $a(s)$和 $d(s)$为首一多项式；即在每个多项式中 s 的最高次幂的系数均为 1。问题是，如果将式(7.269)中的 s 的相同次幂的系数相匹配，那么可得到多少方程和多少个未知数呢？如果 $a(s)$为 n 阶(给定)的，$d(s)$为 m 阶(待定)的，那么根据 s 的幂的系数可得 $n+m$ 个方程，而在 $d(s)$和 $c_y(s)$中有 $2m+1$ 个未知数。

因此要求：

$$2m+1\geqslant n+m$$

或

$$m\geqslant n-1$$

解存在的一种可能性是选 $d(s)$为 n 阶，$c_y(s)$为 $n-1$ 阶的。在全阶估计器的状态空间设计中，$\alpha_c\alpha_e$为 $2n$ 阶的，故有 $2n$ 个方程和 $2n$ 个未知数。当且仅当 $a(s)$和 $b(s)$没有公因子时，相应的方程对于任意 α_i才有解。[⊖]

552～553

⊖ 如果 $a(s)$和 $b(s)$确实有公因子，该因子将在式(7.269)中的左侧出现；若存在解，在式(7.269)右侧必存在一个相同的因子，因此该因子必为 α_c或 α_e的一个因子。

例 7.40 多项式传递函数的极点配置

用多项式方法，为例 7.29 中的三阶被控对象设计一个 n 阶控制器。注意如果将例 7.29 中的多项式 $\alpha_c(s)$和 $\alpha_e(s)$相乘，所得的结果就是期望的闭环特征方程：

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s) = s^6 + 14s^5 + 122.75s^4 + 585.2s^3 + 1505.64s^2 + 2476.8s + 1728 \tag{7.270}$$

解答。利用式(7.269)，其中 $b(s)=10$，可得

$$(d_0s^3 + d_1s^2 + d_2s + d_3)(s^3 + 10s^2 + 16s) + 10(c_0s^2 + c_1s + c_2) \equiv \alpha_c(s)\alpha_e(s) \tag{7.271}$$

得到展开的多项式 $d(s)$，其各项系数为 d_i；展开的多项式 $c_y(s)$，其各项系数为 c_i。

令式(7.271)中 s 的相同次幂的系数相等，可知参数必须满足如下关系[⊖]：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 122.75 \\ 585.2 \\ 1505.64 \\ 2476.8 \\ 1728 \end{bmatrix} \tag{7.272}$$

式(7.272)的解为：

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, & c_0 &= 190.1 \\ d_1 &= 4, & c_1 &= 481.8 \\ d_2 &= 66.75, & c_2 &= 172.8 \\ d_3 &= -146.3 \end{aligned}$$

[此解可用 Matlab 中的 $x=a\backslash b$ 命令求得，其中，a 为西尔维斯特矩阵，b 为式(7.272)右侧的矢量。]因此，控制器的传递函数为

$$\frac{c_y(s)}{d(s)} = \frac{190.1s^2 + 481.8s + 172.8}{s^3 + 4s^2 + 66.75s - 146.3} \tag{7.273}$$

注意，将控制器 $D_c(s)$中的因式乘开可发现式(7.273)中的系数与 $D_c(s)$的系数相等($D_c(s)$是用状态变量法得到的)。 ◀

554

用多项式解法也可得到降阶补偿器。

例 7.41 多项式传递函数模型的降阶设计

为例 7.29 中的三阶系统设计一个降阶控制器，所期望的特征方程为

$$\alpha_c(s)\alpha_e(s) = s^5 + 12s^4 + 74s^3 + 207s^2 + 378s + 288$$

解答。用来求解该问题的方程与用来获得式(7.271)的方程相同。只是在此处将 $d(s)$和 $c_y(s)$均取为 $n-1$ 阶。即需要解下述方程：

$$(d_0s^2 + d_1s + d_2)(s^3 + 10s^2 + 16s) + 10(c_0s^2 + c_1s + c_2) \equiv \alpha_c(s)\alpha_e(s) \tag{7.274}$$

令式(7.274)两侧 s 的同次幂系数相等，可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 74 \\ 207 \\ 378 \\ 288 \end{bmatrix} \tag{7.275}$$

⊖ 式(7.272)左边的矩阵称为 Sylvester 矩阵，当且仅当 $a(s)$和 $b(s)$无公因子时，该矩阵才为非奇异矩阵。

解为(再次使用 Matlab 中的 $x=a/b$ 命令):

$$d_0 = 1, \quad c_0 = -20.8$$
$$d_1 = 2.0, \quad c_1 = -23.6$$
$$d_2 = 38, \quad c_2 = 28.8$$

得到的控制器为

$$\frac{c_y(s)}{d(s)} = \frac{-20.8s^2 - 23.6s + 28.8}{s^2 + 2.0s + 38} \tag{7.276}$$

同样，一旦将例 7.30 中用状态变量法得到的多项式 $D_{cr}(s)$ 乘开，并考虑到微小的数值差别，就可以看到式(7.276)与 $D_{cr}(s)$ 完全相同。◀

注意，在例 7.40 和例 7.41 的分析中，没有考虑参考输入多项式 $c_r(s)$。可以选取 $c_r(s)$ 来分配从 $R(s)$ 到 $Y(s)$ 的传递函数的零点。这与 7.9 节中 $\lambda(s)$ 起的作用相同。一种选择方案是选取 $c_r(s)$ 以消除 $\alpha_e(s)$，使得总传递函数变为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_s b(s)}{\alpha_c(s)}$$

555

这与 7.9 节介绍的为引入参考输入而设计的第一种且最常用的 $\boldsymbol{M}$ 和 $\overline{N}$ 的选取方案相对应。

引入积分控制，甚至基于内部模态的鲁棒跟踪控制到多项式的设计方法也是可能的。这样做需要误差控制并且控制器极点要与内部模态具有相同的极点。为了获得如图 7.76 所示结构的误差控制，只需要令 $c_r=c_y$。为在控制器中加入期望极点，需令某个特定因子为 $d(s)$ 的一部分。对于积分控制(最通常的情况)，这是很容易的。若将多项式 $d(s)$ 的最后一项 d_m 设置为零，则多项式 $d(s)$ 就会有一个根为零。如果 $m=n$，就可解出相应的方程。对于更一般的内部模态，如式(7.247)，定义 $d(s)$ 为一个降阶多项式和一个指定多项式的乘积，然后如前所述，匹配丢番图方程中的各项系数。这个过程很直接但很枯燥。再有，值得注意的是，虽然多项式设计法很有效，但这种方法解决数值问题却常常比基于状态方程的那些相关方法要差很多。对于高阶系统和多输入多输出系统，状态空间法更可取。

△7.13 具有纯滞后的系统设计

在任何由分块环节组成的线性系统中，系统受到激励后会立即出现响应。在一些反馈系统中，如过程控制系统，无论闭环系统是由操作员控制还是计算机控制，系统中都会存在纯滞后(也称传输时延)。由于这类系统的分布特性，其响应在 λ 秒的延迟后将同样保持在零值。典型的阶跃响应如图 7.77a 所示。纯传输时延的传递函数为 $e^{-\lambda s}$。带时滞的单输入单输出(SISO)系统的总传递函数可表示为

$$G_1(s) = G(s)e^{-\lambda s} \tag{7.277}$$

其中：$G(s)$ 没有纯滞后。由于 $G_1(s)$ 没有有限的状态描述，所以不可能用状态变量法的标准方法。然而，史密斯(1958 年)给出了如何构建一个反馈结构的方法，它能有效地将延迟置于闭环之外，并允许用标准方法仅基于 $G(s)$ 进行反馈设计。该方法的结果是得到了一个带延迟 λ 的闭环传递函数的设计，但在其他方面却表现出了与无延迟的闭环设计相同的响应特性。为了分析这种方法，先研究图 7.77b 所示的反馈结构。该结构的总传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{D_c'(s)G(s)e^{-\lambda s}}{1 + D_c'(s)G(s)e^{-\lambda s}} \tag{7.278}$$

556

史密斯建议求解 $D_c'(s)$ 时，可以虚设一个总传递函数，其控制传递函数 $D(s)$ 位于带 $G(s)$ 的回路中，该回路无回路延迟但存在总延迟 λ：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathcal{T}(s) = \frac{D_c(s)G(s)}{1 + D_c(s)G(s)}e^{-\lambda s} \tag{7.279}$$

然后，令式(7.278)与式(7.279)相等，求解 $D_c'(s)$：

$$D_c'(s)=\frac{D_c(s)}{1+D_c(s)[G(s)-G(s)\mathrm{e}^{-\lambda s}]} \tag{7.280}$$

若被控对象传递函数及延迟已知，通过图 7.77c 所示的框图用实环节可以实现 $D_c'(s)$。有了这一认识，我们可以用通常的方法基于式(7.279)设计补偿器 $D(s)$：先假设无延迟，再按图 7.77c所示的结构实现。所得的闭环系统将呈现出有限闭环系统的特性，只是带时滞 λ。这种设计方法尤其适用于纯滞后 λ 与过程时间常数相比很显著的系统。例如，纸浆和纸的过程应用系统。

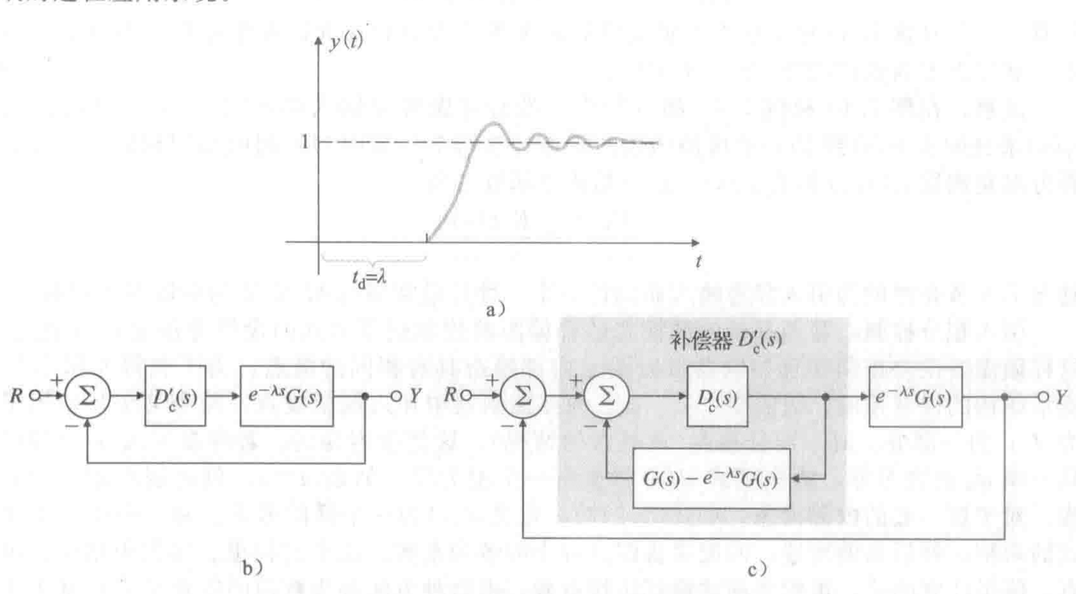


图 7.77 带纯时滞系统的史密斯调节器

注意，从理论上讲，史密斯补偿器将一个仿真的被控对象输出进行反馈以抵消真正的被控对象输出，然后又加进了一个无延迟的仿真被控对象输出。可以证明，图 7.77c 中的 $D_c'(s)$与一个普通的调节器等效，它相当于一个能提供很大超前相位的补偿器。要在模拟系统中实现这类补偿器，通常需要将 $D_c'(s)$ 中要求的延迟用 Padé 近似值近似，用数字补偿器可以精确地实现延迟(见第 8 章)。还有一点，补偿器 $D_c'(s)$是 $G(s)$的一个强函数，而且在控制器中使用的被控对象模型存在一个小小的误差就能在闭环系统中引起很大的误差，甚至会导致系统不稳定。这个设计无论对被控对象参数的不确定性，还是对滞后的不确定性都是很灵敏的。若 $D_c(s)$作为一个 PI 控制器实现，那么可以通过解调(即降低增益)来确保稳定性及合理的性能。对于史密斯调节器的自动调谐和斯坦福(Stanford)的平稳液压精密车床流体温度控制系统的最新应用，读者可以参考黄(Huang)和德布拉(DeBra，2000 年)的相关著作。

557

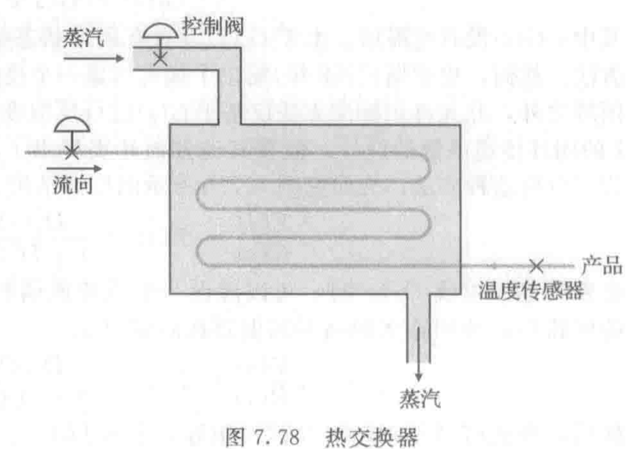


图 7.78 热交换器

例 7.42 热交换器：具有纯滞后的设计

图 7.78 给出了例 2.15 中的热交换器图。通过控制交换器套管中蒸汽的流动速率来控制该产品的温度。温度传感器位于蒸汽控制阀下游几米远

处，该控制阀给模型引入了传输时延。适合于该系统的模型为：

$$G(s)=\frac{e^{-5s}}{(10s+1)(60s+1)}$$

用史密斯补偿器和极点配置法为热交换器设计一个控制器。控制极点选为

558

$$p_c=-0.05\pm0.087\mathrm{j}$$

估计器极点应在控制极点三倍的自然频率处：

$$p_e=-0.15\pm0.26\mathrm{j}$$

用 Simulink 对系统的响应进行仿真。

解答。选一组合适的状态方程：

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-0.017 & 0.017\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}u(t-5)$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\lambda=5$$

对于给定的控制极点位置，暂且忽略时滞。其状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}5.2 & -0.17\end{bmatrix}$$

对于给定的估计器极点，可得全阶估计器的估计增益矩阵为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0.18\\ 4.2\end{bmatrix}$$

因此，控制器传递函数为

$$D_c(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=\frac{-0.25(s+1.8)}{s+0.14\pm0.27\mathrm{j}}$$

如果将闭环直流增益调整为 1，则有

$$\overline{N}=1.2055$$

该系统的 Simulink[⊖]框图如图 7.79 所示。系统的开环和闭环阶跃响应及控制作用如图 7.80 和图 7.81 所示，系统的根轨迹（无延迟）如图 7.82 所示。注意在图 7.80 和图 7.81 中，5s 的滞后对系统的响应来说是非常小的，本例中几乎无法察觉。◀

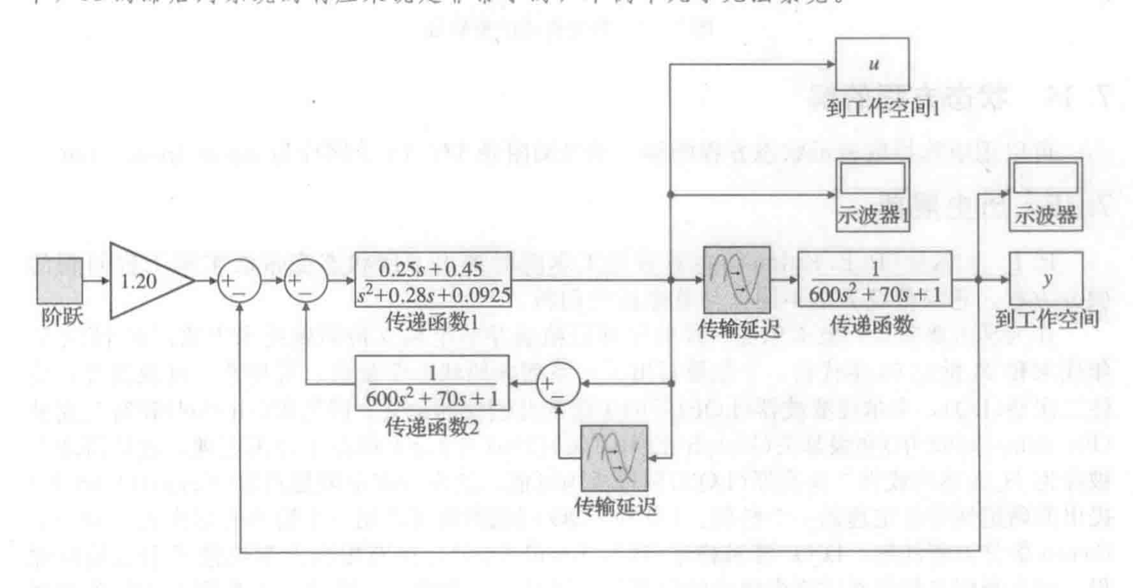


图 7.79 热交换器的闭环 Simulink 图

⊖ Simulink 仿真。

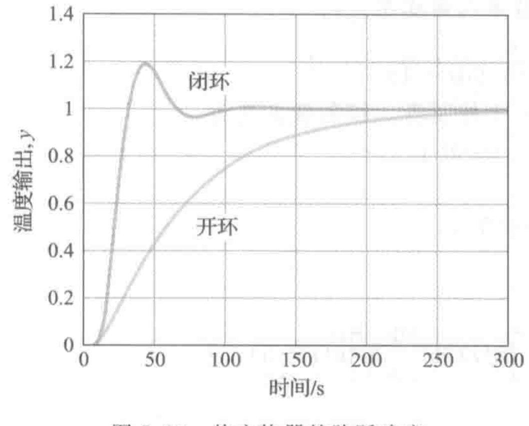


图 7.80 热交换器的阶跃响应

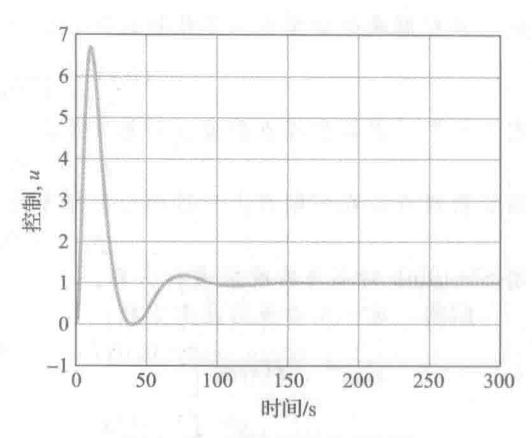


图 7.81 热交换器的控制量

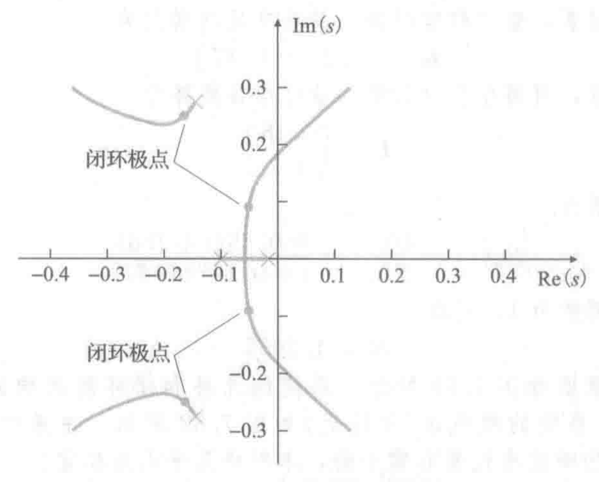


图 7.82 热交换器的根轨迹

7.14 状态方程的解

可以用矩阵指数表示状态方程的解。请参阅附录 W7.13.1 网址为 www.fpe7e.com.

7.15 历史展望

R. E. 卡尔曼(R. E. Kalman)在麻省理工学院时提出了用状态变量法求解工程问题的微分方程。它与传统方法不同，是革命性的创新。

作为学术奠基人，象卡尔曼一样的导师们精通并坚定地支持频域技术方法。20 世纪 50 年代末和 20 世纪 60 年代初，卡尔曼写出了一系列介绍状态变量法、可控性、可观测性，线性二次型(LQ)，卡尔曼滤波器(LQF)等的思想的开创性的论文。冈克尔(Gunkel)和富兰克林(Franklin)(1963 年)和级瑟夫(Joseph)和图(Tou)(1961 年)分别提出了分离定理，这使得现今被称为 H_2 表述的线性二次高斯(LQG)问题成为可能。这个分离定理是西蒙(Simon)(1956 年)提出的确定性等价定理的一个特例。LQ 和 LQG 问题的解可以用一个简单的形式表示为一个 Riccati 微分方程的解。D. G. 隆贝格尔(D. G. Luenberger)，在斯坦福大学选修了卡尔曼的课程，他在听到卡尔曼在讲座中提出的问题后，经过了一个周末，推导出了观测器和降阶观测器。卡尔曼、布赖森(Bryson)、阿塔斯(Athans)等为最优控制理论领域做出了贡献，这些理论被广泛地用于包括 Apollo 计划在内的航空航天问题的研究中。

1962 年，由 Zadeh 和 Desoer 出版的书也推动了状态空间方法的发展。20 世纪 70 年代，多

伊尔(Doyle)和斯坦因(Stein)在对 LQ 和 LQG 方法的鲁棒性进行研究之后，于 1981 年写出了具有影响力的著名论文。多伊尔和萨弗诺夫(Safonov)最重要的贡献之一是使用奇异值分解的方法将频域的思想扩展到多输入多输出系统中。促进这项研究的其他人还包括 G. 赞默斯(G. Zames)，他提出了 H_∞ 方法，该方法后来被发现是 H_2 方法的扩展。由此产生的设计方法被称为 H_∞ 和 μ—综合过程。20 世纪 80 年代提出了可靠的数值方法，用于处理状态变量的设计，并且提出了用于控制设计的计算机辅助软件。C. 莫勒(Cleve Moler)开发的 Matlab 软件经过 MathWorks 的广泛传播，不仅在控制设计领域而且在所有交互式科学计算领域产生了巨大的影响。

559~561

当状态变量法在美国得到蓬勃发展时，欧洲的研究小组，尤其是由 Rosenbrock，MacFarlane，Munro 等人领导的英国小组将经典技术扩展到多输入多输出系统中。因此，根轨迹和频域方法如(逆)奈奎斯特技术可应用于多输入多输出系统。最终在 20 世纪 80 年代，人们意识到应该将频域法和状态变量法两种方法的优点相结合，形成一种取两者之长的折中控制设计方法。

从第 7 章可以看出，与伯德和奈奎斯特频率响应方法相比较，状态变量法不仅可以处理系统的输入输出变量，而且可以处理内部物理变量。状态变量法可以用来研究线性、非线性和时变系统。此外，用状态变量法处理多输入多输出问题和高阶系统也同样容易。从计算的角度来看，状态变量法远优于需要多项式操作的频域法。

小结

- 任何零点数不多于极点数的传递函数，都与一个状态空间形式的微分方程相对应。
- 状态空间描述有多种标准形，包括能控标准形，能观标准形和模态标准形。
- 开环极点和零点可以由状态描述矩阵($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，D)求出：

  极点：$p=\mathrm{eig}(\boldsymbol{A})$， $\det(p\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$，

  零点：$\det\begin{bmatrix} z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{bmatrix}=0$
- 对于任何 n 阶可控系统，都存在一个状态反馈控制律，将闭环极点配置到任意 n 阶控制特征方程的根处。
- 可以引入参考输入，使得系统的阶跃响应的稳态误差为零。这一性质对参数变化不具有鲁棒性。
- 理想的闭环极点位置取决于期望的暂态响应、对参数变化的鲁棒性及在动态性能与控制作用之间的权衡。
- 为与标准动态响应相匹配，可以通过选取闭环极点位置得到主导二阶响应，或将二次性能指标最小化。
- 对任意 n 阶可观测系统，可以仅通过传感器的输入和估计被控对象的状态来构造估计器(或观测器)。估计器误差系统的 n 个极点可以任意配置。
- 每个传递函数都可以用一个最小实现来表示，即状态空间模型既是可控的也是可观的。
- 一个单输入单输出系统是完全可控的，当且仅当输入激励系统的所有自然频率，即传递函数中没有极点的对消。
- 控制律与估计器可以结合成控制器，这样闭环系统的极点仅取决于控制律的极点和估计器的极点。
- 对于基于估计器的控制器，可以通过引入参考输入使系统的 n 个零点能够任意配置。最常用的选择是配置零点以抵消估计器极点，这样就不会产生估计器误差。
- 通过增加被控对象的状态引入积分控制，以获得对阶跃信号的稳态鲁棒跟踪。该设计对于抑制常值扰动也具有鲁棒性。
- 将被控对象和参考输入模型方程合并到误差空间并为扩展系统设计一个控制律，就可以实现一般的鲁棒控制。鲁棒设计的实现体现了内模原理。在保留鲁棒性能的同时，可以加入一个被控对象状态的估计器。
- 模型跟踪技术可以产生优良的跟踪性能，但却存在鲁棒性问题。
- 估计器可以扩展，即将等价控制干扰的估计包括在内，以实现鲁棒跟踪和扰动抑制。
- 可以用被控对象传递函数多项式取代状态描述来进行包含积分控制的极点配置设计。用多项式法进行的设计常出现数值精度方面的问题。
- 设计带纯时延的被控对象控制器时，先设计无延迟的控制器，然后再实现带延迟的被控对象控制器。该设计可能对参数变化敏感，尤其对于不确定的延迟时间。
- 表 7.3 给出了本章讨论过的重要方程，三角形表明该方程选自本文的选读部分。
- 根据实验数据确定模型或通过实验验证一个用解析法建立的模型，是用状态空间法进行系统设计的一个重要步骤，但通过频率响应法进行补偿器设计时这一步骤未必需要。

562~563

表 7.3 第 7 章重要公式

名称	公式
能控标准形	$\boldsymbol{A}_c=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_c=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C}_c=[b_1\ \ b_2\ \ \cdots\ \ \cdots\ \ b_n]$，$D_c=0$
状态描述	$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u$
输出方程	$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+Du$
状态变换	$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ $\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$ $y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}+Du=\overline{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{z}+\overline{D}u$， 其中：$\overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$，$\overline{D}=D$
可控性矩阵	$\mathcal{C}=[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$
从状态方程求传递函数	$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+D$
传递函数极点	$\det(p_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$
传递函数零点	$\alpha_z(s)=\det\begin{bmatrix}z_i\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & D\end{bmatrix}=0$
能控特征方程	$\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})]=0$
极点配置的阿克曼控制公式	$\boldsymbol{K}=[0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 1]\mathcal{C}^{-1}\alpha_c(\boldsymbol{A})$
参考输入增益	$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_x\\ N_u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{bmatrix}$
带参考输入的控制方程	$u=N_u r-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{N}_x r)$ $=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+(Nu+\boldsymbol{K}\boldsymbol{N}_x)r$ $=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\overline{N}r$
对称根轨迹	$1+\rho G_0(-s)G_0(s)=0$
估计误差特征方程	$\alpha_e(s)=\det[s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})]=0$
能观标准形	$\dot{\boldsymbol{x}}_o=\boldsymbol{A}_o\boldsymbol{x}_o+\boldsymbol{B}_o u$ $y=\boldsymbol{C}_o\boldsymbol{x}_o$ 其中： $\boldsymbol{A}_o=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & & 1\\ -a_n & 0 & & 0 & & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_o=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{C}_o=[1\ \ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0]$
可观测性矩阵	$\mathcal{O}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix}$
阿克曼估计器公式	$\boldsymbol{L}=\alpha_e(\boldsymbol{A})\mathcal{O}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

（续）

名称	公式
补偿器传递函数	$D_c(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=-\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{LC})^{-1}\boldsymbol{L}$
降阶补偿器传递函数	$D_{cr}(s)=\frac{U(s)}{Y(s)}=\boldsymbol{C}_r(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_r)^{-1}\boldsymbol{B}_r+D_r$
控制器方程	$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{LC})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}y+\boldsymbol{M}r$ $u=-\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}+\overline{N}r$
带有积分控制的增维状态方程	$\begin{bmatrix}\dot{x}_I\\ \dot{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_I\\ \boldsymbol{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}1\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}r+\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}w$
△多项式形式的一般控制器	$U(s)=-\frac{c_y(s)}{d(s)}Y(s)+\frac{c_r(s)}{d(s)}R(s)$
△闭环特征方程的丢番图方程	$a(s)d(s)+b(s)c_y(s)=\alpha_c(s)\alpha_e(s)$

复习题

下面这些问题基于一个以状态变量形式描述的系统，系统矩阵为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$、D，输入为 u，输出为 y，状态为 $\boldsymbol{x}$。

7.1　为什么将动态方程写成状态变量形式更方便？

7.2　给出该系统传递函数的一个表达式。

7.3　给出求该系统传递函数极点的两种表达式。

7.4　给出求该系统传递函数零点的一种表达式。

7.5　在什么条件下，系统的状态是可控的？

7.6　在什么条件下，系统从输出 y 是可观测的？

7.7　如果状态反馈用 $u=-\boldsymbol{Kx}$ 的形式，给出求闭环极点的一个表达式。

7.8　在什么条件下，可以选取反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得 $\alpha_c(s)$ 的根是任意的？

7.9　在设计反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$ 时，使用 LQR 或回路传递恢复法有何优势？

7.10　在反馈控制中，使用估计器的主要原因是什么？

7.11　如果估计器增益为 $\boldsymbol{L}$，给出由估计器产生的闭环极点的一个表达式。

7.12　在什么条件下，可以选取估计器增益 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\alpha_e(s)=0$ 的根是任意的？

7.13　如果选定的参考输入使得估计器的输入与过程的输入相同，整个系统的闭环传递函数是什么？

7.14　如果引入的参考输入使得零点能配置为 $\gamma(s)$ 的根，整个系统的闭环传递函数是什么？

7.15　在状态反馈控制设计方法中，引入积分控制的三种标准方法是什么？

习题

7.3 节习题

7.1　写出如图 7.83 所描述电路的动态方程。将方程写成 $y(t)$ 的二阶微分方程形式。假设输入为零，用拉普拉斯变换法解关于 $y(t)$ 的微分方程，参数值和初始条件如图所示。在 Matlab 中，用 initial 命令验证答案。

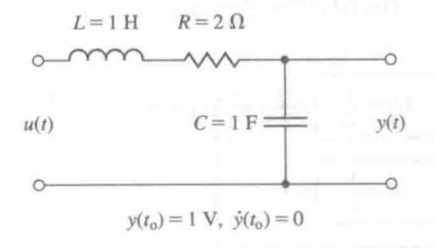


图 7.83　习题 7.1 的电路

7.2　用于引力探测 B(GP-B)实验的卫星科学探索器发射于 2004 年 4 月 30 日，原理图如图 7.84 所示。假设航天器加上氦气瓶的总质量 m_1 为 2000kg。探测器质量为 m_2 为 1000kg。转子将会悬浮在探测器内，并且被迫跟随电容驱动机制的探测器。耦合的弹簧劲度系数 k 大小为 3.2×10^6，黏性阻尼 b 大小为 4.6×10^3。

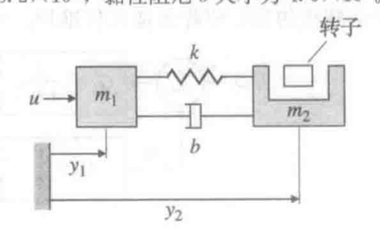


图 7.84　GP-B 卫星探测器的示意图

(a) 用惯性位置变量 y_1 和 y_2 写出由物块 m_1 和 m_2 组成的系统运动的动态方程。

(b) 实际的扰动 u 是陨尘并且导致的移动也是很小的，因此，用标度变量 $z_1=10^6 y_1$，$z_2=10^6 y_2$，以及 $v=1000u$ 改写方程。

(c) 对于物块 m_1，用状态 $\boldsymbol{x}=[z_1\quad \dot{z}_1\quad z_2\quad \dot{z}_2]^{\mathrm{T}}$，输出 $y=z_2$，脉冲输入 $u=10^{-3}\delta(t)$ (N·s)，把方程写成状态变量形式。

(d) 用数值将运动方程按如下的形式写入 Matlab，并定义 Matlab 系统：sysGPB=ss(A，B，C，D)，用 Matlab 命令脉冲(sysGPB)绘制由脉冲引起的响应曲线 y，这是转子必须遵循的信号。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B}v \tag{7.281}$$

$$y = \boldsymbol{Cx} + Dv \tag{7.282}$$

(e) 用 Matlab 命令 p=eig(F)寻找系统的极点(或根)，命令 z=tzero(A，B，C，D)寻找系统的零点。

7.4 节习题

7.3 给出下列传递函数的状态描述矩阵的能控标准形。

(a) $G(s)=\dfrac{1}{2s+1}$；

(b) $G(s)=\dfrac{6(s/3+1)}{(s/10+1)}$；

(c) $G(s)=\dfrac{8s+1}{s^2+3+2}$；

(d) $G(s)=\dfrac{s+7}{s(s^2+2s+2)}$；

(e) $G(s)=\dfrac{(s+10)(s^2+s+25)}{s^2(s+2)(s^2+s+36)}$。

7.4 用 Matlab 函数 tf2ss()求习题 7.3 的状态矩阵。

7.5 用模态标准形给出习题 7.3 中传递函数的状态描述矩阵。通过把所有复共轭极点对放在一起确保状态矩阵的所有元素均为实值，将它们在能控标准形中以分离子块的形式实现。

7.6 某具有状态 $\boldsymbol{x}$ 的系统，其状态矩阵描述为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=[1\quad 0],\quad D=0$$

求变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Tz}$，则描述 z 的动态特性的状态矩阵为能控标准形。计算新的系统矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$，$\overline{\boldsymbol{B}}$，$\overline{\boldsymbol{C}}$ 和 $\overline{D}$。

7.7 证明状态的线性变换不会改变传递函数。

7.8 用框图化简法或梅森公式法找出图 7.31 所示的能观标准形系统的传递函数。

7.9 假定给出系统的状态矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$(此处 $D=0$)。求出变换阵 $\boldsymbol{T}$，使得利用式(7.21)和式(7.22)得到新状态描述矩阵为能观标准形。

7.10 利用式(7.38)给出的变换阵将例 7.9 最后的方程显式展开。

7.11 求出状态变换阵，将式(7.32)的能观标准形化为模态标准形。

7.12 (a) 求变换阵 $\boldsymbol{T}$，使例 7.10 中的磁带驱动器系统的描述为模态标准形，且将输入矩阵 $\boldsymbol{B}_m$ 的每一个元素均化为 1。

(b) 用 Matlab 验证该变换阵满足要求。

7.13 (a) 求状态变换，使得例 7.10 的磁盘驱动器系统的描述为模态标准形，且使得在 $\boldsymbol{A}_m$ 中的极点以幅值增大的顺序排列。

(b) 用 Matlab 验证(a)的结果并给出全新的状态矩阵集 $\overline{\boldsymbol{A}}$，$\overline{\boldsymbol{B}}$，$\overline{\boldsymbol{C}}$ 和 $\overline{D}$。

7.14 用式(7.55)求式(7.14a)中模态标准形矩阵 $\boldsymbol{A}_m$ 的特征方程。

7.15 已知如下系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

具有 0 初始状态，对阶跃输入 u 求 x 的稳态值。

7.16 考虑如图 7.85 所示的系统。

(a) 求从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{Y}$ 的传递函数。

(b) 用给定的状态变量写出系统的状态方程。

7.17 用给定的状态变量写出如图 7.86 所示的每个系统的状态方程。用框图变换和矩阵代数两种方法，求出每个系统的传递函数[同式(7.45)]。

7.18 用能控和能观标准形，写出以下传递函数的状态方程。画出每种情况的框图，并给出 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的适当表达式。

(a) $G(s)=\dfrac{s^2-2}{s^2(s^2-1)}$ (用力对小车上的倒立摆进行控制)；

(b) $G(s)=\dfrac{3s+4}{s^2+2s+2}$。

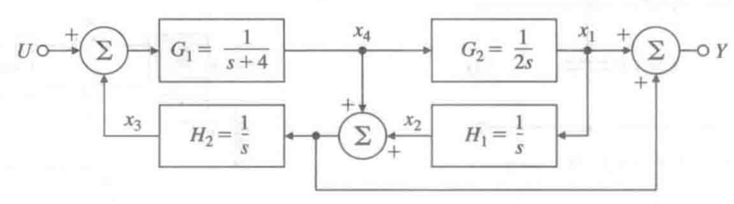


图 7.85　习题 7.16 的框图

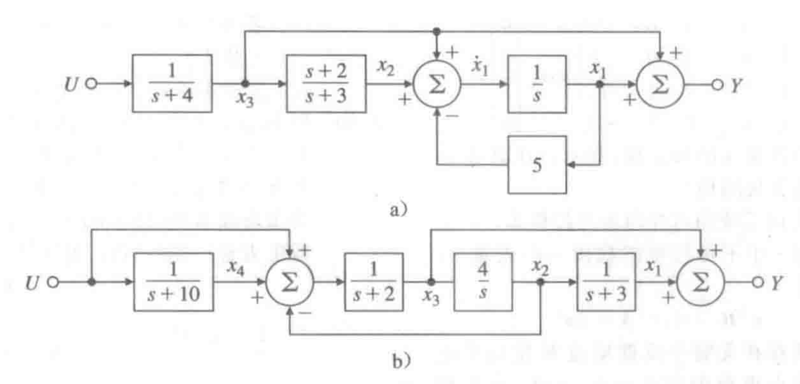


图 7.86 习题 7.17 的框图

7.19 考虑传递函数：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+6}{s^2+5s+6} \quad (7.283)$$

(a) 将式(7.283)改写为如下形式：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s+3}\left(\frac{s+6}{s+2}\right)$$

找出 $G(s)$的一种**串联实现**形式，即用两个一阶系统级联实现。

(b) 用 $G(s)$的部分分式展开式，找出 $G(s)$的一个**并联实现**。

(c) 求 $G(s)$的能控标准形实现。

7.20 证明系统($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，D)的脉冲响应为

$$h(t)=\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}+D\delta(t)$$

其中：$e^{\boldsymbol{A}t}$为如下定义的矩阵指数：

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\left(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{\boldsymbol{A}^2t^2}{2!}+\cdots\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kt^k}{k!}$$

7.5 节习题

7.21 考虑如下描述的被控对象：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

(a) 画出该被控对象的框图，其每个状态变量对应一个积分器。

(b) 用矩阵代数求出传递函数。

(c) 若反馈如下，求出闭环特征方程：

(i) $u=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$；

(ii) $u=-Ky$。

7.22 对于系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

设计一个满足如下性能指标的状态反馈控制器。

(a) 闭环极点的阻尼系数为 $\zeta=0.707$。

(b) 阶跃响应的峰值时间小于 3.14s。

用 Matlab 验证设计结果。

7.23 (a)为下面的系统设计一个状态反馈控制器，使其满足：闭环阶跃响应的超调低于 25%，且 1% 的调整时间低于 0.115s。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -10\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

(b) 用 Matlab 的 step 命令验证你的设计符合指标要求。如果不符合，相应地更改反馈增益。

7.24 考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

(a) 为该系统设计一个状态反馈控制器，使得闭环阶跃响应的超调低于 5%，且 1%的调整时间小于 4.6s。

(b) 用 Matlab 中的 step()函数验证你的设计满足指标要求。如果不符合，相应地更改反馈增益。

7.25 考虑如图 7.87 所示系统。

$$U \rightarrow \boxed{\frac{s}{s^2+4}} \rightarrow Y$$

图 7.87 习题 7.25 的系统

(a) 写出描述该系统的一组能控标准形方程，形如：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u \text{ 和 } y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

(b) 设计如下形式的控制律

$$u=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

使闭环极点配置到 $s=-2\pm 2j$。

7.26 输出可控性。在很多情况下，控制工程师更感兴趣的是控制输出 y 而不是状态 $\boldsymbol{x}$。如果在任意时刻，用适当的控制信号 $u*$ 均能在有限的时间内将输出从零转移到任意期望的输出 $y*$，则称系统是输出可控的。推导使连续系统($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$)是输出可控的充分必要条件。状态可控性与输出可控性有关系吗？若有，关系是什么？

7.27 考虑如下系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

(a) 求出该系统的特征根(提示：注意 $\boldsymbol{A}$ 的三角分块结构)。

(b) 找出该系统的可控与不可控模态。

(c) 为每一个不可控模态找出一个矢量 $\boldsymbol{v}$，满足

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$$

(d) 证明存在无穷个反馈增益 $\boldsymbol{K}$ 使得系统的极点重新配置在 -5、-3、-2 和 -2 上。

(e) 找出唯一矩阵 $\boldsymbol{K}$，获得这些极点位置，且能防止系统不可控部分的初始状态影响可控部分。

7.28 用一根弹簧连接的两个摆，受两个大小相等方向相反的力 u 控制，这两个力分别加到两个摆锤上，如图 7.88 所示。运动方程为

$$ml^2\ddot{\theta}_1 = -ka^2(\theta_1 - \theta_2) - mgl\theta_1 - lu,$$
$$ml^2\ddot{\theta}_2 = -ka^2(\theta_2 - \theta_1) - mgl\theta_2 + lu$$

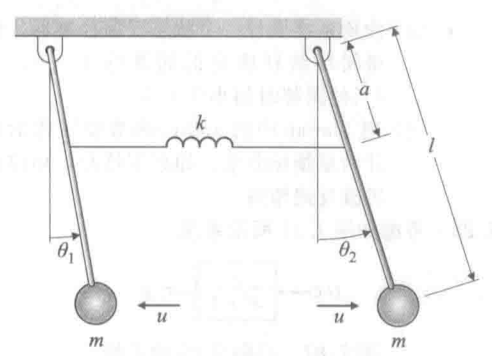


图 7.88 习题 7.28 的耦合摆

(a) 证明该系统是不可控的。能否说出可控状态与不可控状态的物理意义？

(b) 能否找出一种方法将该系统变为可控系统？

7.29 给出某种应用的状态空间模型，状态描述矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.174 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.157 & 0.654 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -0.207 \\ -0.005 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

(a) 画出一种实现的框图，其每个状态变量对应一个积分器。

(b) 某学生计算出 $\det\boldsymbol{C} = 2.3 \times 10^{-7}$，便说系统是不可控的。该学生是对是错？为什么？

(c) 这种实现是可观测的吗？

7.30 阶梯算法(范·多伦(Van Dooren)等人，1978 年)：任何实现($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$)都可通过正交相似变换转化为($\overline{\boldsymbol{A}}$, $\overline{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{C}}$)，其中，$\overline{\boldsymbol{A}}$ 为上海森伯格(Hessenberg)矩阵(在主对角线上方有一非零斜行)给出如下：

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} * & \alpha_1 & \boldsymbol{0} & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & * & \ddots & \alpha_{n-1} \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

其中：$g_1 \neq 0$；

$$\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T} = [\bar{c}_1 \quad \bar{c}_2 \quad \cdots \quad \bar{c}_n], \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

正交变换相当于将被变换的矢量(用列矩阵表示)进行旋转而不改变矢量的长度。

(a) 证明：如果对某 i 有 $\alpha_i = 0$ 且 α_{i+1}, $\cdots$, $\alpha_{n-1} \neq 0$，则经过该变换就可找出系统的可控模态与不可控模态。

(b) 如何用这种方法找出($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$)的可观测模态和不可观测模态？

(c) 这种确定可控模态和不可控模态的方法与将系统变换成其他形式有什么优势？

(d) 如何用这种方法确定可控和不可控子空间的基？(同习题 7.44)

可用这种算法来为极点配置设计一种数值上稳定的算法[见米尼米斯(Minimis)和拜格(Paige)，1982 年]。这种算法的名称来源于多输入模型，在这种模型中 α_i 是使 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 像阶梯形的矩阵块。参考 Matlab 中 ctrbf、obsvf 命令。

7.6 节习题

7.31 小车上的倒立摆倾角为 θ 时的标准运动方程为

$$\ddot{\theta} = \theta + u, \quad \ddot{x} = -\beta\theta - u$$

其中：x 为小车位置；控制输入 u 为施加在小车上的力。

(a) 状态定义为 $\boldsymbol{x} = [\theta \ \dot{\theta} \ x \ \dot{x}]^{\mathrm{T}}$，求将闭环极点配置在 $s = -1$，-1，$-1 \pm 1\mathrm{j}$ 的反馈增益 $\boldsymbol{K}$。从(b)问到(d)问假设 $\beta = 0.5$。

(b) 用回路传递恢复法选取极点，带宽尽可能与(a)问中的带宽相近。求出将闭环极点配置到你选定处的控制律。

(c) 在初始条件为 $\theta = 10°$ 时，比较(a)问与

(b)问中的闭环系统的响应。可以用Matlab中的initial命令。

(d) 对于小车位置的常值命令输入，计算使系统产生零稳态误差的 N_x 和 N_u 的值，并比较两个闭环系统的阶跃响应。

7.32 以闭环系统矩阵($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $D=0$)描述的输入为 r、输出为 y 的一个渐近稳定1型系统。假定输入为斜坡函数 $r=at$，当 $t>0$ 时，证明速度误差系数为

$$K_v = [\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-2}\boldsymbol{B}]^{-1}$$

7.33 证明用于LQR设计的奈奎斯特图绕过一个以 -1 为圆心，1为半径的圆，如图7.89所示。证明这表明 $\frac{1}{2}<GM<+\infty$，即增益裕度的"上限"为 $GM=+\infty$、"下限"为 $GM=\frac{1}{2}$，且相位裕度至少为 $PM=\pm60°$。因此，在保证闭环系统稳定的前提下，LQR增益矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以乘上一个很大的标量或减半。

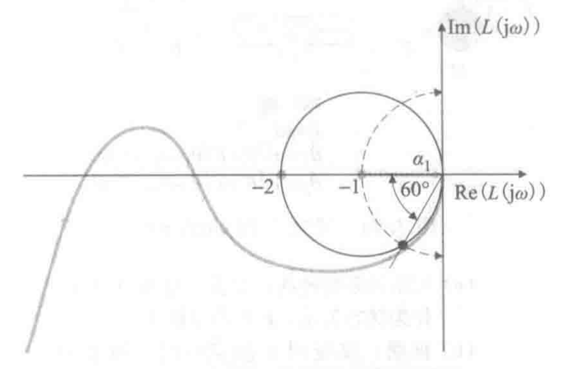


图7.89 最优调节器的奈奎斯特图

7.7节习题

7.34 考虑系统：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=[1\quad 2]$$

假定采用的反馈形式为 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+r$，其中 r 为参考输入信号。

(a) 证明($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$)是可观测的。

(b) 证明存在一个 $\boldsymbol{K}$，使得($\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$, C)是不可观测的

(c) 计算一个形如 $\boldsymbol{K}=[1\ K_2]$ 的 $\boldsymbol{K}$，使(b)问中的系统是不可观测的。即找出一个 K_2，使得闭环系统不可观测。

(d) 比较开环传递函数与(c)问中的闭环传递函数。不可观测性是由什么引起的？

7.35 考虑具有如下传递函数的系统：

$$G(s)=\frac{9}{s^2-9}$$

(a) 求该系统的能观标准形矩阵($\boldsymbol{A}_o$, $\boldsymbol{B}_o$, $\boldsymbol{C}_o$)。

(b) ($\boldsymbol{A}_o$, $\boldsymbol{B}_o$)是可控的吗？

(c) 计算 $\boldsymbol{K}$，使得闭环极点配置到 $s=-3\pm3j$。

(d) (c)问中的闭环系统是可观测的吗？

(e) 设计一个全阶估计器，使得估计器误差极点在 $s=-12\pm12j$ 上。

(f) 假设将系统改为有一个零点的形式：

$$G_1(s)=\frac{9(s+1)}{s^2-9}$$

证明：若 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+r$，则存在一个反馈增益 $\boldsymbol{K}$，使得闭环系统是不可观测的[再为 $G_1(s)$ 设计一种能观标准形实现]。

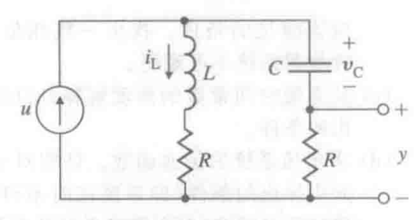


图7.90 习题7.37的电路

7.36 说明线性系统可控性、可观测性和稳定性之间有何关系？

7.37 考虑如图7.90所示的电路图。

(a) 写出该电路的内部(状态)方程。输入 $u(t)$ 为电流，输出 y 为电压。令 $x_1=i_L$ 和 $x_2=v_C$。

(b) 为保证系统是可控的，R、L、C 应满足什么条件？

(c) 为保证系统是可观测的，R、L、C 应满足什么条件？

7.38 某反馈系统的框图如图7.91所示，系统状态为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_p\\ \boldsymbol{x}_f\end{bmatrix}$$

矩阵的维数如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=n\times n, & \boldsymbol{L}&=n\times1\\ \boldsymbol{B}&=n\times1, & \boldsymbol{x}&=2n\times1\\ \boldsymbol{C}&=1\times n, & r&=1\times1\\ \boldsymbol{K}&=1\times n, & y&=1\times1\end{aligned}$$

(a) 写出该系统的状态方程。

(b) 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}$，其中：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

证明系统是不可控的。

(c) 求出该系统从 r 到 y 的传递函数。

7.39 本题旨在使你增进对可控性和可观测性的理解。考虑如图7.92所示的电路，输入电压电源为 $u(t)$，输出电流为 $y(t)$。

(a) 用电容电压和电感电流为状态变量，写出该系统的状态方程和输出方程。

(b) 求出使得系统不可控，R_1、R_2、C 和 L

图 7.91 习题 7.38 的框图

应该满足的条件。找出一族相似的条件使得系统不可观测。

(c) 从系统时间常数的角度解释(b)问中求出的条件。

(d) 求出该系统的传递函数。证明对于(b)问中导出的条件(即系统何时不可控或何时不可观测)存在零极点对消现象。

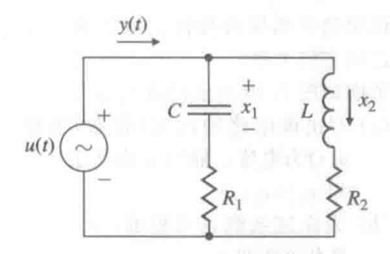


图 7.92 习题 7.39 的电路

7.40 卫星运动的线性化方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

输入 u_1 和 u_2 为径向和切向压力，状态变量 x_1 和 x_3 为相对参考(圆形)轨道的径向偏移和角度偏移，输出 y_1 和 y_2 分别为半径和角度的测量值。

(a) 证明：两个控制输入都使用时，系统是可控的。

(b) 证明：仅使用一个输入时，系统是可控的。它是哪个输入？

(c) 证明：两个测量值都使用时，系统是可观测的。

(d) 证明：仅使用一个测量值时，系统是可观测的，它是哪个测量值？

7.41 考虑如图 7.93 所示系统。

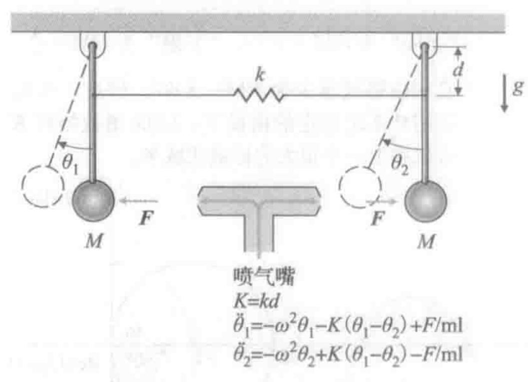


图 7.93 习题 7.41 的耦合摆

(a) 写出该系统的状态方程，用 $[\theta_1\ \theta_2\ \dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2]^T$ 作为状态矢量，F 作为单输入。

(b) 证明：仅使用 θ_1 测量值时，所有的状态变量都是可观测的。

(c) 证明：系统的特征多项式为两个振荡器多项式的乘积。证明时先写出包含如下状态变量的一组新系统方程。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

提示：若 A 和 D 是可逆矩阵，则有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

(d) 推导弹簧的状态对 F 是可控的，单摆的状态对 F 是不可控的。

7.42 某五阶系统特征方程的根为 0、−1、−2 和 −1±1j。将系统分解为可控部分和不可控部分时，可控部分特征方程的根为 0 和 −1±1j。将系统分解为可观测部分和不可观测部分时，可观测部分的模态为 0、−1 和 −2。

(a) 该系统 $b(s) = C\mathrm{adj}(sI - A)B$ 的零点位置在哪？

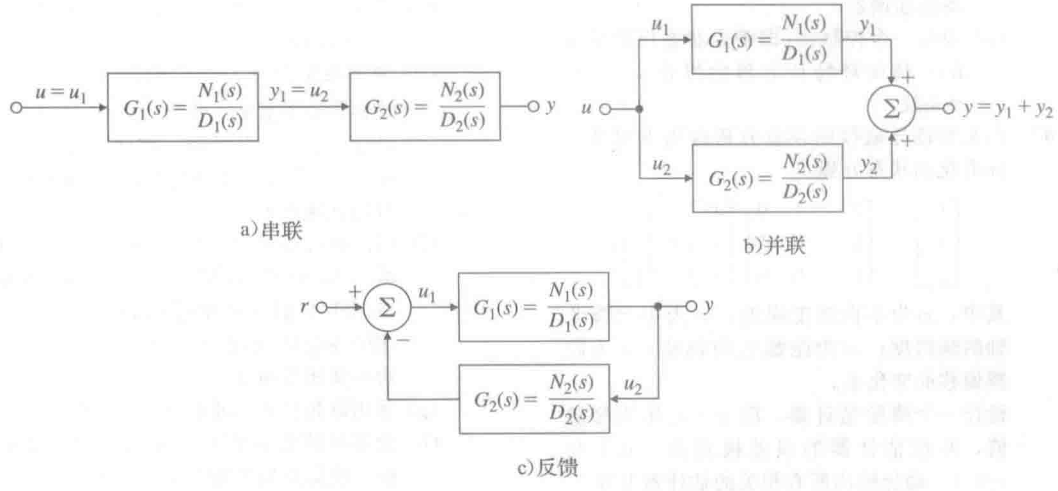


图 7.94 习题 7.43 的框图

(b) 仅包含可控和可观测模态的降阶传递函数的极点是什么？

7.43 考虑图 7.94 给出的串联、并联和反馈结构的系统。

(a) 假设每一个子系统都有如下的可控-可观测实现：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i$$
$$\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i$$

其中：$i=1$，2，给出图 7.94 中各个复合系统的一组状态方程。

(b) 对每种情况，讨论要使每个系统可控且可观测，多项式 N_i 和 D_i 的根必须满足什么条件。从零极点对消的观点，简要解释一下你的答案。

7.44 考虑系统 $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=\dot{u}+u$。

(a) 求出给定微分方程对应的能控标准形状态矩阵 $\boldsymbol{A}_c$，$\boldsymbol{B}_c$ 和 $\boldsymbol{C}_c$。

(b) 在(x_1, x_2)平面，画出 $\boldsymbol{A}_c$ 的特征矢量，并画出与完全可观测的状态变量($\boldsymbol{x}_o$)和完全不可观测的状态变量($\boldsymbol{x}_{\bar{o}}$)对应的矢量。

(c) 用能观性矩阵 $\boldsymbol{O}$ 的形式表达 x_o 和 $x_{\bar{o}}$。

(d) 给出能观标准形状态矩阵，将可控性代替可观测性重复(b)问和(c)问。

7.45 同步卫星(如气象卫星)的运动方程为

$$\ddot{x}-2\omega\dot{y}-3\omega^2x=0,\quad \ddot{y}+2\omega\dot{x}=u$$

其中：x 为径向波动；y 为轴向位置波动；u 为 y 方向的引擎推力。

如图 7.95 所示，若运行与地球旋转同步，则 $\omega=2\pi/(3600\times24)\text{rad/s}$。

(a) 状态 $\boldsymbol{x}=[x\quad \dot{x}\quad y\quad \dot{y}]^{\mathrm{T}}$ 是可观测的吗？

(b) 选取 $\boldsymbol{x}=[x\quad \dot{x}\quad y\quad \dot{y}]^{\mathrm{T}}$ 为状态矢量，y 为测量值，设计一个全阶观测器，使极点配置到 $s=-2\omega$、-3ω 和 $-3\omega\pm3\omega\mathrm{j}$。

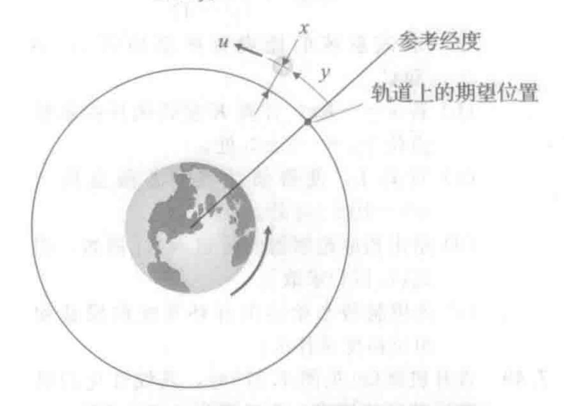


图 7.95 习题 7.45 的同步卫星轨道图

7.46 如图 7.96 所示的单摆运动的线性化方程为

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=u$$

图 7.96 习题 7.46 的单摆图

(a) 写出状态空间形式的运动方程。

(b) 给定 $\dot{\theta}$ 的测量值，设计一个估计(观测)器重构单摆的状态。假定 $\omega=5\text{rad/s}$，估计器极点选在 $s=-10\pm10\mathrm{j}$ 处。

(c) 写出从测量值 $\dot{\theta}$ 到观测值 θ 之间的估计

器传递函数。

(d) 设计一个控制器(即确定状态反馈增益 $\boldsymbol{K}$)，使闭环特征方程的根在 $s=-4\pm4j$ 处。

7.47 由某惯性导航仪的误差分析得出下面这组标准化的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

其中：x_1 为东向速度误差；x_2 为平台绕北轴的倾斜度；x_3 为陀螺北向偏移；u 为陀螺偏移的变化率。

设计一个降阶估计器，取 $y=x_1$ 作为测量值，并使估计器的误差极点为 -0.1 和 -0.1。确保给出所有相关的估计器方程。

7.8 节习题

7.48 某过程传递函数为

$$G(s)=\frac{4}{(s^2-4)}$$

(a) 求该系统的能观标准形矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$。

(b) 若 $u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$，计算 $\boldsymbol{K}$ 使得闭环控制极点位于 $s=-2\pm2j$ 处。

(c) 计算 $\boldsymbol{L}$，使得估计器误差极点位于 $s=-10\pm10j$ 处。

(d) 给出相应控制器的传递函数[例如，用式(7.174)求取]。

(e) 该控制器和给定的开环系统的增益和相位裕度是什么？

7.49 直升机盘旋(见图 7.97)时，其线性化的纵向运动可建模成一个标准化的三阶系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\\dot{\theta}\\\dot{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.4&0&-0.01\\1&0&0\\-1.4&9.8&-0.02\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\\theta\\u\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6.3\\0\\9.8\end{bmatrix}\delta$$

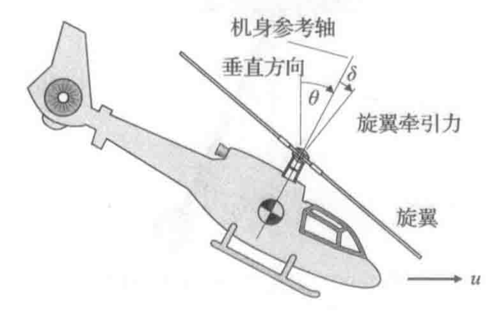


图 7.97 习题 7.49 的直升机

假定传感器测量值作为输出的水平速度 u，即 $y=u$。

(a) 求开环极点位置。

(b)系统是可控的吗？

(c) 求反馈增益，使系统极点配置到 $s=-1\pm1j$ 和 $s=-2$ 上。

(d) 为该系统设计一个全阶估计器，将估计器极点配置到 -8 和 $-4\pm4\sqrt{3}j$ 上。

(e) 设计一个降阶估计器，将两个极点均置于 -4。降阶估计器与全阶估计器相比有何优缺点？

(f) 用控制增益和(d)问中设计的全阶估计器计算补偿器的传递函数，并用 Matlab 绘制该补偿器的频率响应。为该闭环设计绘制伯德图并标出相应的增益和相位裕度。

(g) 采用降阶估计器重新计算(f)问。

(h) 绘制回路传递恢复；并为控制律选取根，使得控制带宽与(c)问的设计相匹配。为全阶估计器选取根，使得估计器的误差带宽与(d)问的设计相似。绘制相应的伯德图，并针对以下几方面将极点配置与回路传递恢复设计进行比较：带宽、稳定裕度、阶跃响应和单位阶跃旋翼倾角输入所需的控制作用。用 Matlab 进行计算。

7.50 假定直流驱动电动机与小车的轮子相连，以控制固定在小车上的倒立摆的运动，电动机电流为 u。对应于该系统的线性化且归一化的运动方程可写为如下形式：

$$\ddot{\theta}=\theta+v+u$$

$$\dot{v}=\theta-v-u$$

其中：θ 为摆角；v 为小车的速度。

(a) 希望用下述形式得到 u 的反馈控制 θ：

$$u=-K_1\theta-K_2\dot{\theta}-K_3v$$

求出将闭环系统极点置于 -1 和 $-1\pm j\sqrt{3}$ 的反馈增益。

(b) 假定 θ 和 v 已测得，为 θ 和 $\dot{\theta}$ 构造一个形如下式的估计器：

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}(y-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}})$$

其中：$\boldsymbol{x}=[\theta\ \ \dot{\theta}]^{\mathrm{T}}$ 和 $y=\theta$。将 v 和 u 看作已知，选取 $\boldsymbol{L}$ 将估计器极点置于 -2 和 -2 处。

(c) 给出控制器的传递函数，绘制该闭环系统的伯德图，标出相应的增益和相位裕度。

(d) 用 Matlab 绘制系统对 θ 初始状态的响应曲线，并给出小车初始运动的物理解释。

7.51 考虑如下系统的控制：

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10}{s(s+1)}$$

(a) 令 $y=x_1$ 和 $\dot{x}_1=x_2$，写出系统的状态方程。

(b) 求 K_1 和 K_2，使得采用 $u=-K_1x_1-K_2x_2$ 所得闭环系统极点的自然频率为 $\omega_n=3$ 和阻尼比为 $\zeta=0.5$。

(c) 为该系统设计一个状态估计器，使得估计器的误差极点为 $\omega_{n1}=15$ 和 $\zeta_1=0.5$。

(d) 将(a)问～(c)问结合，得到的控制器的传递函数是什么？

(e) 当被控对象的增益(一般为10)改变时，绘制所得闭环系统的根轨迹。

7.52 不稳定运动动态方程为

$$\ddot{x}=x+u$$

产生于如下情况，倒立摆(如火箭)，必须采取措施进行控制。

(a) 令 $u=-Kx$(仅用位置反馈)，绘制关于标量增益 K 的根轨迹。

(b) 考虑如下形式的超前补偿器：

$$U(s)=K\frac{s+a}{s+10}X(s)$$

选取 a 和 K，使系统的上升时间约为 2s、超调不超过 25%。绘制关于 K 的根轨迹。

(c) 绘制未补偿被控对象的伯德图(幅值和相位图)。

(d) 绘制补偿设计的伯德图并估计相位裕度。设计状态反馈使得闭环极点与(b)问中设计的极点位置相同。

(e) 用测量值 $x=y$ 为 x 和 $\dot{x}$ 设计一个估计器，并选择观测器增益 $\mathbf{L}$，使得关于 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的方程的特征根满足阻尼比 $\zeta=0.5$、自然频率 $\omega_n=8$。

(f) 绘制将估计器与控制律结合得到的系统框图，并标出 $\hat{x}$ 和 $\dot{x}$。绘制该闭环系统的伯德图并将得到的带宽和稳定裕度与(b)问中的设计进行比较。

7.53 如图 7.98 所示的柔性机械臂的简化控制模型，其中：$k/M=900\text{rad/s}^2$，y 为输出，物体的位置；u 为输入，弹簧末端的位置。

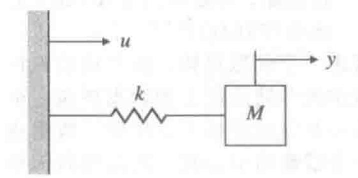


图 7.98 习题 7.53 的简化机械手臂

(a) 写出状态空间形式的运动方程。

(b) 设计一个估计器，其根为 $s=-100\pm100j$。

(c) 若仅 $\dot{y}$ 的测量值可得，系统的两个状态变量是否均能被估计？

(d) 设计一个全状态反馈控制器使其根为 $s=-20\pm20j$。

(e) 为系统设计一个根为 $s=-200\pm200j$ 的控制律是否理？陈述你的理由。

(f) 写出补偿器方程，其中包含 y 的控制输入。为闭环系统绘制伯德图并给出该设计的增益和相位裕度。

7.54 两个级联水箱如图 7.99 所示，控制液体流动动态特性的线性化微分方程如下：

$$\delta\dot{h}_1+\sigma\delta h_1=\delta u$$

$$\delta\dot{h}_2+\sigma\delta h_2=\sigma\delta h_1$$

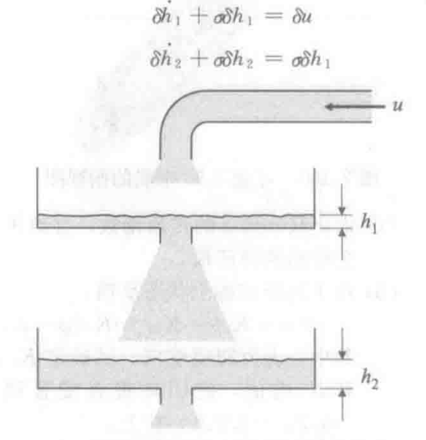


图 7.99 习题 7.54 的耦合水箱

其中：δh_1 为容器 1 中液体距标称液位深度的微分；δh_2 为容器 2 中液体距标称液位深度的微分；δu 为容器 1 中液体流入速度的微分(控制量)。

(a) 两个级联水箱的液位控制器：用如下形式的状态反馈

$$\delta u=-K_1\delta h_1-K_2\delta h_2$$

选择 K_1 和 K_2 的值，使得闭环特征根为

$$s=-2\sigma(1\pm j)$$

(b) 两个级联水箱的液位估计器：假定仅容器 2 的液位微分(即 $y=\delta h_2$)是可测的。用该测量值设计估计器，使其给出容器 1 和容器 2 液位微分的连续且平滑的观测值，估计器误差极点为 $-8\sigma(1\pm j)$。

(c) 两个级联水箱的估计器/控制器：绘制将(b)问中的估计器与(a)问中的控制器结合得到的闭环系统的框图(给出独立的积分器)。

(d) 用 Matlab 计算并绘制对 δh_1 的初始偏移 y 的响应。绘图时假设 $\sigma=1$。

7.55 一船长 100m，以 10m/s 的常速度运动，其横向运动的描述如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0895 & -0.286 & 0\\ -0.0439 & -0.272 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ \psi\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.0145 \\ -0.0122 \\ 0 \end{bmatrix}\delta$$

其中：β为侧滑角，(°)；ψ为航向角，(°)；δ为舵角，(°)；r为偏航速度(见图 7.100)

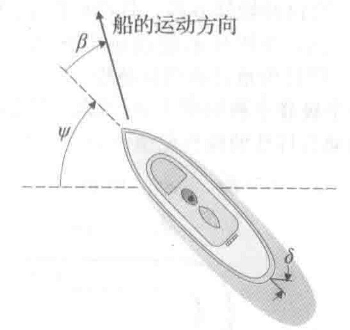


图 7.100　习题 7.55 中船的俯视图

(a) 求出从δ到ψ的传递函数，并给出该未受控船的特征根。

(b) 用下述形式的全状态反馈：

$$\delta = -K_1\beta - K_2 r - K_3(\psi - \psi_d)$$

其中，ψ_d为期望航向。试确定K_1、K_2和K_3的值，使闭环极点配置到$s=-0.2$，$-0.2\pm 0.2j$上。

(c) 设计一个基于ψ的测量值的状态估计器(例如，ψ可由陀螺仪测得)。将估计器误差方程的根配置到$s=-0.8$和$-0.8\pm 0.8j$上。

(d) 给出如图 7.101 中补偿器$D_c(s)$的状态方程和传递函数，并绘制出它的频率响应。

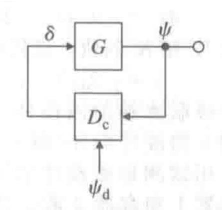


图 7.101　习题 7.55 中船的控制框图

(e) 绘制该闭环系统的伯德图并计算相应的增益裕度和相位裕度。

(f) 计算参考输入的前馈增益并绘制航向角发生 5°变化时系统的阶跃响应。

7.9 节习题

7.56　在 7.92 节的脚注 11 中已提到，式(7.202)中一种选取前馈增益的合理方法是选择$\overline{N}$使得当r和y均不改变时，从r到u的直流增益为从y到u的直流增益的相反数。请基于这一选取原则推导求$\overline{N}$的公式。证明若被控对象为 1 型的，这一选择方法与式(7.202)中给出的相同。

7.10 节习题

7.57　假设球轴承悬浮装置的线性化时域方程为$\ddot{x}-x=u+w$。这里w为由功率放大器引起的常值偏压。引入积分误差控制并选取三个控制增益$\boldsymbol{K}=[K_1\quad K_2\quad K_3]$使得闭环极点为$-1$和$-1\pm j$且对$w$和(阶跃)位置控制信号的稳态误差为零。令$y=x$，参考输入$r\stackrel{\text{def}}{=}y_{\text{ref}}$为常数。绘制你所得设计的框图并标出反馈增益$K_i$的位置。假设$\dot{x}$和$x$均可测。绘制闭环系统对阶跃控制输入的响应和对偏压输入的阶跃变化的响应。证明系统为 1 型的，用 Matlab(Simulink)软件对系统响应进行仿真。

7.58　考虑如下状态矩阵的系统：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{C}=[1\quad 3]$$

(a) 用反馈形式$u(t)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)+\overline{N}r(t)$将极点移动到$-3\pm 3j$处，其中：$\overline{N}$是一非零标量。

(b) 选取$\overline{N}$，使得若r为常数，系统有零稳态误差，即$y(+\infty)=r$。

(c) 证明：若$\boldsymbol{A}$变为$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$，其中：$\delta\boldsymbol{A}$是一任意 2×2 矩阵，则对于(b)问中选定的$\overline{N}$将不会得到$y(+\infty)=r$。因此，系统对$\boldsymbol{A}$中参数的变化不具有鲁棒性。

(d) 给系统增加一个积分器，并使用单位反馈就可使系统的稳态误差特性具有鲁棒性，即令$\dot{x}_1=r-y$，其中x_1为积分器状态。为证明这一点，先使用形式为$u=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}-K_1x_1$的状态反馈，使得增广系统的极点位于$-3$，$-2\pm j\sqrt{3}$处。

(e) 证明：无论系统矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$如何改变，只要闭环系统保持稳定，所得系统就会得到$y(+\infty)=r$。

(f) 对于(d)问用 Matlab(Simulink)软件绘制系统对常值输入的时间响应。绘制控制器、灵敏度函数($\mathcal{S}$)和互补灵敏度函数($\mathcal{T}$)的伯德图。

△7.59　考虑一个伺服机构，该机构跟踪位于计算机磁盘存储系统上的数据磁道。由于各种不可避免的机械上的缺陷，数据磁道不是一个精确的中心圆，因此径向伺服机构必须跟踪一个角频率为ω_0(磁盘的自转速度)的正弦输入。这一系统线性化模型的状态矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=[1\quad 3]$$

正弦参考输入满足$\ddot{r}=-\omega_0^2 r$。

(a) 令 $\omega_o=1$，设计内模使误差系统的极点配置到

$$\alpha_c(s)=(s+2\pm 2j)(s+1\pm 1j)$$

将降阶估计器极点配置到

$$\alpha_e(s)=(s+6)$$

(b) 画出系统的框图，明确地标出控制器中(内部模型)频率为 ω_o 的振荡器的存在。再证明存在阻塞零点为 $\pm j\omega_o$。

(c) 用 Matlab(Simulink)软件绘制系统对频率为 $\omega_o=1$ 的正弦输入的时间响应。

(d) 绘制伯德图来表明该系统对于频率在 ω_o附近(不包括 ω_o)的正弦输入的频率响应如何。

△7.60　计算例7.38中控制器的传递函数[从 $Y(s)$ 到 $U(s)$]。能实现跟踪和抑制扰动的控制器有何显著特征？

△7.61　考虑有关摆的问题，其控制转矩为 T_c，扰动转矩为 T_d：

$$\ddot{\theta}+4\theta=T_c+T_d$$

这里($g/l=4$)。假设在插头处有一电位计用来测量输出角度 θ，但有一未知的常值偏移 b。因此测量方程为：

$$y=\theta+b$$

(a) 取“增广”状态矢量为：



$$\begin{bmatrix}\theta\\ \dot{\theta}\\ w\end{bmatrix}$$

其中，w 为等效输入偏移。以状态空间形式写出系统方程，给出矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的值。

(b) 用状态变量法证明该模型的特征方程为 $s(s^2+4)=0$。

(c) 证明，若假设 $y=\theta$，则 w 是可观测的。针对下述状态写出估计器方程：

$$\begin{bmatrix}\hat{\theta}\\ \hat{\dot{\theta}}\\ \hat{w}\end{bmatrix}$$

选取估计器增益 $[l_1\quad l_2\quad l_3]^{\mathrm{T}}$ 将估计器误差特征方程的所有根均配置到 -10 上。

(d) 用估计(可控的)状态变量的全状态反馈推导控制律，将闭环极点置于 $-2\pm j2$ 上。

(e) 用积分器部件画出完整的闭环系统的框图(估计器、被控对象和控制器)

(f) 将估计偏移引入到控制中以得到对输出偏移 b 的零稳态误差；对于 b 的阶跃变化，即 b 从零到某一常值，绘制系统的响应曲线以验证你设计的系统特性。

7.10.3 节习题

△7.62　考虑希望跟踪一个斜坡参考输入的伺服机构问题，被控对象和理想模型方程如下：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_m=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_m$$

$$y_m=[1\quad 0]\boldsymbol{x}_m$$

设计一个模型跟踪控制律并证明其跟踪性能。将闭环极点配置到 $s=-2\pm j2$ 上。

△7.63　假设希望闭环系统的表现与一个期望模型相似，该期望模型称为隐式模型：

$$\dot{z}=\boldsymbol{A}_m z$$

可以最小化线性二次调节器的性能指标：

$$\mathcal{J}=\int_0^{+\infty}\{(\dot{y}-\boldsymbol{A}_m y)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1(\dot{y}-\boldsymbol{A}_m y)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}t$$

证明此性能指标等价于标准的LQR性能指标加上一个控制和状态形式的交叉权重项：

$$\mathcal{J}=\int_0^{+\infty}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{x}+2u^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{x}+u^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}u\}\mathrm{d}t$$

其中：

$$\hat{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{C})$$

$$\hat{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{CA}-\boldsymbol{A}_m\boldsymbol{C})$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{CB}$$

△7.64　在显式模型跟踪中，假设在LQR问题中，我们期望闭环系统的表现尽可能的接近形如下式的系统：

$$\dot{z}=\boldsymbol{A}_m z$$

这代表了理想的动力学模型。我们选择一个形如下式的性能指标：

$$\mathcal{J}=\int_0^{+\infty}\{(y-z)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1(y-z)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}t$$

(a) 证明该性能指标可以通过扩展被控对象和模型的状态转化为标准的性能指标。选择增广状态变量 $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 并写下系统方程来验证：

$$\mathcal{J}=\int_0^{+\infty}\{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\}\mathrm{d}t$$

其中：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\\ -\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{C} & \boldsymbol{Q}_1\end{bmatrix}$$

(b) 系统的哪个状态变量是不可控的？结果是否令人惊讶？

(c) 最优控制的形式：

$$u=-\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}-\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{z}$$

意味着模型的方程必须作为控制律的一部分来实现。假设控制的模型如下式：

$$\dot{z}=\boldsymbol{A}_m z+\boldsymbol{B}_p u_p$$

其中：u_p 为飞机系统的驾驶员输入。证明：

$$\frac{Y(s)}{U_p(s)} = \underbrace{-C(sI - A + BK_1)^{-1}}_{\text{闭环动态}} \underbrace{K_2(sI - A_m)^{-1}B_p}_{\text{前馈动态}}$$

这表明前馈动态可以用来改善系统的暂态响应。

(d) 整个系统的传输零点是什么?

(e) 该方案与标准 LQR 相比较,可能的缺点是什么,是没有明确的模型吗?

564 ~ 589

7.13 节习题

△7.65 某系统的传递函数为 $e^{-Ts}G(s)$,其中:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

该系统的史密斯补偿器由下式给出:

$$D_c'(s) = \frac{D_c(s)}{1+(1-e^{-sT})G(s)D_c(s)}$$

取 $T=5$ 和 $D_c(s)=1$,绘制补偿器的频率响应,绘制伯德图并标出系统的增益裕度和相位裕度。[⊖]

⊖ 该问题由 Åström(1977 年)提出。

第8章 数字控制

数字控制的展望

迄今为止，我们研究过的大多数控制器都是用拉普拉斯变换或微分方程来描述的，严格来说，这两种描述法都假设用模拟电子电路来实现控制器，如图5.31所示。然而，今天我们使用的大多数控制系统采用数字计算机(通常是微处理器或微控制器)来实现控制器。本章的目的是说明如何用数字计算机实现一个控制系统。这种实现产生了二分之一采样周期的平均时延和一个称为混叠的现象，这些都需要在控制器设计中加以处理。

模拟电子技术可以对信号进行积分或微分。为了使数字计算机能够完成这些任务，描述控制器的微分方程必须近似转化成包含加法、乘法和除法的代数方程。本章将详细介绍实现这些近似的各种方法。必要的话，最终的设计可以使用直接数字分析来实现。在某些情况下，也可以直接在离散时间域下来实现。 590

通过本章内容，读者应该能够设计、分析并实现一个数字控制系统。然而，我们这里介绍的仅仅是一个复杂学科的有限部分，更多详细内容可参见由富兰克林(Franklin)等人于1998年所著的“Digital Control of Dynamic Systems”一书。

本章概述

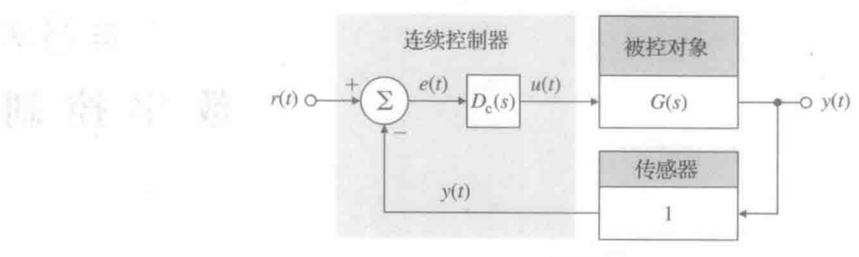
8.1节将描述数字控制系统的基本结构，并介绍由采样引起的一些问题。一个基于连续控制律离散近似的数字实现可以通过Simulink来评估，以确定相比于连续时间情况，数字系统性能下降的程度。然而，为了完全理解采样对数字系统的影响，需要学习离散线性分析工具。这就要求掌握z变换，相关内容将在8.2节中介绍。8.3节为掌握各种各样的离散等效系统奠定理论基础。通常来说，如果采样速率足够快，离散等效系统会工作得很好。8.4节和8.5节将讨论硬件特性和采样速率问题，这些问题都是与实现数字控制器紧密相关的。

与前面例子的分析过程一样，离散分析允许我们直接分析判断近似离散等效系统的性能而不依赖数值仿真，如Simulink。这种分析能够指导我们对设计结果进行调整，相关内容将在8.6节介绍。同时，我们还可以进行直接数字化设计(也称为离散化设计)，该方法是一种精确设计方法，不依赖采样速率的快慢。直接数字化设计将在8.7节介绍。

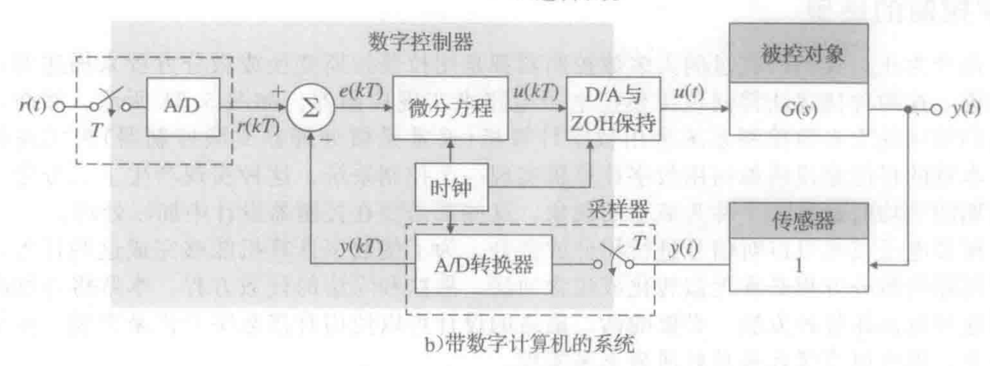
8.1 数字化

在前几章介绍的典型连续系统的拓扑结构图，如图8.1a所示。误差信号e和控制器$D_c(s)$的计算都能在数字计算机中实现，其系统结构图如图8.1b所示。这两种实现间的根本区别在于：数字系统是对被控对象输出的采样值进行处理，而不是处理连续信号；由$D_c(s)$提供的连续控制，所含的任何积分和微分都必须在离散时间下产生，并通过差分方程的数值计算方法近似得到。因为计算机不能直接运行动态函数，所以这些方程都是代数递归方程。

细看整个过程，首先对象传感器的模拟输出被采样并通过模/数(A/D)转换器转换为一个数值。该设备对物理变量(大多数是电压信号)进行采样，然后将其转化成一个10位至16位的二进制数。这种从模拟信号$y(t)$到采样值$y(kT)$的转换每隔T秒重复一次，T 591



a)连续系统



b)带数字计算机的系统

图 8.1 基本控制系统的框图

即为采样周期，$1/T$ 为采样速率。如果 T 的单位为 s，则采样速率 $1/T$ 的单位为 Hz，可用f_s表示。采样后的信号为 $y(kT)$，其中 k 可取任意整数值。$y(kT)$常简写为 $y(k)$。为了区别于时间域内的连续信号如 $y(t)$，我们称这种类型的变量为*离散信号*。一个兼有离散和连续信号的系统称作*采样系统*。

本书中我们假设采样周期是固定不变的。而实际上，数字控制系统的采样周期有时是变化的，且(或)在不同的反馈通路中采样周期也不相同。通常，计算机逻辑包含一个时钟，它每隔 T 秒提供一个脉冲或中断，当中断到来时，A/D 转换器就会向计算机发送一个数；另一种实现方法称为*自行转换*，它是在每个代码执行周期结束后访问 A/D 转换器。前一种情况中，采样周期是精确不变的；而后一种情况中，如果不存在可以改变执行代码数量的逻辑分支，采样周期实际上是由代码长度决定的。对于输入指令信号 $r(t)$，也可能由采样器和 A/D 转换器来产生离散的 $r(kT)$，将其减去测量输出 $y(kT)$就得到离散误差信号 $e(kT)$。

592

连续系统的控制器$D_c(s)$可以用差分方程近似，差分方程是微分方程的离散形式，如果采样速率足够快，它可以准确复制$D_c(s)$的动态特性。差分方程最后得到的是在每一个采样时刻的离散信号 $u(kT)$。这一信号可通过数/模(D/A)转换器转换成连续信号 $u(t)$并保持下来：D/A 转换器可将二进制数转换成模拟电压值，而*零阶保持器*(ZOH)将该电压值保持一个采样周期。将得到的控制信号 $u(t)$加到执行机构上，施加的方式与连续实现时的完全相同。有两种基本技术来求取数字控制器的差分方程。一种技术称为*离散化等效*，该方法使用前几章介绍的方法设计一个连续控制器$D_c(s)$，然后用 8.3 节介绍的方法中的一种来近似该$D_c(s)$。另一种方法称作*离散化设计*，将在 8.7 节中介绍，这种方法可以不用预先设计$D_c(s)$而直接建立差分方程。

所需要的采样速率取决于系统的闭环带宽。通常，采样速率应至少为带宽的 20 倍以确保数字控制器与连续控制器的性能匹配。如果在数字控制器中做一些调整或接受某些性能上的退化，那么可以采用相对较低的采样速率。如果为了最小化硬件成本，那么可以运用允许更低采样速率的离散化设计法；但如果要获得一个数字控制器的最佳性能，则需要采样速率高于带宽的 25 倍。

值得注意的是，对实现控制系统数字化影响最大的是保持作用引起的延迟。因为每一个 $u(kT)$ 的值都要保持到计算机得到下一个 $u(kT)$ 值为止，如图 8.1b 所示，所以 $u(t)$ 的连续值是由一些阶梯组成的(见图 8.2)，这些常值经过平均后都是从 $u(kT)$ 开始延迟了 $T/2$。如果将这 $T/2$ 的延迟简单地纳入到系统的连续分析中，就可极好地预测当采样速率远低于 20 倍带宽时，采样结果对系统的影响。这些将在 8.3.5 小节中进一步讨论。

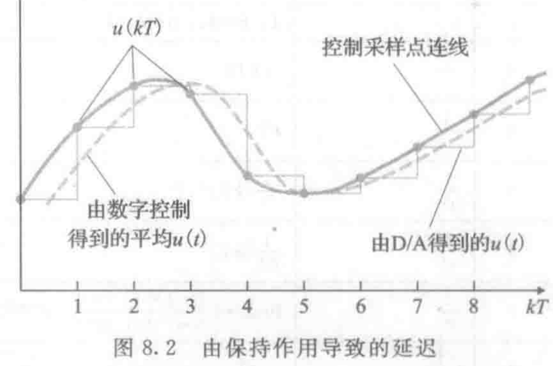


图 8.2 由保持作用导致的延迟

8.2 离散系统的动态分析

z 变换是用来分析线性离散系统的数学工具，它在离散系统的分析中所起的作用相当于拉普拉斯变换在连续系统分析中起的作用。本节将简要地介绍一下如何使用 z 变换分析离散系统，以及它与拉普拉斯变换的关系。

8.2.1 z 变换

在连续时间系统的分析中，我们使用拉普拉斯变换，其定义为

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

可由上述定义直接推导出拉普拉斯变换的重要性质(在零初始条件下)：

$$\mathscr{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s) \tag{8.1}$$

已知系统的微分方程描述，可以利用式(8.1)的关系求出线性连续系统的传递函数。

而分析离散系统的过程与上述过程十分相似，z 变换的定义为

$$\mathscr{Z}\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\,z^{-k} \tag{8.2}$$

其中：$f(k)$ 为 $f(t)$ 的采样值，如图 8.3 所示，$k=0$，1，2，3，…对应离散采样时刻 t_0，t_1，t_2，t_3，…由上述定义可直接推导出一个与式(8.1)相似的性质，即

$$\mathscr{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) \tag{8.3}$$

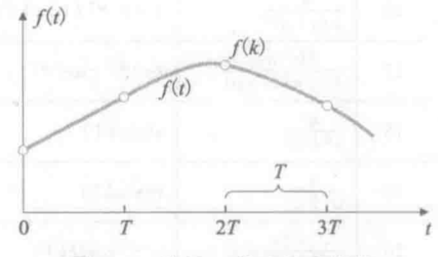


图 8.3 信号 f 的连续采样值

其中：z^{-1} 代表一个采样周期的延迟。对于给定某系统的差分方程，利用这一关系式可以很容易地求出离散系统的传递函数。例如，对于一般的二阶差分方程：

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

利用式(8.3)可将上式转换成变量 $y(k)$，$u(k)$，…的 z 变换形式：

$$Y(z) = (-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})Y(z) + (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})U(z) \tag{8.4}$$

由式(8.4)可得到的离散传递函数：

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

8.2.2 z 反变换

表 8.1 给出了简单的离散时间函数与其 z 变换间的对应关系，并给出了同一时间函数的拉普拉斯变换。

表 8.1 简单离散时间函数的拉普拉斯变换和 z 变换⊖

No.	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1		$1,\ k=0;\ 0,\ k\neq 0$	1
2		$1,\ k=k_0;\ 0,\ k\neq k_0$	z^{-k_0}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{T_z}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kT)^2$	$\frac{T^2}{2}\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kT)^3$	$\frac{T^3}{6}\left[\frac{z(z^2+4z+1}{(z-1)^4}\right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim a\to 0\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT})$	$\lim a\to 0\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}})$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kT)^2e^{-akT}$	$\frac{T^2}{2}e^{-aT}z\frac{(z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}e^{-akT})$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}}\frac{z}{z-e^{-aT}})$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(ze^{-aT})}$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(akT-1+e^{-akT})$	$\frac{z[(aT-1+e^{-aT})z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})]}{a(z-1)^2(z-e^{-aT})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akT}-e^{-bkT}$	$\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})z}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-akT)e^{-akT}$	$\frac{z[z-e^{-aT}(1+aT)]}{(z-e^{-aT})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-akT}(1+akT)$	$\frac{z[z(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})+e^{-2aT}-e^{-aT}+aTe^{-aT}]}{(z-1)(z-e^{-aT})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkT}-ae^{-akT}$	$\frac{z[z(b-a)-(be^{-aT}-ae^{-bT})]}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$
18	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(akT)$	$\frac{z\sin(aT)}{z^2-(2\cos(aT))z+1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(akT)$	$\frac{z(z-\cos(aT))}{z^2-(2\cos(aT))z+1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\cos(bkT)$	$\frac{z(z-e^{-aT}\cos(bT))}{z^2-2e^{-aT}(\cos(bT))z+e^{-2aT}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akT}\sin(bkT)$	$\frac{ze^{-aT}\sin(bT)}{z^2-2e^{-aT}(\cos(bT))z+e^{-2aT}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-akT}(\cos(bkT)+\frac{a}{b}\sin(bkT))$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)[z^2e^{-aT})z+e^{-2aT}]}$ $A=1-e^{-aT}\cos(bT)-\frac{a}{b}e^{-aT}\sin(bT)$ $B=e^{-2aT}+\frac{a}{b}e^{-aT}\sin(bT)-e^{-aT}\cos(bT)$

对于一个常规 z 变换，我们可以利用部分分式法(见附录 A.1.2 节)将其展开成初等项的和的形式，并通过查表找到相应的时间序列。这些步骤与连续系统中的完全相同。然

⊖ $F(s)$为$f(t)$的拉普拉斯变换，$F(z)$为$f(kT)$的 z 变换。注意，当 $t=0$ 时，$f(t)=0$。

而，与连续系统一样，大多数设计者不用z反变换而是采用离散方程的数值计算来获得系统的时域序列。

如果无法直接查表，我们也可以通过长除法得到 z 反变换的表达式。给出 z 变换如下：

$$Y(z)=\frac{N(z)}{D_{\mathrm{d}}(z)} \tag{8.5}$$

通过长除法将分母多项式除以分子多项式，就可得到一个 z^{-1} 的幂序列(可能有无限项)，然后根据式(8.2)即可求出相应的时域序列。

举例来说，一个一阶系统由下述差分方程描述：

$$y(k)=\alpha y(k-1)+u(k) \tag{8.6}$$

其离散传递函数为

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

对于由下式定义的单位脉冲输入：

$$u(0)=1$$
$$u(k)=0, k\neq 0$$

其 z 变换为

$$U(z)=1 \tag{8.7}$$

所以，

$$Y(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \tag{8.8}$$

因此，为求时域序列，我们采用长除法将式(8.8)中的分子多项式除以分母多项式，即

$$
\begin{array}{r l}
 & \underline{1+\alpha z^{-1}+\alpha^{2} z^{-2}+\alpha^{3} z^{-3}+\cdots} \\
1-\alpha z^{-1} &)1 \\
 & \underline{1-\alpha z^{-1}} \\
 & \quad \alpha z^{-1}+0 \\
 & \quad \underline{\alpha z^{-1}-\alpha^{2} z^{-2}} \\
 & \qquad \alpha^{2} z^{-2}+0 \\
 & \qquad \underline{\alpha^{2} z^{-2}-\alpha 3 z^{-3}} \\
 & \qquad\qquad \alpha 3 z^{-3} \\
 & \qquad\qquad\quad \ddots
\end{array}
$$

从而得到无穷序列：

$$Y(z)=1+\alpha z^{-1}+\alpha^{2} z^{-2}+\alpha^{3} z^{-3}+\cdots \tag{8.9}$$

由式(8.9)和式(8.2)，可以得出 y 的采样时间序列为

$$
\begin{aligned}
y(0) &= 1 \\
y(1) &= \alpha \\
y(2) &= \alpha^{2} \\
\vdots &\quad \vdots \\
y(k) &= \alpha^{k}
\end{aligned}
$$

该序列可以直接由式(8.6)经过简单计算得出。

8.2.3 s 与 z 的关系

对于连续系统而言，从第3章可知系统的特性源于 s 平面上不同的极点位置：位于虚轴附近的极点可使系统产生振荡行为，负实轴上的极点可使系统响应按指数规律衰减，而具有正实部的极点可使系统不稳定。这种类似的关系对于设计离散系统也是很有用的。考

虑连续信号：

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at},t>0$$

其拉普拉斯变换为

$$F(s)=\frac{1}{s+a}$$

593 ~ 597

对应的极点为 $s=-a$，则 $f(kT)$的 z 变换为

$$F(z)=\mathscr{Z}\{\mathrm{e}^{-akT}\} \tag{8.10}$$

由表 8.1 可知式(8.9)等价于：

$$F(z)=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}$$

该式对应的极点为 $z=\mathrm{e}^{-aT}$。这意味着在 s 平面上 $s=-a$ 的极点处对应离散域内 $z=\mathrm{e}^{-aT}$ 的极点处。将该结论推广到一般情况，细节参见富兰克林于 1998 年编写的著作。重要结论如下。

z 平面与 s 平面之间的等效特性可由下面的表达式给出：

$$z=\mathrm{e}^{sT} \tag{8.11}$$

其中：T 为采样周期。

表 8.1 还包含了拉普拉斯变换，说明表中 $F(s)$与 $F(z)$的分母多项式的根之间的关系，即 $z=\mathrm{e}^{-aT}$。

图 8.4 给出了常阻尼比 ζ 和自然频率ω_n从 s 平面到 z 平面上半平面的映射曲线，映射关系由式(8.11)给出。这种映射关系有几个其他重要特征(见习题 8.4)。

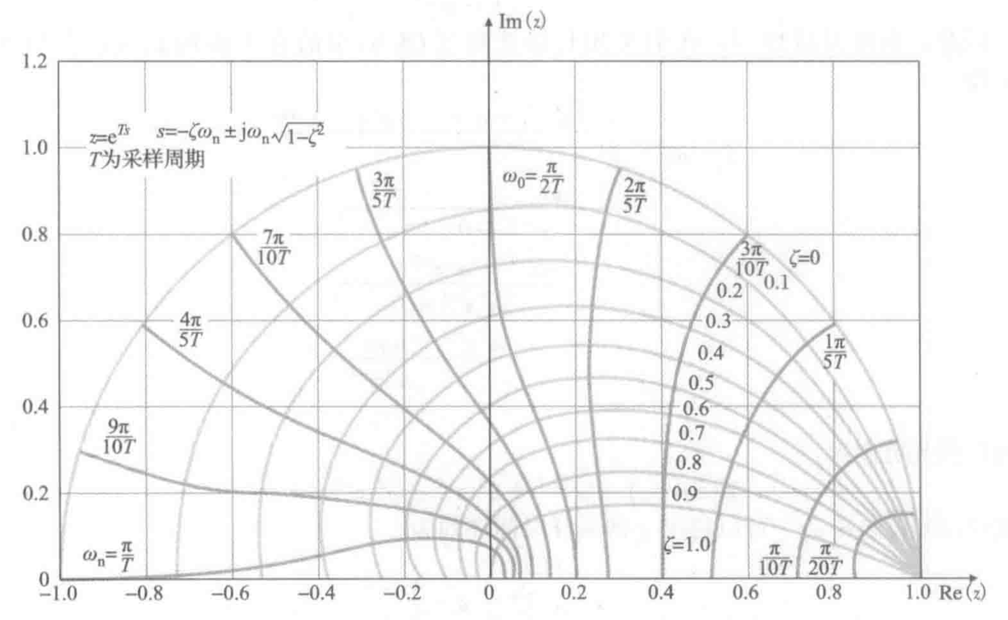


图 8.4 z 平面上的自然频率(深色)和阻尼比(淡色)曲线在 Re(z)轴下面的部分(未显示)与图中给出的上半部是对称的

598

(1) z 平面上的稳定边界为单位圆 $|z|=1$，单位圆内部是稳定的，而单位圆外部是不稳定的。

(2) z 平面内在 $z=+1$ 周围的小邻域必须与 s 平面上 $s=0$ 附近的小邻域一致。

(3) z 平面上的位置给出了归一化为采样速率的响应信息，而在 s 平面上是代表归一化的时间。

(4) 负实轴 z 轴总是代表频率$\omega_s/2$；其中：$\omega_s=2\pi/T$ 为采样速率，当 T 的单位为 s

时，ω_s单位为 rad/s。

(5) s 平面左半部的垂直线(实部为常值或时间为常数)映射到 z 平面是在单位圆之内的一些圆。

(6) s 平面内的水平线(频率的虚部为常值)映射到 z 平面内为放射线。

(7) 频率大于$\omega_s/2$ 称为奈奎斯特频率；由于式(8.11)所隐含的三角函数的周期特性，高于$\omega_s/2$ 的频率在 z 平面内叠加在与其对应的低频上。这种叠加现象称为混叠或重叠。因此，采样频率必须至少为信号最高频率分量的 2 倍，这样才能保证采样值能准确表示该信号(8.4.3 小节将更详细地讨论混叠现象)。

为了更好理解 z 平面内的位置与相应的时域序列的对应关系。图 8.5 给出了由指定位置处的极点产生的时域响应曲线。该图是图 3.16 所示对应的离散形式。

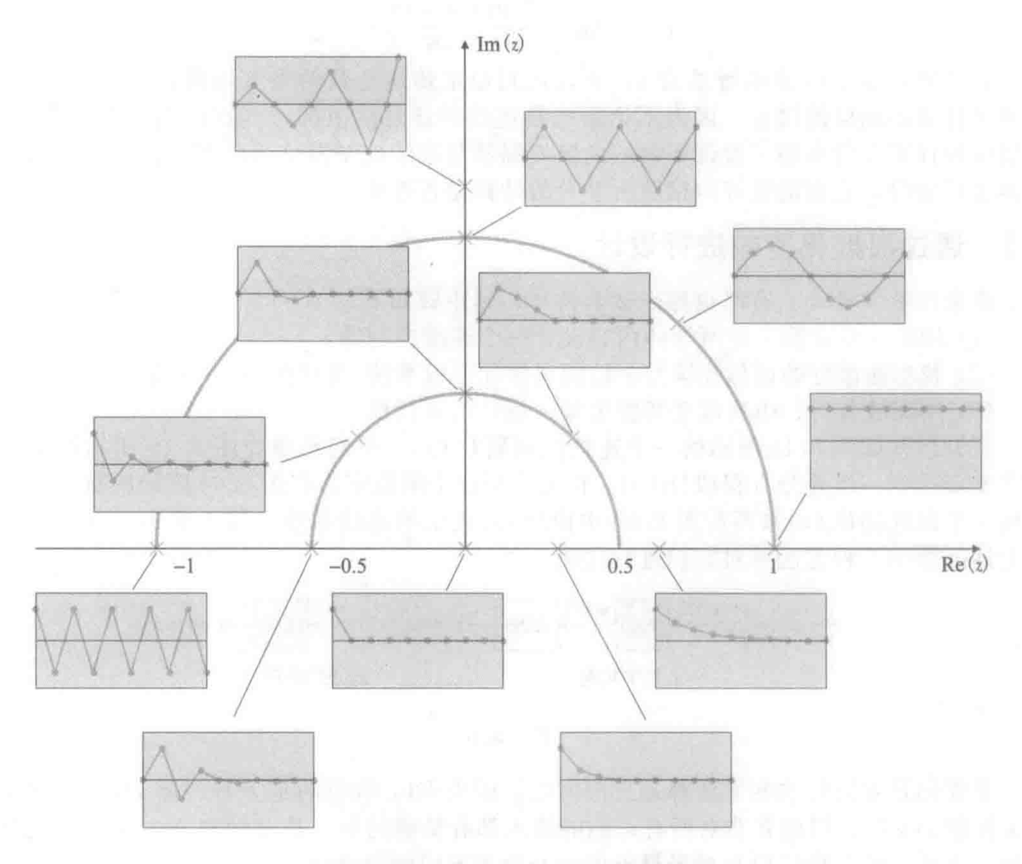


图 8.5 与 z 平面内点对应的时间序列

8.2.4 终值定理

3.1.6 小节讨论了连续时间系统的终值定理，只要 $sX(s)$的所有极点都位于左半平面，就有下式成立：

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_{ss} = \lim_{s\to 0} sX(s) \tag{8.12}$$

终值定理通常用来求系统的稳态误差或者求控制系统各部分的稳态增益。值得一提的是，定常连续系统的稳态响应由 $X(s)=A/s$ 表示且在式(8.12)中再乘以 s，则离散系统也可得到类似的关系。因为离散系统的定常稳态响应为

$$X(z) = \frac{A}{1-z^{-1}}$$

若$(1-z^{-1})X(z)$的所有极点都在单位圆内，则离散系统的终值定理为

$$\lim_{k\to+\infty} x(k) = x_{ss} = \lim_{z\to1}(1-z^{-1})X(z) \tag{8.13}$$

例如，为求得传递函数的直流增益：

$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{0.58(1+z)}{z+0.16}$$

当 $k\geqslant0$ 时，令 $u(k)=1$，则有

599～600

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)}$$

由终值定理可得

$$x_{ss} = \lim_{z\to1}\left[\frac{0.58(1+z)}{z+0.16}\right] = 1$$

由上式可知，$G(z)$的直流增益为 1。为求任意稳定传递函数的直流增益，仅需将 $z=1$ 代入即可计算出相应的增益。因为不论系统是连续的还是离散的，其直流增益都不会变化，所以这种计算非常有助于验证等效的离散控制器与连续控制器是否匹配。此外，在确定系统离散模型时，它也能很好地检验所涉及的计算是否准确。

8.3　通过离散化等效进行设计

离散化等效设计，有时也称作仿真设计，其步骤如下。

(1) 用第 1 章至第 7 章所学的内容设计一个连续控制器。

(2) 找出能最好的近似连续控制器的离散化等效系统(通过图 8.1b 实现)。

(3) 用离散分析、仿真或者实验来验证设计的可行性。

假设已知如图 8.1a 所示的一个连续控制器$D_c(s)$。我们希望为图 8.1b 所示控制器的数字实现找到一组差分方程或$D_d(z)$。首先，把这个问题变为在图 8.6a 所示的数字实现中找到一个最佳的$D_d(z)$来匹配图 8.6b 中由$D_c(s)$表示的连续系统。接下来本节就来介绍解决上述问题的三种方法并对它们进行比较。

a)数字实现　　b)连续实现的对比

图 8.6

重要的是要记住这些方法都是近似方法。因为 $D(s)$响应的是 $e(t)$，而 $D(z)$则仅仅响应采样值 $e(kT)$，因此并非对所有可能的输入都有精确的解。从某种意义上说，不同种类的数字化技术的区别仅仅是对采样点的 $e(t)$做了不同的假设。

601

8.3.1　图斯蒂法

图斯蒂法是一种数字化方法，其目的是把一个问题作为一种数值积分。假设

$$\frac{U(s)}{E(s)} = D_c(s) = \frac{1}{s}$$

这是一个积分式，因此有

$$u(kT) = \int_0^{kT-T} e(t)\,dt + \int_{kT-T}^{kT} e(t)\,dt \tag{8.14}$$

上式可改写为

$$u(kT) = u(kT-T) + \text{在最后一个周期 } T \text{ 内 } e(t) \text{ 下面的面积} \tag{8.15}$$

其中：T 为采样周期。

对于图斯蒂法，每一步的任务就是使用梯形积分法，也就是将两个采样点之间的 $e(t)$

用一条直线近似代替(见图8.7)。将 $u(kT)$ 和 $u(kT-T)$ 分别简写为 $u(k)$ 和 $u(k-1)$，则可将式(8.15)转化为

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2}[e(k-1) + e(k)] \quad (8.16)$$

或者对上式进行 z 变换，有

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} \quad (8.17)$$

图8.7 图斯蒂法的梯形积分

对 $D_c(s)=a/(s+a)$ 应用相同的积分近似法，得

$$D_d(z) = \frac{a}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

事实上就是对每一处 s 做如下替换：

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

得到一个基于梯形积分公式的 $D_d(z)$。这就是图斯蒂法也称作双线性近似法的原因。通过运用图斯蒂法来处理一个简单的传递函数也需要大量的代数运算，而运用Matlab中的 *c2d* 函数可快速实现这一过程，下一个例子可说明这个问题。

602

例8.1 用图斯蒂近似法设计例6.15的数字控制器

用图斯蒂近似法确定差分方程来实现例6.15的控制器：

$$D_c(s) = 10\,\frac{s/2+1}{s/10+1}$$

设采样速率为25倍的带宽，将其性能与例6.15中连续系统的性能进行比较。

解答。例6.15的带宽 ω_{BW} 大约为10rad/s，通过观察可知穿越频率 ω_c 约为5rad/s。注意到图6.50中 ω_c 与 ω_{BW} 之间的关系即可推导出 ω_{BW}。因此，采样频率应为

$$\omega_s = 25 \times \omega_{BW} = 250\text{rad/s}$$

通常，当一种频率用rad/s或Hz表示时，则它可以用符号 f 代替；所以基于这一惯例可知：

$$f_s = \omega_s/(2\pi) \approx 40\text{Hz} \quad (8.18)$$

则采样周期为

$$T = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{40}\text{s} = 0.025\text{s}$$

离散控制器由下面的Matlab语句实现

```
s=tf('s');
sysDc = tf(10*(s/2 + 1)/(s/10 + 1);
T = 0.025;
sysDd = c2d(sysDc,T,'tustin')
```

执行上述Matlab语句得到

$$D_d(z) = \frac{45.56 - 43.33\,z^{-1}}{1 - 0.7778\,z^{-1}} \quad (8.19)$$

通过观察式(8.19)，可写出差分方程为

$$u(k) = 0.7778u(k-1) + 45.56e(k) - 43.33e(k-1)$$

或

$$u(k) = 0.7778u(k-1) + 45.56[e(k) - 0.9510e(k-1)] \quad (8.20)$$

由式(8.20)可计算控制信号的当前值 $u(k)$、控制信号的前一时刻值 $u(k-1)$，以及误差信号的当前值与前一时刻值 $e(k)$ 和 $e(k-1)$。

原则上，差分方程是以 $k=0$ 为初始值，然后依次估算 $k=1,2,3,\cdots$ 各时刻值的。但通常也没有必要把所有时刻的值都保留在内存中。因此，计算机仅需要为当前时刻和过

603

去时刻定义变量值。用式(8.20)的差分方程实现图 8.1b 所示反馈环的计算机指令，需通过如下代码调用一个连续的循环：

READ A/D: y, r
  $e = r - y$
  $u = 0.7778u_p + 45.56[e - 0.9510e_p]$
OUTPUT D/A: u
  $u_p = u$（其中，u_p 是下一个循环的过去值）
  $e_p = e$
当 T 运行结束回到 READ

使用 Simulink 比较两种实现的效果，并以此来评价上述离散控制器。仿真框图和阶跃响应对比图分别如图 8.8 和图 8.9 所示。值得注意的是，以 25 倍带宽的速率进行采样，能够使控制器的数字实现与连续控制器匹配得非常好。一般而言，如果希望连续系统与连续控制器的数字化近似相匹配，一个保守的方法就是以 25 倍带宽或更快的速率进行采样。◀

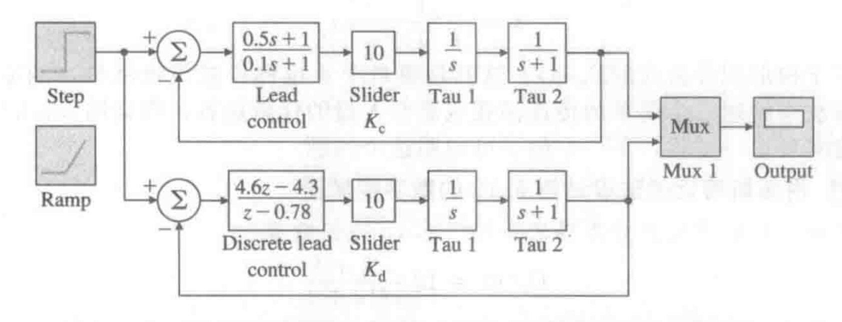
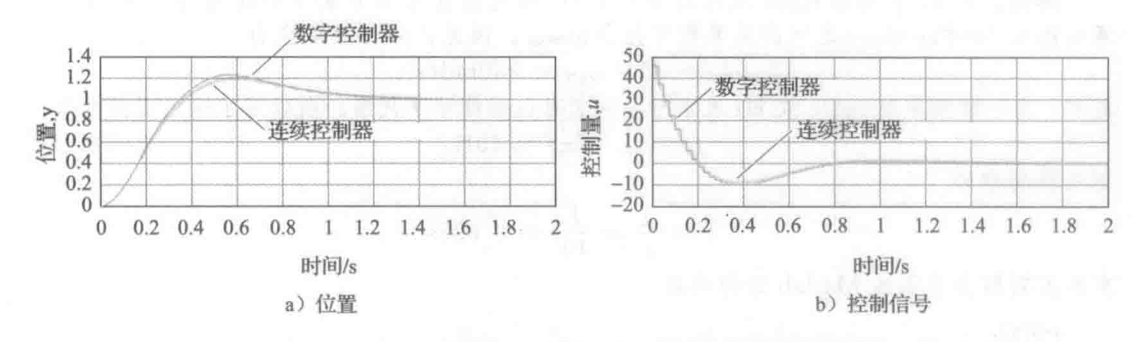


图 8.8 带有控制器设计的离散和模拟实现的暂态响应仿真框图



a）位置 b）控制信号

图 8.9 采样速率为 25 倍带宽时数字控制器与连续控制器的阶跃响应比较

8.3.2 零阶保持器(ZOH)法

图斯蒂法本质上是假设控制器的输入在上一采样时刻和当前采样时刻之间是线性变化的，如图 8.7 所示。另一种假设是，控制器的输入在整个采样周期内保持不变。换句话说，为了这种近似设计，我们假定如图 8.1a 所示的$D_c(s)$被预置了零阶保持器，目的是读取 k 采样时刻的 e 值以及保持这个值直到 $k+1$ 采样时刻。这不是实际的例子，相当一部分系统将唯一的零阶保持器放在被控对象 $G(s)$前，正如图 8.1b 所示。在这一假设下，会产生一个精确离散化等效系统，因为零阶保持器准确地描述了 e 与 u 的关系，且它只取决于采样时刻的输入 $e(k)$。

对于预置了零阶保持器的$D_c(s)$控制器，给定一个输入 $e(k)$，系统就会在 k 采样时刻产生一个阶跃响应，并将这个阶跃响应保持一个周期。换句话说，一个采样时刻的输入将产生一个高度为 e 的矩形脉冲并持续一个采样周期。对于 k 时刻一个不变的阶跃输入 e，

有$E(s)=e(k)/s$，所以结果为

$$D_d(z)=\mathscr{Z}\{\frac{D_c(s)}{s}\} \tag{8.21}$$

其中：$\mathscr{Z}\{F(s)\}$是拉普拉斯变换$F(s)$对应采样时刻的z变换，可由表8.1中的同一行查到。此外，带有一个单位延迟的一阶阶跃响应为

$$D_d(z)=z^{-1}\mathscr{Z}\{\frac{D_c(s)}{s}\} \tag{8.22}$$

因此，矩形脉冲的离散传递函数为

$$D_d(z)=(1-z^{-1})\mathscr{Z}\{\frac{D_c(s)}{s}\} \tag{8.23}$$

604 ~ 605

对于更加完整的推导，参见富兰克林于1998年出版的著作第4章的内容。式(8.23)给出了$D_c(s)$的离散近似并且决定了图8.1b中差分方程。

例8.2 用零阶保持器对例6.15的系统设计数字控制器

再次使用差分方程实现对例6.15的控制器设计

$$D_c(s)=10\frac{s/2+1}{s/10+1}$$

用零阶保持器近似使采样速率为25倍的带宽。将其性能与例6.15中连续系统的性能和例8.1的结果进行比较。

解答。采用和先前例子一样的带宽，所以采样周期不变。

$$T=0.025\text{s}$$

离散控制器由下列的Matlab语句表述，在此我们使用零阶保持器版本的c2d语句。

```
s=tf('s');
sysDc=10*(s/2+1)/(s/10+1);
T=0.025;
sysDd=c2d(sysDc,T,'zoh');
```

执行上述语句得

$$D_d(z)=\frac{(50-47.79z^{-1})}{1-0.7788z^{-1}} \tag{8.24}$$

通过观察式(8.24)可写出差分方程为

$$u(k)=0.7788u(k-1)+50e(k)-47.79e(k-1)$$

或

$$u(k)=0.7788u(k-1)+50[e(k)-0.9558e(k-1)] \tag{8.25}$$

注意式(8.25)和式(8.20)的相似性。它们在零极点位置和全局增益上只有非常小的差异。使用差分方程实现对数字控制器设计：

READ A/D: y, r
  $e=r-y$
  $u=0.7788u_p+50[e-0.9510e_p]$
OUTPUT D/A: u
  $u_p=u$（其中，u_p是下一个循环的过去值）
  $e_p=e$
当T运行结束回到READ

利用仿真比较这两种实现方案，与例8.1类似，得出其阶跃响应如图8.10所示。虽然在这种情形下使用图斯蒂法能够比零阶保持器取得更好的效果，但值得注意的是，使用25倍带宽的采样速率能使数字化实现很好地匹配对应的连续系统。从历史经验来看，零阶保持器法的优势在于它采用的是简单的代数运算，但鉴于如Matlab这样的控制软件都有很强的运算能力，零阶保持器法的优势被减弱了。8.3.5小节将给出所有方法的比较。◀

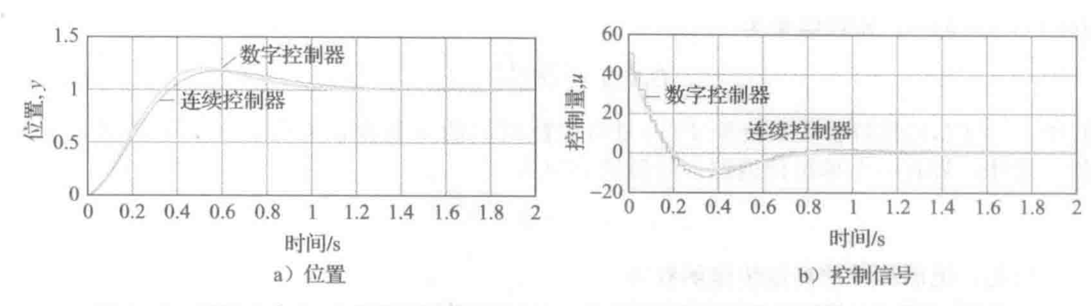


图 8.10 采样速率为 25 倍带宽时使用 ZOH 的数字控制器与连续控制器的阶跃响应比较

8.3.3 零极点匹配法

另一种数字化方法叫做零极点匹配(MPZ)法，它是由式(8.11)中 s 与 z 平面之间的关系推导出来的。如果将采样函数 $x(k)$ 取 z 变换，则 $x(z)$ 的极点与 $x(s)$ 的极点之间的对应关系为 $z=e^{sT}$。MPZ 技术就是将关系式 $z=e^{sT}$ 代入到传递函数的零极点上。但严格来讲，这一关系既不能应用于传递函数，也不能应用于时间序列的零点。与所有传递函数数字化方法一样，MPZ 法也是一种近似法。之所以使用近似，一方面是因为 $z=e^{sT}$ 实现了时间序列变换的极点从 s 到 z 的正确变换，另一方面是因为手工求取数字化传递函数要求代数计算量尽可能小，更容易对计算机所得结果进行验证。

606 ~ 607

因为物理系统的极点通常多于零点，为方便研究我们会有目的地增加位于 $z=-1$ 处的零点，使其在 $D_d(z)$ 中得到一个 $1+z^{-1}$ 项。与图斯蒂法一样，这将产生当前与过去输入值的平均值。最后，选取 $D_d(z)$ 的低频增益，使其等于 $D_c(s)$ 的低频增益。

MPZ 法总结

(1) 通过关系式 $z=e^{sT}$ 映射零极点。

(2) 如果分子的阶数比分母的阶数低，则在分子中加入 $(z+1)$ 的幂项，直到分子分母的阶数相等为止。

(3) 令 $D_d(z)$ 的直流增益或低频增益与 $D_c(s)$ 的相等。

比如：

$$D_c(s)=K_c\frac{s+a}{s+b} \tag{8.26}$$

的 MPZ 近似式为

$$D_d(z)=K_d\frac{z-e^{-aT}}{z-e^{-bT}} \tag{8.27}$$

运用连续系统和离散系统的终值定理可求得 $D_c(s)$ 与 $D_d(z)$ 的直流增益，再令二者相等即可求出 K_d。其结果为

$$K_c\frac{a}{b}=K_d\frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}}$$

或

$$K_d=K_c\frac{a}{b}\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right) \tag{8.28}$$

若 $D_c(s)$ 的分母阶数较高，该法的步骤 2 必须增加 $(z+1)$ 项。举例来说

$$D_c(s)=K_c\frac{s+a}{s(s+b)}\Rightarrow D_d(z)=K_d\frac{(z+1)(z-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-bT})} \tag{8.29}$$

但因为这些传递函数的直流增益是无穷的，因此有必要用低频增益来代替它。通过删除纯积分项，即去掉极点 $s=0$ 和 $z=1$，之后可以得到

$$K_d=K_c\frac{a}{2b}\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right) \tag{8.30}$$

迄今为止，讨论的数字化方法中，$D_d(z)$的分子、分母多项式中 z 的幂次都相等。这意味着在 k 时刻的差分方程输出需要 k 时刻输入的采样值。例如，式(8.27)的$D_d(z)$可写为

$$\frac{U(z)}{E(z)} = D_d(z) = K_d \frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\beta z^{-1}} \tag{8.31}$$

其中：$\alpha = e^{-aT}$；$\beta = e^{-bT}$。通过观察可知由式(8.31)可得到如下的差分方程：

$$u(k) = \beta u(k-1) + K_d[e(k) - \alpha e(k-1)] \tag{8.32}$$

608

例 8.3 运用零极点匹配法对空间站姿态数字控制器进行仿真设计

空间站姿态控制动态系统的一个简化模型可写成

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

设计一个数字控制器，其闭环自然频率为$\omega_n \approx 0.3\text{rad/s}$，阻尼比为$\zeta = 0.7$。

解答。首先要为图 8.11 所定义的系统找出一个合适的$D_c(s)$，如图 8.11 所示。经过一些尝试发现，采用下式给出的超前控制器可满足指标要求：

$$D_c(s) = 0.81\frac{s+0.2}{s+2} \tag{8.33}$$

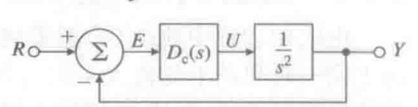


图 8.11 例 8.3 的连续设计定义

图 8.12 给出的根轨迹说明用式(8.33)给出的$D_c(s)$是符合要求的。

为了数字化$D_c(s)$，我们需要先选取一个采样速率。对于频率为$\omega_n = 0.3\text{rad/s}$ 的系统，带宽约为0.3rad/s，我们尝试选取比先前例子中稍微小些的采样速率，约为 20 倍的ω_n，有

$$\omega_s = 0.3 \times 20\text{rad/s} = 6\text{rad/s}$$

6rad/s 的采样速率约为 1Hz；因此，采样周期应为$T=1\text{s}$。由式(8.27)和式(8.28)可求出式(8.33)的 MPZ 数字化形式为

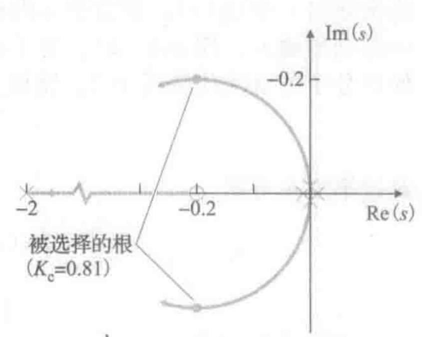


图 8.12 关于 K 的 s 平面根轨迹图

$$D_d(z) = 0.389\frac{z-0.82}{z-0.135} = \frac{0.389-0.319z^{-1}}{1-0.135z^{-1}} \tag{8.34}$$

609

观察式(8.34)可得差分方程为

$$u(k) = 0.135u(k-1) + 0.389e(k) - 0.319e(k-1) \tag{8.35}$$

其中：

$$e(k) = r(k) - y(k)$$

这样数字算法设计就完成了。完整的数字系统如图 8.13 所示。

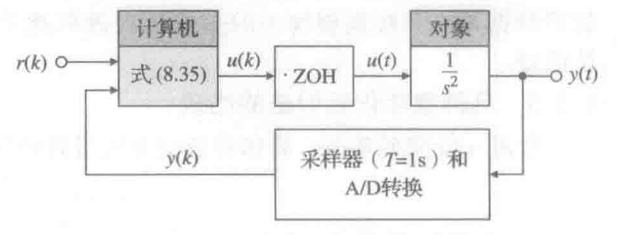


图 8.13 对图 8.11 进行仿真得到的数字控制系统

设计过程的最后一步是在计算机上实现该设计，以验证其合理性。图 8.14 所示的将 $T=1\text{s}(20\times\omega_{BW})$的数字系统的阶跃响应与连续控制器的阶跃响应进行了对比。值得注意的是，数字系统的超调量更大，这意味着数字实现时，需要减小阻尼。减小阻尼是因为系统有如图 8.2 所示的 $T/2$ 的平均时延。为了更好地与连续系统匹配，可适当地增加采样速率。图 8.14 也给出了两倍于先前采样速率($40\times\omega_{BW}$)的阶跃响应，可以看出它更加接近连续系统。值得注意的是，在更快的采样速率下，离散化控制器也需要根据式(8.27)和式(8.28)重新计算。 ◀

到目前为止，所有方法都需要知道 $e(k)$从而计算出 $u(k)$。而将 $e(k)$采样，计算并输出 $u(k)$不可能都在零延迟时间内完成；因此，式(8.35)是不可能精确实现的。然而，如果方程很简单且(或)计算机速度足够快，那么采样 e 和输出 u 之间的计算延迟对系统实际响应的影响与初始设计的期望响应相比可忽略不计。凭经验取计算延迟为 T 的1/10。通过实时代码和硬件来实现读 A/D 和写 D/A 之间的计算量最小且将 u 立即送入零阶保持器，这些都可以将延迟最小化。

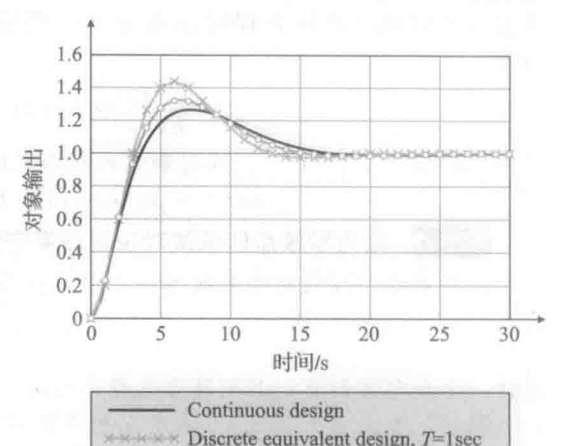


图 8.14 连续实现与数字实现的阶跃响应

8.3.4 改进的零极点匹配(MMPZ)法

由式(8.29)中的$D_d(z)$能得到的 $u(k)$取决于同一时间点上的输入 $e(k)$。如果计算机的硬件结构禁止将读取和写入的时间最小化，或者这一计算过程特别冗长，那么最好能推导出一个$D_d(z)$，其分子 z 的指数幂比分母少 1。这样计算机的输出 $u(k)$将仅需要前一时刻的输入，即 $e(k-1)$。为了实现这个想法，我们仅需修改零极点匹配法中的第二步，使得分子的阶次比分母小 1。比如，若

$$D_c(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)}$$

跳过第二步可得

$$D_d(z) = K_d \frac{z-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-bT})} \tag{8.36}$$

$$K_d = K_c \frac{a}{b}\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right)$$

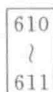
为得到差分方程，将式(8.36)的分子分母均乘以z^{-2}得

$$D_d(z) = K_d \frac{z^{-1}(1-e^{-aT}z^{-1})}{1-z^{-1}(z+e^{-bT})+z^{-2}e^{-bT}} \tag{8.37}$$

通过观察式(8.37)可以得到差分方程为

$$u(k) = (1+e^{-bT})u(k-1) - e^{-bT}u(k-2) + K_d[e(k-1) - e^{-aT}e(k-2)]$$

在该方程中，$u(k)$仅依赖于 $e(k-1)$，整个采样周期可用于计算并输出 $u(k)$，该控制器的离散分析会更加准确地说明实际系统的行为。但由于该控制器使用的是一个周期的旧数据，当系统期望输出的偏差出现随机扰动时，通常它的性能没有 MPZ 控制器的性能好。



8.3.5 几种数字化近似法的比较

针对一阶滞后环节，将四种近似方法得到的频率响应的幅值进行数值比较，设

$$D_c(s) = \frac{5}{s+5}$$

在两个不同的采样速率下，比较结果如图 8.15 所示。图 8.15 使用的$D_d(z)$的计算结果如表 8.2所示。值得注意的是，MMPZ 法和 ZOH 法在这个例子中的结果是完全相同的。但如果有多个零极点，结果就不总是这样了。另外 MPZ 法和图斯蒂法的结果也是完全相同的；但由表 8.2 可知，它们的$D_d(z)$有些微小的差别。四种近似法的主要差别就是带有$(z+1)$零点的两种方法都在$\omega_s/2$时有凹陷，而这往往是我们需要的特性。

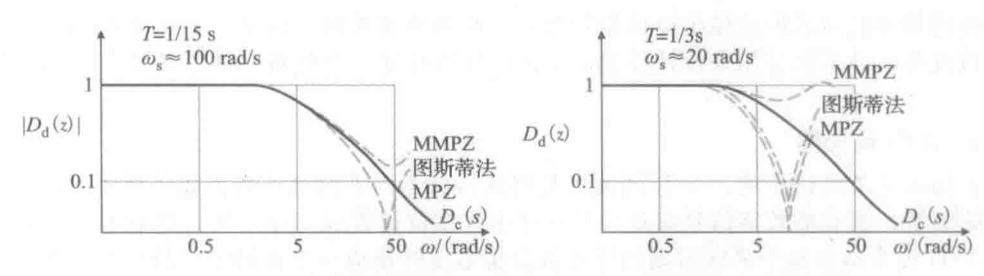


图 8.15 将三种离散近似法在两个采样速率下的频率响应进行比较

表 8.2 对比 $D_c(s)=5/(s+5)$ 的各种数字化近似 $D_d(z)$

方法	ω_s	
	150rad/s	750rad/s
零极点法匹配(MPZ)	$0.0945\,\dfrac{z+1}{z-0.811}$	$0.1715\,\dfrac{z+1}{z-0.657}$
修正的 MPZ(MMPZ)	$0.189\,\dfrac{1}{z-0.811}$	$0.343\,\dfrac{1}{z-0.657}$
图斯蒂法	$0.0950\,\dfrac{z+1}{z-0.810}$	$0.1735\,\dfrac{z+1}{z-0.653}$
ZOH	$0.189\,\dfrac{1}{z-0.811}$	$0.343\,\dfrac{1}{z-0.657}$

由图 8.15 看出，所有的近似法在低于约 1/5 采样速率(或$\omega_s/5$)时都取得了十分理想的效果。如果$\omega_s/5$ 远大于滤波器的截止频率(也就是说如果采样速率足够快)，则滞后环节的截止特性将被精确复制。图斯蒂法和两种 MPZ 法都在$\omega_s/2$ 处有凹陷，因为它们都有$(z+1)$项的零点 $z=-1$。除了在接近$\omega_s/2$ 处存在较大差异外，四种方法的精度相似，但这种差异一般不是我们所关心的。

8.3.6 离散等效设计方法的应用范围

如果进行了精确的离散分析或系统仿真，并在一个大范围采样速率内确定了数字化表达式，那么当采样速率低于约 5 ω_{BW}时，系统常常不稳定，采样速率低于约 10 ω_{BW}时，系统阻尼比将明显降低。当采样速率大于或约等于 20 ω_{BW}时，离散等效设计会得出比较合理的结果，而采样速率达到 25 倍带宽或者更高时，可以放心地使用离散等效设计方法。

如图 8.2 所示，产生误差的部分原因在于忽略了零阶保持器(ZOH)平均 $T/2$ 的滞后效应。另一个误差来源是采样时刻之间输入信号的变化。一种解决办法是将这一 $T/2$ 的延迟代入 ZOH 的传递函数近似表达式中得

$$G_{ZOH}(s)=\frac{2/T}{s+2/T} \tag{8.38}$$

一旦进行初步设计且采样速率已选定，我们可在出现采样延迟时将式(8.38)代入到被控对象的原始模型中，并调整$D_c(s)$来获得令人满意的响应，这样可以改善离散化设计。因此，可以看到，使用式(8.38)在一定程度上缓解了离散等效系统近似特性的缺陷。

针对低于约 10 ω_{BW}的采样速率，建议采用精确离散分析法来分析整个系统。如果离散分析表明由于采样导致系统性能严重恶化，则可以用精确离散方法去细化设计过程。具体方法我们将在 8.6 节中加以介绍。

8.4 硬件特性

数字控制系统中包含几个连续控制系统中没有的元件：A/D 转换器是用来对来自传感器的连续信号电压进行采样并将该信号转换成数字信号的装置；D/A 转换器是用来将来自

612~613

计算机的数字信号转换成模拟电压量的装置，抗混叠前置滤波器是一个用来减小混叠影响的模拟设备，计算机是用来设计控制器 $D_d(z)$ 并执行计算的设备。本节简要介绍以上每种元件。

8.4.1 A/D 转换器

正如 8.1 节所讨论的，A/D 转换器是将从传感器出来的电压转换成计算机可用的数字信号的装置。所有的数字信号都是按照标准由许多位被置成 1 或 0 的二进制数组成的。因此，A/D 转换器在每个采样时刻的任务就是将电压转换成一个正确的位组合并将其保持到下一个采样时刻。

在现有的众多 A/D 转换技术中，最常用的是基于计数法或逐次逼近法的。在计数法中，输入电压被转化成一系列频率与电压量成正比的脉冲，然后在一段固定时间内用二进制计数器对脉冲计数，从而得到该电压量的二进制表达式。与一个时域线性电压同步开始计数能够改进该方法，当电压达到待转换输入电压的幅值时停止计数。

逐次逼近法通常比计数法快很多。该方法将输入电压与代表数字信号中的各位的参考电平逐一进行比较。首先将输入电压与一个为峰值一半的参考值进行比较，若输入电压较大，就设定一个标志位。然后将信号与一个 3/4 峰值的参考电平进行比较以确定下一个位，依此类推。一个时钟周期就设定一个位，因此一个 n 位转换器需要 n 个周期。在相同的时钟频率条件下，基于计数法的转换器需要多达 2^n 个周期，因此这种计数器的转换速度通常慢得多。

无论用哪种方法，位数越多，执行这种转换所需的时间越长。A/D 转换器的价格会随速度和位数的增加而升高。2013 年，一个 12 位(0.025%的分辨率)且具有 170MHz 采样频率的高性能转换器售价约 20 美元；而一个 12 位且具有 1MHz 采样频率的转换器售价约 2 美元。目前，16 位 A/D 转换器(0.0015%的分辨率)也越来越普遍了。2013 年，一个 16 位且具有 500kHz 采样频率的转换器售价约 8 美元。它们的性能每年都有大幅度提高，这些数字会随着本书的版本更新而变化！

若有多路数据需要采样并转换成数字量，通常用多路转换器来计算完成，而不用多倍 A/D 转换器。通过多路转换器可依次将转换器接入采样通路中。

8.4.2 D/A 转换器

8.1 节中提到的 D/A 转换器的作用是将来自计算机的数字量转换成一个电压量，有时也称为采样和保持装置。614 D/A 转换器提供计算机模拟输出以驱动执行机构或记录设备，比如示波器或条形图表记录器。其基本工作原理就是用二进制位使开关(电子门)打开或关闭，从而将电流引入一个适当的电阻网络来产生正确的电压量。因为这类转换器不需要计数或迭代，因而它们一般比 A/D 转换器要快很多。事实上，采用转换的逐次逼近法的A/D转换元件中也包含了 D/A 转换器。与 A/D 转换器相比，D/A 转换器的价格通常更加低廉。

8.4.3 抗混叠前置滤波器

模拟的抗混叠前置滤波器通常放在模拟传感器和 A/D 转换器之间。它的作用是，减少模拟信号中高频噪声成分，以抑制混叠发生，即通过采样过程将噪声调制为低频信号。

图 8.16 给出了一个混叠的例子，其中 60Hz 的振荡信号正以 50Hz 的频率进行采样。从图中可以看出，采样得到了一个 10Hz 的信号，同时也说明了信号频率从 60Hz 到 10Hz 的混叠原理。只要采样速率达不到采样信号中任何频率的至少两倍时，就会产生混叠现象。

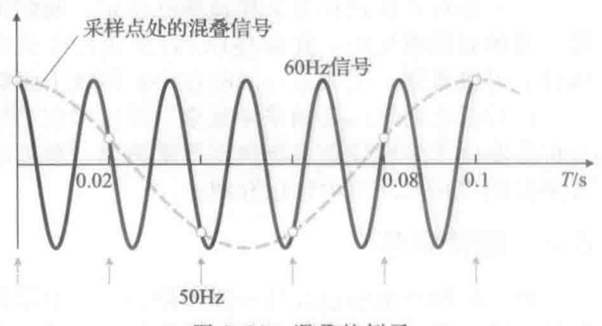


图 8.16 混叠的例子

因此，为了防止采样60Hz信号时出现混叠，采样速率必须高于120Hz，比图中50Hz的速率明显高很多。

混叠可通过奈奎斯特-香农(Nyquist-Shannon)采样定理解释。该定理的基本思想是，要想根据采样值将信号重新准确地复现，信号中必须不含高于1/2采样速率($\omega_s/2$)的频率成分。该定理的另外一个结论是，可以用离散采样明确表示最高频率为$\omega_s/2$的奈奎斯特频率，这点已在8.2.3小节中讨论过。

混叠对数字控制系统的影响是很大的。在连续系统中，因为系统不响应高频信号，所以频率远高于控制系统带宽的噪声成分对系统的影响很小。但是在数字系统中，噪声的频率可能会潜在地混叠在系统带宽附近的频率中，这样闭环系统就要对噪声做出响应。因此，对于一个设计的较差的数字控制系统，噪声的影响可能比用模拟电子器件实现的控制系统的大得多。 615

解决方法是在采样器前边串联一个模拟的前置滤波器。在许多情况下用一个简单的一阶低通滤波器即可，即

$$H_p(s)=\frac{a}{s+a} \tag{8.39}$$

其中：拐点a选取时应低于$\omega_s/2$，以使任何高于$\omega_s/2$频率的噪声都能被前置滤波器衰减。拐点频率选得越低，就会有越多高于$\omega_s/2$的噪声被抑制。例如，如果将ω_s选为25 ω_{BW}，则抗混叠滤波器的拐点a应选为低于$\omega_s/2$的值，如$a=10\ \omega_{BW}$就是个比较合理的选择。高于带宽10倍的拐点不会影响闭环系统的稳定性和性能。但是，太低的拐点会迫使设计者减小控制系统的带宽或加入更多的相位补偿。前置滤器不会彻底消除混叠，但却可以抑制被混叠的高频噪声。通过合理选取前置滤波器拐点和采样速率，设计者就能够将混叠噪声的幅值减小到可接受的程度。

8.4.4 计算机

计算机是处理所有计算的单元。如今大部分的数字控制器都是围绕着一个微控制器建立的，该微控制器包含一个微处理器和大部分所需的其他功能，其中包含A/D转换器和D/A转换器。为了满足实验室发展的要求，数字控制器可以做成台式工作站或PC机。由于微处理器技术的成本相对较低，导致数字控制系统的使用大幅度增加。这一现象从20世纪80年代开始，一直持续到21世纪。

计算机由以下几个部分组成：用来进行计算并提供系统逻辑的中央处理器单元(CPU)；用来同步系统的时钟；负责数据与指令存储的存储单元；用来提供各种需求电压的电源。存储单元包括三种基本类型。

(1) 只读存储器(ROM)是最便宜的，但生产制造之后内容就不可改动。在批量生产的产品中，大部分的存储器都是ROM。电源关闭时，该存储器仍能将存储值保留下来。

(2) 随机存储器(RAM)是最贵的，但它的值可以通过CPU进行改动。它仅需要存储那些在控制过程中将被改变的值，而且一般说来它在开发产品的整个存储器中仅占一小部分。当电源关闭时，它会丢失所存储的所有值。 616

(3) 可编程只读存储器(EPROM)或闪存与ROM相似，但它的存储值可以被改动。当电源关闭时能够保留存储值，但改变其存储值要以比RAM慢些。它的读取速度和ROM差不多。目前闪存已越来越广泛地用于相机，U盘，智能手机等设备中。

实际应用中微处理器的数字量的大小一般都是8位、16位或32位，有时也可能是12位的。字长越大精度越高，但成本也相应增加。通常最经济的做法是用8位微处理器，但在控制器领域中用两个数字形式的字存储一个数值(双精度)对系统精度来说十分重要。许多数字控制系统中都使用称为DSP芯片的处理数字信号的计算机，这给了控制设计者充分的自由，使其能够在MHz数量级的高采样速率下实现先进控制方案。对于更高的采样速率，选择现场可编程门阵列更为合适。

8.5 采样速率的选择

对数字控制系统而言，选取最佳的采样速率需要折中考虑许多因素。采样太快可能会导致精度下降，而降低采样速率ω_s的根本目的是降低成本，包括降低硬件和传感器的花费。采样速率下降意味着有更多时间用于控制器的计算上；从而可以使用稍慢的计算机实现给定的控制功能，或者使给定的计算机发挥更大的控制作用。无论哪一方面，每个功能的成本都更低了。对于带有 A/D 转换器的系统而言，转换速度要求越低，成本也会越低。这些经济上的考虑说明最优的工程选择方案是在满足所有性能指标的前提下，选取尽可能低的采样速率。

如下因素可用来判断可接受范围内的采样速率的下限值。

(1) 通过闭环带宽或时域响应指标(如上升时间和调整时间)来度量的跟踪效率；

(2) 通过对随机对象扰动的误差响应来度量的调节效率；

(3) 由测量噪声和相关的前置滤波器引起的误差。

使用离散等效系统时，如果采样速率降低，固有的近似法可能会导致系统的性能下降，甚至不稳定。这会使设计者得出需要更快的采样速率的结论。根据这一现象，给出如下两种解决方法：

617

(1) 提高采样速率。

(2) 近似法是无效的，需要用离散分析设计法完善设计，这种方法将在下一节中讲述。

设计数字控制系统时，要求较快的采样速率和性能优良且成本较低的计算机，这些驱使设计者选取 $40\times\omega_{BW}$或更高的采样速率。对于采用定点运算的计算机，非常快的采样速率会导致乘法误差，这些误差可能在控制系统中产生明显的偏移或极限环(详见 1998 年富兰克林编写的著作)

8.5.1 跟踪效率

采样速率的绝对下限是根据一个特定指标而设的，目的是跟踪某一频率(系统带宽)的指令输入。采样定理(参见 8.4.3 小节及 1998 年富兰克林编写的著作)指出，为了从信号的采样值中重构一个未知的、有限带宽且连续的信号，采样速率必须至少为信号中最高频率的两倍。因此，为了使闭环系统能够跟踪某一频率的输入，采样速率必须取最高频率的 2 倍，即ω_s必须至少等于 2 倍的系统带宽($\omega_s \Rightarrow 2\times\omega_{BW}$)。此外，可以从 s 平面到 z 平面映射的结论($z=e^{sT}$)中看到能被离散系统表示的最高频率为$\omega_s/2$，这一点也符合该定理的结论。

对于具有谐振的系统，有时需要采样速率足够快才能使谐振得到镇定。相关内容在 1986 年富兰克林的著作中有所提及。

闭环带宽的限定为采样速率提供了一个基本的下限。但在实际应用中，采样速率的理论下限为参考输入信号带宽的 2 倍，这无法满足期望时域响应的质量要求。对于一个上升时间约为 1s(由此得到闭环带宽为 0.5Hz)的系统，采样速率选为 10Hz 到 20Hz，即 20～40 倍的ω_{BW}是合理的。将采样速率选得远大于带宽是为了减小控制信号与系统响应间的延迟，也为了平滑零阶保持器输出的阶跃控制信号。

8.5.2 扰动抑制

对于任何控制系统而言，扰动抑制即使不是最重要的，也是一个很重要的方面。扰动带着各种各样的频率特性进入系统，这些频率变化范围从阶跃信号到白噪声。高频随机扰动会对采样速率的选择产生很大影响。同时，高频扰动也会受抗混叠滤波器和采样速率影响。对于这样的高频噪声，不使用前置滤波器而是利用足够快的采样速率去减弱其影响是不可取的，具体原因我们将在下一节讨论。

618

假设前置滤波器设计得非常好，以至于几乎没有高于$\omega_s/2$的噪声混叠，采样速率的选择所遵循的原则和跟踪效率的原则是一致的。也就是说，标准的采样速率要达到25倍的带宽或者更高。

8.5.3 抗混叠前置滤波器的影响

带模拟传感器的数字控制系统一般都包含一个位于传感器和采样器之间的模拟的抗混叠前置滤波器，这在8.4.3小节中已介绍过。该前置滤波器是低通的，最简单的传递函数为

$$H_p(s)=\frac{a}{s+a} \tag{8.40}$$

这样，在其拐点a之上的噪声就被抑制了。我们的目标是在采样速率的一半($\omega_s/2$)处提供足够的衰减，以使高于$\omega_s/2$的噪声在被采样器混叠进低频中时不会影响控制系统性能。

保守的设计方法是，将前置滤波器的拐点选得远高于系统带宽，使其引起的相位滞后不会严重地影响系统的稳定性。该设计方法允许在基本的控制系统设计中忽略前置滤波器。例如，取$a=10\ \omega_{BW}$是个比较合理的选择。此外，为了使$\omega_s/2$处的高频噪声更好地衰减，我们选取比前置滤波器拐点至少高约10倍的采样速率。这一选择能减少$\omega_s/2$之上的高频噪声对低频频率产生至少5倍的混叠。这种保守的前置滤波器设计案例表明，采样速率需要比系统带宽快100倍！采用这样的设计流程，前置滤波器的影响很可能会给采样速率的选择提供一个下限。在过去几年里，当某公司的一组人员设计了模拟控制系统，然后在电脑中变成数字控制系统时，就是实践了这一过程。事实上，在那些对控制系统的性能要求非常迫切的工业领域，这仍然是一种被普遍使用的方法。

另外一种设计方法是，在系统的带宽处允许由前置滤波器引起有效相位滞后。这要求我们设计控制系统时，在对象模型中模拟前置滤波器的特性的同时，要求设计过程将模拟和数字部分都集成到一起，甚至最好是一组就能实现所有要求。这就允许使用较低的采样速率，但可能会付出使控制器结构的复杂性增大的代价，因为此时需要提供一个额外的超前相位来抵消前置滤波器的滞后相位。如果采用这一方法而且前置滤波器的拐点也可以取得很低，那么采样速率对传感器噪声的影响就会变得很小，而且前置滤波器也会对采样速率几乎没有影响。

619

将滞后环节(模拟前置滤波器)放在控制器的某一部分中，将起抵消作用的超前环节($D_d(z)$中的外加超前)放在控制器的另一部分中，这样做看似违反常理，但对于整个系统而言，它的影响是积极的。滞后位于系统的模拟部分，由此产生纯增益。起抵消作用的超前位于系统的数字部分，这部分不存在高于奈奎斯特速率的频率。结果是高频信号在采样之前就衰减了，而没有被起抵消作用的数字超前环节放大，这样就产生了高频信号的纯衰减。此外，由采样引起的混叠也会使这些高频信号影响数字控制器的设计。

8.5.4 异步采样

正如前面部分所提到的，将前置滤波器设计从控制规律设计中分离出来可能要求采样速率比以往更快些。同样的结论在其他类型的结构中也会出现。例如，一个带有独立计算机的智能传感器在运行时，相对于主控计算机不同步，这就不适用直接数字化设计，因为整个系统的传递函数是由智能传感器与主控数字控制器间的相位决定的。因此，如果存在异步数字子系统，在任何模型中采用约为$20\times\omega_{BW}$或更慢的采样速率时都应谨慎，且要通过仿真或实验来检验系统性能。

△8.6 离散化设计

将连续被控对象的采样值$y(k)$与输入控制序列$u(k)$相关联并获得一个精确的离散模型是完全可能的。这一对象模型可视作包含了控制器$D_d(z)$的反馈系统离散模型的一部分。

用这种离散模型进行分析和设计称为离散化设计，也可称为直接数字化设计。一旦得到整个系统的离散模型，设计者便可在离散域中完整地设计出离散控制器。对这个过程特别有利的是，整个系统的采样速率跟带宽相比会被限制得非常慢，即采样速率$\omega_s < 10 \times \omega_n$。这通常只会在采样速率被采样过程或者传感器特性限制住的情况下才会发生，如果选择非常快速和廉价的微控制器，情况就会不同。在接下来的章节中将介绍如何找到这种离散对象模型(8.6.1小节)、用离散模型设计的反馈控制器是什么样的(8.6.2小节)、设计过程是如何进行的(8.6.3小节)以及如何分析各种离散化设计(8.6.4小节)。

620

8.6.1 分析工具

对带有离散元件的系统进行离散分析的第一步是，找出其连续部分的离散传递函数。对于类似图8.1b所示的那类系统，我们希望找出$u(kT)$和$y(kT)$之间的传递函数，这就是我们在8.3.2小节讨论过的情况。然而，这里零阶保持器(ZOH)是真实存在的且没有做任何近似。它是这个系统的一个精确离散等效系统，因为零阶保持器确切地给出了$u(kT)$在采样间的情况并且输出$y(kT)$仅取决于采样时刻的输入$u(kT)$。

对于由$G(s)$描述的前面串联零阶保持器的对象而言，其离散传递函数由式(8.23)给出，将$D_c(s)$替换为$G(s)$，即

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \tag{8.41}$$

其中：$\mathscr{Z}\{F(s)\}$为采样时间序列的z变换。该时间序列对应的拉普拉斯变换表达式为$F(s)$，由表8.1的同一行给出。式(8.41)允许我们将图8.17a所示的混合(连续的和离散的)系统用图8.17b所示的等效纯离散系统代替。

离散系统与连续系统的分析和设计是十分相似的，实际所有的规则都是相通的。图8.14b所示的闭环传递函数可用相同的框图化简规则得到，即

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D_d(z)G(z)}{1 + D_d(z)G(z)} \tag{8.42}$$

为得到闭环系统的特性，需要求出式(8.42)的分母的因式，也就是求出离散特征方程的根：

$$1 + D_d(z)G(z) = 0$$

使用根轨迹法在连续系统中求取一个s多项式的根，可以不做任何变动就应用到含z的多项式中。然而所得结果的含义却差别很大，如图8.4所示。一个主要差别在于稳定范围由虚轴变成了单位圆。

例8.4 离散根轨迹

对于图8.17a所示的案例，$G(s)$为

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

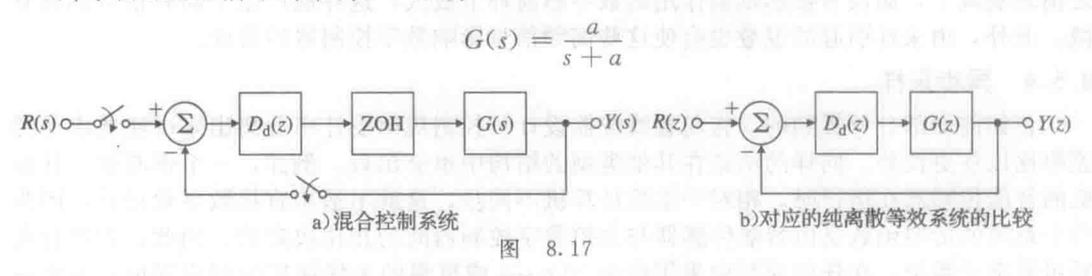


图 8.17

且$D_d(z) = K$，绘制关于K的根轨迹并将结果与连续形式下系统的根轨迹进行比较。讨论所绘根轨迹的含义。

解答。由式(8.41)可得

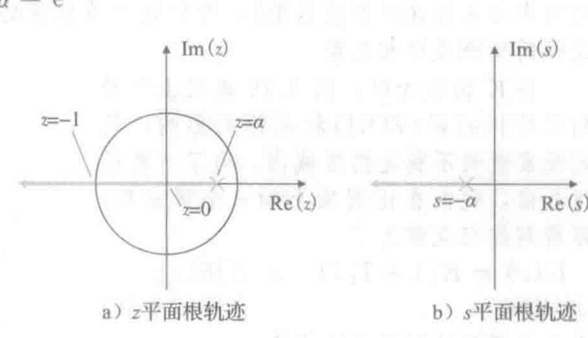
$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left\{\frac{a}{s(s + a)}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\left[\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}\right]$$
$$= \frac{1-\alpha}{z-\alpha}$$

其中：

$$\alpha = e^{-aT}$$

为了分析闭环系统的性能，应用标准的根轨迹规则。图 8.18a 给出对应离散情况的结果，图 8.18b 给出对应连续情况的结果。在连续的情况中，系统对所有的 K 值均保持稳定，与离散的情况相反，随着 z 从 0 变到 −1，阻尼比随之下降，系统产生振荡并最终变得不稳定。这种不稳定是由零阶保持器的滞后效应引起的，在离散分析中能够恰当的说明这一情况。◀



a）z平面根轨迹　b）s平面根轨迹

图 8.18

621 ~ 622

8.6.2 反馈特性

在连续系统中，我们采用以下典型的环节开始设计过程：比例、积分或微分控制规律或它们的某种组合，有时还包含滞后。同样的思想可应用在离散化设计中。换句话说，对连续设计的$D_c(s)$进行数字化得到的$D_d(z)$将产生上述典型设计环节，这些可以作为一个离散化设计的起点。离散控制律如下。

对于比例控制，有

$$u(k) = Ke(k) \Rightarrow D_d(z) = K \tag{8.43}$$

对于微分控制，有

$$u(k) = K\,T_D[e(k) - e(k-1)] \tag{8.44}$$

其传递函数为

$$D_d(z) = K\,T_D(1-z^{-1}) = K\,T_D\frac{z-1}{z} = k_D\frac{z-1}{z} \tag{8.45}$$

对于积分控制，有

$$u(k) = u(k-1) + \frac{K_p}{T_I}e(k) \tag{8.46}$$

其传递函数为

$$D_d(z) = \frac{K}{T_I}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{K}{T_I}\left(\frac{z}{z-1}\right) = k_I\left(\frac{z}{z-1}\right) \tag{8.47}$$

对于超前补偿，8.3 节的例子表明由连续超前补偿得到的差分方程是如下形式的：

$$u(k+1) = \beta u(k) + K[e(k+1) - \alpha e(k)] \tag{8.48}$$

其传递函数为

$$D_d(z) = K\frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\beta z^{-1}} \tag{8.49}$$

8.6.3 离散化设计举例

数字控制设计就是使用式(8.43)～式(8.49)的这些基本反馈环节进行设计，并对设计参数进行叠加，直到能够满足所有性能指标为止。

例 8.5 空间站数字控制器的直接离散化设计

用离散化设计法设计一个数字控制器，使该控制器满足例 8.3 的性能指标。

解答。对象为 $1/s^2$，串联零阶保持器(ZOH)后的离散模型由式(8.41)求得：

623

$$G(z) = \frac{T^2}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right]$$

当 $T=1s$ 时，则上式变为

$$G(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right]$$

在连续情况下，比例反馈会产生纯振荡运动，故离散情况下我们应做好得到更坏结果的心理准备。如图 8.19 所示的根轨迹也证明了这一点。对于非常小的 K 值(其轨迹代表根的频率与采样速率相比很低)，其轨迹为单位圆的切线($\zeta\approx0$，表示纯振荡运动)，因此与连续的比例设计相匹配。

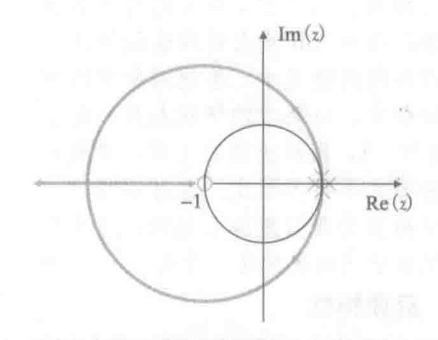


图 8.19 带比例反馈的 $1/s^2$ 被控对象的 z 平面根轨迹

当 K 值较大时，图 8.19 表明由于受到零阶保持器(ZOH)和采样的影响，轨迹线发散到不稳定的区域内。为了对此进行补偿，我们在比例项上加一个微分项，即得到控制规律为

$$U(z)=K[1+T_D(1-z^{-1})]E(z) \tag{8.50}$$

由上式得到控制器表达式为

$$D_d(z)=K\frac{z-\alpha}{z} \tag{8.51}$$

其中：新的 K 值和 α 取代了式(8.50)中的 K 和 T_D。现在的任务是求出 K 和 α 的值以获得好的性能。设计的性能指标为 $\omega_n=0.3\text{rad/s}$，$\zeta=0.7$。图 8.4 表明 s 平面上的根映射到 z 平面上的期望位置：

$$z=0.78\pm0.18\text{j}$$

图 8.20 所示的为 $\alpha=0.85$ 时关于 K 的根轨迹。零点的位置($z=0.85$)是通过反复尝试直到根轨迹穿越 z 平面上的期望位置确定的。当根轨迹穿过 $z=0.78\pm0.18\text{j}$ 时，$K=0.374$。式(8.51)现变为

$$D_d(z)=0.374\frac{z-0.85}{z} \tag{8.52}$$

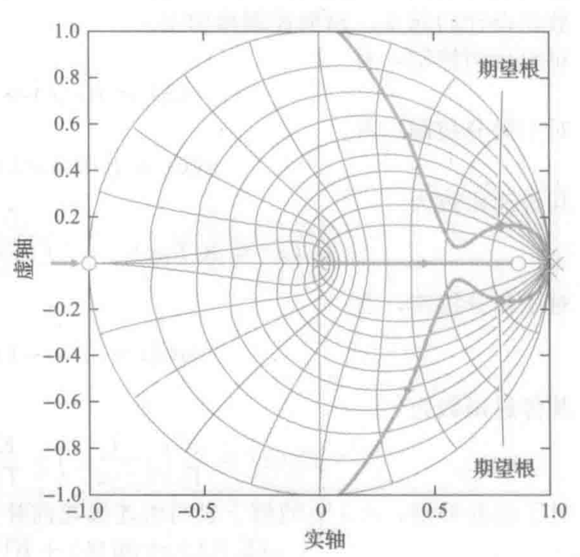


图 8.20 带 $D_d(z)=K(z-0.85)/z$ 的 $1/s^2$ 被控对象的 z 平面根轨迹

通常，将 z 平面的根匹配在特定位置并没有特殊的好处；相反，若仅需要选取 K 和 α(或 T_D)来获得令人满意的 z 平面的根，那就变得容易很多。本例中，我们想要匹配一个特定的位置使我们能将结果与例 8.2 中的设计进行比较。

所得的控制规律为

$$U(z)=0.374(1-0.85z^{-1})E(z)$$

或

$$u(k)=0.374e(k)-0.318e(k-1) \tag{8.53}$$

这与先前得到的控制式(8.35)相似。 ◀

式(8.53)的控制器与连续设计的控制器式(8.35)的根本差别仅是缺少 $u(k-1)$ 项。对于式(8.35)，其中的 $u(k-1)$ 项源于控制器表达式(8.33)中的滞后项($s+b$)。由于滞后项提供了噪声衰减且很难构建纯模拟微分器，因此滞后项基本上包含在模拟控制器中。一些

等效滞后在离散化设计中一般作为极点$z=0$出现(见图8.20)，并且在用一阶差分计算微分中，它代表一个采样延迟。为获得更多的噪声抑制，可将极点移到$z=0$的右侧，这样可导致更少的微分作用和更多的平滑性，这种折中同样出现在连续控制系统的设计中。

624~625

8.6.4 设计的离散分析

对于任何数字控制器，不论它是用离散等效法设计的还是直接在z平面内设计的，都可用离散分析法进行分析，该方法由如下几个步骤组成。

(1) 用式(8.41)求出被控对象和零阶保持器的离散模型。

(2) 构建包含$D_d(z)$的反馈系统。

(3) 对所得离散系统进行分析。

我们可以用8.6.3小节介绍的根轨迹来确定系统的根，或者可求出离散系统的(在采样时刻上的)时间序列。

例8.6 数字与连续设计下的阻尼比和阶跃响应

运用离散分析法求出例8.3和例8.5中数字设计的等效s平面阻尼比和阶跃响应，并将结果与例8.3中连续设计的阻尼比和阶跃响应进行比较。

解答。计算例8.3中连续情况的阻尼比和阶跃响应的Matlab命令如下。

```
s=tf('s');
sysGc = 1/(s^2);
sysDc = 0.81*(s+0.2)/(s+2);
sysGDc = series(sysGc,sysDc);
sysCLc = feedback(sysGDc,1,1);
step(sysCLc)
damp(sysCLc)
```

为了分析数字控制的情况，串联了零阶保持器(ZOH)的被控对象的模型可由下述命令求得：

```
T = 1;
sysGz = c2d(sysGc,T,'zoh')
```

对例8.3中用离散等效法设计的数字控制系统[式(8.35)]的分析是用下述语句执行的：

```
z = tf('z',T);                        % specifies z-transform based on input T
sysDz =.389*(z - .82)/(z - .135);
sysDGz = series(sysGz,sysDz);
sysCLz = feedback(sysDGz,1);
step(sysCLz,T)
damp(sysCLz,T)
```

同样地，式(8.52)的离散化设计$D_d(z)$也可以用相同的指令序列进行分析。

所得的阶跃响应如图8.21所示。计算出的闭环系统的阻尼比ζ和复根的自然频率ω_n如下。

连续情况：$\zeta=0.705$，$\omega_n=0.324$

离散等效：$\zeta=0.645$，$\omega_n=0.441$

离散化设计：$\zeta=0.733$，$\omega_n=0.306$

该图表明离散等效法的超调量变大了，这是由该情况的阻尼比减小引起的。而在离散化设计中超调量几乎没有增大，因为在离散化设计中要特别地调整控制器，从而使离散系统的等效s平面阻尼比近似等于期望阻尼比$\zeta=0.7$。 ◀

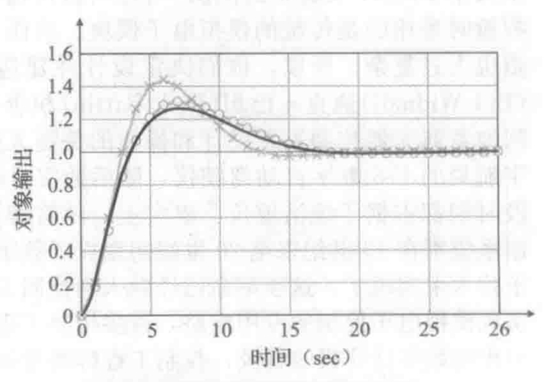


图8.21 例8.3和例8.5中连续系统与数字系统的阶跃响应

虽然分析表明用两种方法设计的数字控制器在性能上存在一些差异，但这些性能差异和控制方程式[式(8.35)和式(8.53)]的差别都不是很大。这种相似的结果是因为与ω_n相比采样速率太快了，即$\omega_s \approx 20 \times \omega_n$。如果降低采样速率，则控制器的数字值的差别将变得越来越大，特别是对离散等效的情况而言，其性能的恶化更明显。

626~627

一个普遍的规则是，如果采样频率低于$10 \times \omega_n$，则应采用离散化设计。正如本节所介绍的，至少对于采样速率较慢($\omega_s < 10 \times \omega_n$)的离散等效设计应该用离散分析法或仿真来对其进行验证，如果有必要还应适当调整控制器。在任何情况下，对数字控制系统进行仿真都是个好方法。如果仿真结果恰当地显示出所有延迟和不同模型可能存在的不同步行为，它就可能显示出不稳定性，这种不稳定性是无法通过连续或离散线性分析检测得到的。我们在 8.5 节已经很全面地讨论采样速率对设计的影响。

8.7 状态空间设计法

第 7 章介绍了如何利用系统的状态空间描述来进行连续系统设计，这些方法也可用于离散模型。8.7 节的内容可访问我们的网站 www.fpe7e.com。更多详细内容可参阅富兰克林、鲍威尔和沃尔克曼于 1998 年出版的动态系统的数字控制(第 3 版)。

8.8 历史展望

最早基于采样数据的实际控制系统是在第二次世界大战中使用的搜索雷达。该系统中，天线每旋转一次，目标的位置只改变一次。采样系统的理论由数学家 W. 赫利维西(W. Hurewicz)提出并作为一章出版在由 H. M. 詹姆斯(H. M. James)，N. B. 尼科尔斯(N. B. Nichols)和 R. S. 飞利浦(R. S. Phillips)编写的《伺服系统理论》一书中。第 5 章的历史展望讨论了工程师通过电脑进行设计活动。在 20 世纪 50 年代，可通过计算机直接实现数字控制，使采样系统持续工作成为可能，具有代表性的是哥伦比亚大学 J. R. 拉加齐尼(J. R. Ragazzini)教授的研究。该部分工作在 1958 年由拉加齐尼(Ragazzini)和富兰克林(Franklin)发表。早期的应用是在过程控制工业领域，运用在当时是合理可行的、昂贵的大型计算机来实现。卡尔·奥斯特隆姆(Karl Astrom)教授于 20 世纪 60 年代初介绍了一个瑞典造纸机的直接数字控制方法。

1961 年，当肯尼迪(Kennedy)总统宣布人类登月的目标时，还没有航天飞行器的数字自动驾驶仪。事实上，能够实现控制系统的小型数字计算机在当时并不存在。来自麻省理工大学 Draper 实验室的团队(当时叫做仪器实验室)在最初设计阿波罗登月控制系统和指挥舱时采用的是传统的模拟电子模块。然而，他们发现这些系统对于这项任务来说太过沉重也太过复杂。所以，他们决定设计并建造了第一个航天数字控制系统。比尔·威纳尔

628

(Bill Widnall)迪克·巴坦(Dick Battin)和唐·弗雷泽(Don Fraser)都是 19 世纪 60 年代末阿波罗航天器控制系统设计和操作的关键人员。这个团队还在 19 世纪 70 年代演示了美国宇航局的 F-8 数字自动驾驶仪，随后数字自动驾驶仪在整个 19 世纪 80 年代以及后来的一段时期都占据了统治地位。事实上，随着廉价的数字信号处理器的普及，大多数种类的控制系统都在 19 世纪末至 20 世纪初变成了数字化系统。今天，几乎没有控制系统使用模拟电子技术来实现了。这项革命已经融入到控制工程师的培训中。过去，为了有能力设计并制造实现模拟电子控制的专用电路，许多控制工程师必须要有电气工程的背景。现在，随着易于编程的数字计算机的普及，控制工程师的专业背景往往更倾向于那些最常见的被控系统。

小结

- 最简单有效的数字控制设计方法是将连续控制器设计转换为离散形式的，即使用它的离散等效。
- 运用离散等效设计需要运用第 1 章到第 7 章的思想找到连续控制器$D_c(s)$，然后使用离散化方法将$D_c(s)$的差分方程近似化，例如使用图斯蒂法，ZOH 法或零极点匹配法。

- 为分析一个离散控制器设计，或任意离散系统，可使用 z 变换来决定离散系统特性。对于时域序列 $f(k)$ 的 z 变换的形式如下：

$$\mathscr{Z}\{f(k)\}=F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}f(k)\,z^{-k}$$

其关键性质为

$$\mathscr{Z}\{f(k-1)\}=z^{-1}F(z)$$

这个性质使我们可以求出差分方程的离散传递函数，它是连续系统差分方程的数字化等效。用 z 变换进行分析与用拉普拉斯变换进行分析非常类似。

- 一般 z 变换都是用计算机(Matlab)或查表 8.1 求得的。
- 离散形式的终值定理为

$$\lim_{k\to+\infty}x(k)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})X(z)$$

条件是 $(1-z^{-1})X(z)$ 的所有极点都在单位圆内部。

- 对于连续信号式 $f(t)$，其采样值为 $f(k)$，则 $F(s)$ 的极点与 $F(z)$ 的极点之间的关系为

$$z=e^{sT}$$

- 最常用的离散等效方法如下。

(1) 图斯蒂近似法：

$$D_d(z)=D_c(s)\,|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

(2) 零极点匹配近似法：

◆ 按 $z=e^{sT}$ 映射零极点。

◆ 给分子加上 $(z+1)$ 的幂项直到分子与分母的阶数相等或分子的阶数比分母的小1。

◆ 令 $D_d(z)$ 的低频增益等于 $D_c(s)$ 的低频增益。

- 如果用离散等效法进行设计，建议采样速率的最小值取20倍的带宽。一般来说，选取的采样速率越快，系统的性能越好。
- 为了减小高频测量噪声的影响，模拟前置滤波器通常放在采样器的前边。采样器将信号中所有高于采样频率一半的频率都混叠到低频中；因此，应选取前置滤波器拐点，使有用的频率成分均不高于采样速率的一半。
- 串联零阶保持器(ZOH)的连续对象 $G(s)$ 的离散模型为：

$$G(z)=(1-z^{-1})\,\mathscr{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

运用 z 变换或者 Simulink 仿真的方法可以分析离散对象模型——离散控制器。

- 离散化设计是一种精确设计方法，避免了离散等效的近似所带来的误差。设计步骤是：(a)找到被控对象的离散模型 $G(s)$，(b)运用离散模型直接设计离散形式的控制器。其设计过程比离散等效设计法更加烦琐，并且需要在开始设计前就选择好采样速率。另一个实用的方法就是，开始设计时使用离散等效法，然后在调整结果时使用离散化设计法。
- 离散化设计法运用 $G(z)$ 与连续设计相呼应，但对于稳定性边界和 z 平面根的位置的解释是不同的。图 8.5 总结了响应特性。
- 如果使用离散化设计法，当采样速率降低到2倍带宽时，系统稳定性在理论上是可以保证的。然而，对于好的暂态性能和(随机)干扰抑制，最好的结果是获得10倍于闭环带宽或更快的采样速率。在一些情况下，例如不太好处理的振动模式，有时以大于振动模式2倍的速率进行采样是有效的。

复习题

8.1　奈奎斯特速率是什么？它有什么特点？

8.2　描述离散等效设计过程。

8.3　若采样速率为 $30\times\omega_{BW}$，试说明如何得到 $D_d(z)$？

8.4　若系统带宽为1rad/s，试说明采用不同的采样速率有何影响？

8.5　给出选用数字处理器代替模拟电路实现控制器的两个优势。

8.6　给出选用数字处理器代替模拟电路实现控制器的两个不利之处。

△8.7　若采样速率为 $5\times\omega_{BW}$，试说明如何得到 $D_d(z)$？

习题

8.2 节习题

8.1　采样速率为1Hz时离散时间滤波器 $h(k)$ 的 z 变换为

$$H(z)=\frac{1+(1/2)\,z^{-1}}{[1-(1/2)\,z^{-1}][1+(1/3)\,z^{-1}]}$$

(a) 令 $u(k)$ 与 $y(k)$ 分别为该滤波器的离散输入和输出。求出 $u(k)$ 与 $y(k)$ 关系的差分方程。

(b) 求出滤波器极点的自然频率和阻尼比。

(c) 该过滤器稳定吗？

8.2　使用 z 变换求解下面的差分方程：

$$y(k)-3y(k-1)+2y(k-2)$$
$$=2u(k-1)-2u(k-2)$$

其中：

$$u(k)=\begin{cases}k, & k\geqslant 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

$$y(k)=0,\quad k<0$$

8.3　单边 z 变换的定义为

$$F(z)=\sum_{0}^{+\infty}f(k)\,z^{-k}$$

(a) 证明：$f(k+1)$ 的单边 z 变换为 $\mathscr{Z}\{f(k+1)\}=zF(z)-zf(0)$。

(b) 用单边 z 变换求解由差分方程 $u(k+2)=u(k+1)+u(k)$ 得到的斐波那契(Fibonacci)数列的变换式。令 $u(0)=u(1)=1$[提示：需用 $f(k)$ 的变换求出 $f(k+2)$ 变换的一般表达式]。

(c) 求出斐波那契数列的变换的极点位置

(d) 求出斐波那契数列的反变换

(e) 如果用 $u(k)$ 表示第 k 个斐波那契数，试证明：$u(k+1)/u(k)$ 将接近 $(1+\sqrt{5})/2$。这就是希腊人高度评价的黄金比例。

8.4 证明 8.2.3 节 s 平面映射到 z 平面的七个特性。

8.3 节习题

8.5 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{250}{s\left[\left(\frac{s}{10}\right)+1\right]}$$

将下面的滞后控制器与被控对象相串联得到 50°的相位裕度：

$$D_c(s)=\frac{s/1.25+1}{50s+1}$$

用零极点匹配近似法求出该控制器的一个等效数字实现。

8.6 下面的传递函数为一个超前网络，其设计目的为在 $\omega_1=3\text{rad/s}$ 处增加约 60°的相位：

$$H(s)=\frac{s+1}{0.1s+1}$$

(a) 假设采样周期为 $T=0.25s$，用(1)图斯蒂法(2)零极点映射法求出 $H(s)$ 的数字实现，计算并绘制该实现的 z 平面的零极点位置。对每种情况分别计算出网络在 $z_1=e^{j\omega_1 T}$ 处提供的超前相位值。

(b) 运用 lg-lg 坐标，针对 $\omega=0.1$ 到 $\omega=100\text{rad/s}$ 的频率范围，为(a)中求出每个等效数字系统绘制幅值伯德图并与 $H(s)$ 进行比较(提示：幅值伯德图由 $|H(z)|=|H(e^{j\omega T})|$ 给出)。

8.7 为了在 $\omega_1=3\text{rad/s}$ 处引入一个大小为 10 (−20dB)的增益衰减，设计一个滞后网络的传递函数为

$$H(s)=\frac{10s+1}{100s+1}$$

(a) 假设采样周期为 $T=0.25s$，用(1)图斯蒂法和(2)零极点映射法求出 $H(s)$ 的数字实现，计算并绘制该实现的 z 平面的零极点位置。对每种情况分别计算网络在 $z_1=e^{j\omega_1 T}$ 处提供的增益衰减值。

(b) 对(a)中求出的每个等效数字系统绘制幅值伯德图曲线，频率范围取 $\omega=0.01$ 到 $\omega=10\text{rad/s}$。

8.5 节习题

8.8 如图 8.22 所示系统，求出 K，T_D 和 T_I 的值，使得闭环极点满足 $\zeta>0.5$ 且 $\omega_n>1\text{rad/s}$。运用

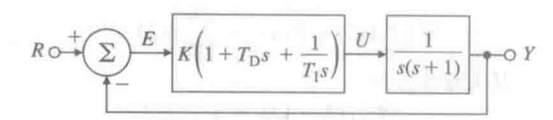


图 8.22 习题 8.8 的控制系统

(a) 图斯蒂法；

(b) 零极点匹配法。

离散化 PID 控制器。使用 Matlab 分别在 $T=1$，0.1，0.01s 的采样时刻对这些数字化实现进行仿真。

△ 8.6 节习题

8.9 有一系统结构如图 8.23 所示，其中：

$$G(s)=\frac{40(s+2)}{(s+10)(s^2-1.4)}$$

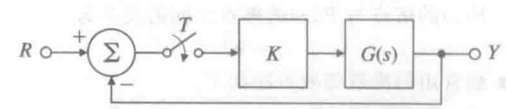


图 8.23 习题 8.9 的控制系统

(a) 假设系统串联了零阶保持器(ZOH)，求出 $T=1$ 时的传递函数 $G(z)$。

(b) 用 Matlab 绘制该系统关于 K 的根轨迹。

(c) 求出使闭环系统稳定的 K 的取值范围。并与使用模拟控制器的情况比较(即采样开关总处于闭合状态的情况)。哪个系统 K 的允许值更大?

(d) 使用 Matlab 计算连续系统和离散系统的阶跃响应，为连续系统选取 K 使其阻尼比 $\zeta=0.5$。

8.10 单轴卫星姿态控制：卫星常常需要通过姿态控制来使天线和传感器相对于地球有正确的方位。图 8.24所示的为一个通信卫星的三轴姿态控制系统。为了研究三轴问题，通常一次只考虑一个轴。图 8.24 描述了这种情况，图中的运动只允许围绕着一个垂直于纸面的轴进行。系统的运动方程为

$$I\ddot{\theta}=M_C+M_D$$

其中：I 为卫星相对于质心的转动惯量；



图 8.24 习题 8.10 的卫星控制系统

M_C为助推器产生的控制力矩；M_D为扰动力矩；θ为卫星轴相对于一个没有角加速度的惯性参考面的角度。

标准化运动方程定义为

$$u=\frac{M_C}{I},\quad w_d=\frac{M_D}{I}$$

得：

$$\ddot{\theta}=u+w_d$$

取拉普拉斯变换得

$$\theta(s)=\frac{1}{s^2}[u(s)+w_d(s)]$$

若不存在扰动，则有

$$\frac{\theta(s)}{u(s)}=\frac{1}{s^2}=G_1(s)$$

在离散的情况下u作用于零阶保持器，我们可以用本章介绍的方法得到离散传递函数为

$$G_1(z)=\frac{\theta(z)}{u(z)}=\frac{T^2}{2}\left[\frac{z+1}{(z-1)^2}\right]$$

(a) 假设采取比例控制，试手工绘制该系统的根轨迹。

(b) 运用 Matlab 绘制根轨迹并验证手工绘制的图形。

(c) 给你的控制器添加一个离散速度反馈使得主导极点的$\zeta=0.5$，$\omega_n=3\pi/(10T)$。

(d) $T=1$s 时反馈增益是多少？$T=2$s 时又是多少？

(e) 绘制 $T=1$s 时的闭环阶跃响应及对应的时域控制序列。

8.11　可以用电磁铁将一个磁性球体悬挂起来，电磁铁的电流通过该球体的位置来控制（由伍德森（Woodson）和梅尔泽（Melcher）于1968年提出）。其中一种可行的原理图如图8.25所示，斯坦福大学使用该工作系统的照片如图9.2所示。其运动方程为

$$m\ddot{x}=-mg+f(x,I)$$

其中：$f(x,I)$表示电磁铁施加在球上的力。当达到平衡点时，磁力与重力平衡。假设用I_0表示平衡点的电流。若$I=I_0+i$，将f在$x=0$和$I=I_0$处展开并忽略高阶项就可得到线性化方程为

$$m\ddot{x}=k_1x+k_2i \tag{8.54}$$

式(8.54)中常数的合理数值为$m=0.02$kg，$k_1=20$N/m，$k_2=0.4$N/A。

(a) 计算从I到x的传递函数，对于简单的反馈$i=-Kx$绘制（连续的）根轨迹。

(b) 假设输入作用在零阶保持器(ZOH)上，令采样周期为0.02s。试计算等效离散时间对象的传递函数。

(c) 为磁悬浮设备设计一个数字控制系统，使闭环系统满足如下的性能指标：$t_r\leqslant$ 0.1s，$t_s\leqslant$0.1s 以及超调量$\leqslant$20%。

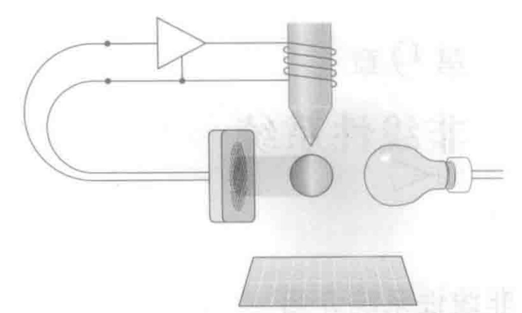


图8.25　习题8.11中磁铁悬浮设备的结构图

(d) 为你设计的系统绘制关于k_1的根轨迹，并讨论能否用你设计的闭环系统平衡各种质量的球。

(e) 假设有一个初始扰动位移作用于小球，为你设计的系统绘制阶跃响应并标出x和控制电流i。如果传感器仅能测量$\pm$1/4cm 范围内的x且放大器仅能提供1A的电流，忽略$f(x,I)$中的非线性项，则可控的最大位移是多少？

8.12　重新考虑第5章的习题5.27，画出离散根轨迹并直接在z平面内进行设计。假设对输出y采样，输入u是在通过零阶保持器(ZOH)后进入被控对象的，且采样速率为15Hz。

8.13　为题3.36中图3.60和图3.61所示的天线伺服系统设计一个数字控制器。该设计的阶跃响应需满足超调量小于10%且上升时间小于80s。

(a) 采样速率应取多少？

(b) 用零极点匹配法的离散等效进行设计。

(c) 用离散化设计法和z平面根轨迹进行设计。

8.14　设系统为

$$G(s)=\frac{1}{(s+0.1)(s+3)}$$

用一个数字控制器来控制，该数字控制器的采样周期为$T=0.1$s。用z平面根轨迹设计一个控制器，使其阶跃响应满足上升时间$t_r\leqslant1$s、超调量$M_p\leqslant5\%$。应采取什么措施来减小稳态误差？

8.15　纯微分控制的离散传递函数为

$$D_d(z)=KT_D\frac{z-1}{Tz}$$

在$z=0$的极点出增加了一些不稳定的相位滞后。这一滞后相位能用下述形式的微分控制消除吗？

$$D_d(z)=KT_D\frac{(z-1)}{T}$$

使用差分方程证明你的结论并讨论实现该微分控制的必要条件。

629 ~ 636

第9章 非线性系统

非线性系统介绍

所有系统都是非线性的，尤其在考虑大信号情况下。另一方面，若信号小，则几乎所有的物理系统都可以用线性模型很好地近似。比如，如果 θ 较小，则 $\sin\theta\approx\theta$ 和 $\cos\theta\approx 1$。相似地，在模拟电子设备中，比如放大器，当信号相对于电源电压而言较小时，放大器的运算几乎是线性的。最后，正如我们将要在后续选读章节中所考虑的，李雅普诺夫(Lyapunov)证明了：如果一个系统在某平衡点附近的近似线性系统是稳定的，那么在此平衡点的某个邻域内，真正的非线性系统也是稳定的。出于这些原因，本书目前仅介绍了适用于线性系统的分析设计方法。然而，如果信号导致设备饱和或者系统中包含一些对于小信号敏感的非线性因素，如某种摩擦力，则解释系统的行为时，必须考虑非线性的影响。为此，本章将会介绍一些现有的工具。

637

本章概述

因为每个非线性系统在许多方面都是独一无二的，所以有大量的方法用于非线性控制设计。我们将要介绍的非线性系统的分析和控制方法可分为四类。9.2 节讨论将问题简化为线性模型的方法。在大多数情况下，考虑小信号近似的方法就足够了。有时，一些非线性的逆是可以找到的，将非线性逆串联在物理非线性前边就可以得到一个整体呈现线性响应的系统。还有一些其他的情况，通过巧妙地使用反馈，可以将一些非线性模型转化为严格的线性形式，这种技术在机器人领域内称为“计算力矩”。

第二类方法是将非线性考虑为变增益的一种启发式的方法。9.3 节考虑的是非线性无记忆的情况，例如，当信号变大时，放大器的输出也会发生饱和。思想是，认为放大器的增益随信号的变大而减小。因为根轨迹是研究系统的特征根来随增益变化而变化的情况的，这种观点启发了我们使用根轨迹来预测系统对幅值变化的输入信号的影响。9.4 节研究具有动态或者记忆的非线性的情况，则根轨迹就不适用了。1950 年，针对这些情况，科谢伯格尔(Kochenburger)提出了描述函数法。为了应用这一方法，需要给系统的非线性部分施加正弦信号，并且计算出周期响应的一次谐波。输入与输出的比率被看作是线性系统可变的频率响应。因此，自然可以用奈奎斯特图来研究系统行为。

尽管这些启发式方法对深刻了解系统的行为非常有帮助，但是它们却不能用来判定系统是否稳定。要解决这个问题，我们必须运用控制理论中的稳定性分析方法。这些理论中最为著名的是李雅普诺夫提出的研究内部稳定性的理论。在将系统的响应看作空间的轨迹的基础上，9.5 节介绍相平面分析法，然后提出了稳定性理论。给出了一些例子，说明在系统满足初始假设下，如何利用稳定性理论指导控制器的设计来保证系统的稳定。这些方法为控制工程师提供了有效理解和设计实际控制问题的途径。最后，9.6 节对本章的内容进行了历史展望。

638

9.1 引言与动机：为什么研究非线性系统

直观上很容易理解：任何物理系统在一定强度的信号下都将是非线性的，还有一些系统对于任意强度的信号而言都是非线性的。另一方面，我们从建立线性近似模型开始研

究，迄今为止，所有的设计方法都是基于这样的假设，即被控对象可以用线性传递函数描述。本章中，我们将给出几个原因来说明研究线性技术根本不是浪费时间，但是我们也尽力说明把非线性的影响考虑到控制系统设计中是十分重要的。

根轨迹法是将特征方程的根看作多种增益的函数来绘图的方法，注意到非线性环节可以看作是随信号幅度而变化的增益，我们首先说明如何将根轨迹与此相结合。此处，尽管根轨迹方法的应用完全是探索性的，但仿真结果说明该方法非常有用。对于包含这样无记忆非线性环节的系统，许多性质可通过绘制关于非线性点处增益的根轨迹来预测。然而，如前文所述，这种方法没有坚实的理论基础，设计者需要考虑是否有未涉及的实状态空间或信号空间区域，当系统处于这些区域时会出现严重后果。毕竟，模型是近似的，无论仿真数量多么巨大，都不可能囊括各种情况。

继根轨迹法之后，我们转向基于频率响应的方法。频率响应的最大优势在于许多情况下可以通过真实系统的实验得到传递函数。最基本的方法是：给系统输入正弦信号，然后测量系统输出正弦的幅值和相位。然而，噪声以及不可避免的非线性影响会使输出比简单的正弦复杂很多，因此设计者抽取基波分量，并把它当作整个系统的输出。如果用频谱分析仪来计算传递函数，也会得到同样的结果。这种方法被科谢伯格尔(*Kochenburger*)称作*描述函数法*。从这个角度讲，可以为非线性环节定义描述函数，包括那些带有记忆的非线性环节。同样，仿真的结果很好并且用这种方法进行了许多有用的设计。不过，正如用根轨迹法设计非线性系统那样，这种方法也不是很可靠。[⊖]

这种情况下怎么办呢？唯一的办法就是面对现实直接研究非线性行为本身。幸运的是，A. M. 李雅普诺夫在1892年发表的关于运动稳定性的研究工作为我们奠定了坚实的数学基础。1907年，这项研究成果被翻译为法语，并于1960年，兰利曼(Lalman)和贝特兰姆(Bertram)在控制领域完善了这一工作。李雅普诺夫给出了两种研究稳定性的方法。第一种方法，他考虑了基于近似线性化的稳定性，正是本书中用来证明我们所关注问题的方法。他证明了举世瞩目的结论：若线性近似系统是严格稳定的，即所有的根都在左半平面(LHP)，则非线性系统在进行线性化的平衡点周围会具有一个稳定域。此外，他还证明了：若线性近似系统在右半平面(RHP)有根，则非线性系统在此平衡点附近不可能具有稳定域。状态空间中稳定域的大小并不是由线性项给出的，而是包含在用于证明的构造过程中。此构造过程就是他的第二种方法。李雅普诺夫第二法基于一个等价的数学问题，即找到一个标量函数来描述系统存储的内部能量。他证明了若能构造出这样的函数，并且此函数的导数沿着系统动态方程的轨迹是负的，则此函数值及其所依赖的状态将最终到达极小点，状态会到达并稳定在平衡点。具有这样性质的函数叫作李雅普诺夫函数。当然，这个简单的描述省略了大量的复杂细节，例如，稳定性的定义就有数十种。然而，只要能够找到李雅普诺夫函数，系统就稳定，这一思想是不变的。根据上述介绍可见，此理论给出了稳定性的充分条件。如果找不到李雅普诺夫函数，设计者也不能确定它是否真的不存在，也许只是找寻工作做得还不够。已有大量的研究致力于为特定类型的非线性系统寻找李雅普诺夫函数。

639

李雅普诺夫方法基于标准状态形式的微分方程，因而关注内部稳定性。而频域方法是外部度量，已有一些基于系统外部响应建立稳定性结果。方法之一是圆判据，在本章中也会有介绍。这种方法可描述为：考虑系统端口处的能量，并关注其是否总是流入端口。如果确实如此，就可以认为所有能量终将耗尽，系统是稳定的。对于此方法正式的证明，研究者们采用了李雅普诺夫第二法，但结果是根据外部特性表达的，例如具有非线性环节系统的线性部分的奈奎斯特图。同时，这个工具为一类特殊非线性系统设计方法奠定了坚实基础。

有一点应该说明，就是非线性控制理论是一个宽泛而复杂的问题，书中我们只能给出

⊖ 因为我们居住在加利福尼亚，我们知道在摇动的大地上有多么危险。

其一小部分的简单介绍。然而，这一理论是控制设计的基础，设计者对该理论理解得越深 640 入，就会对问题的局限性和适用范围理解得越好。我们希望，对这些资料的学习能够激发学生们深入研究这一具有吸引力的课题，并从中受益。

9.2 线性化分析

本节介绍将某些非线性系统简化为适当线性模型的三种方法。几乎所有控制的过程，其运动微分方程都是非线性的。另一方面，迄今为止，我们所讨论的分析和控制设计方法用于线性模型都要比用于非线性模型容易得多。*线性化*就是寻找一个线性模型来近似非线性模型的一个过程。幸运的是，正如李雅普诺夫在100多年前所证明的那样，如果一个小信号线性模型在某平衡点附近有效且稳定，则存在一个包含此平衡点的区域(当然可能会很小)，在此区域里，非线性系统是稳定的。因此，我们能放心地构造一个线性模型，并为它设计一个线性控制，使得至少在平衡点的邻域内，我们的设计是稳定的。既然反馈控制的一个重要作用是保持过程变量在平衡点附近，那么控制设计这样的小信号线性模型通常是控制设计的出发点。

获得控制系统设计的线性模型的另一方法是，利用一部分控制作用去抵消非线性项，然后基于线性理论完成后面的设计。这种方法——反馈线性化——在机器人领域得到广泛应用，称为*计算力矩法*。它也是飞行器控制中的一个研究课题。9.2.2小节简要介绍了这一方法。最后，对某些非线性函数，可以找到其*非线性逆*并与原非线性串联在一起，其组合是线性的。这种方法通常用于校正传感器和执行器轻微的非线性特性，将在9.2.3小节进行讨论。

9.2.1 小信号分析线性化

对一个具有光滑非线性并连续可导的系统，我们可以算出一个对小信号有效的线性模型。许多情况下，这样的模型可以用于设计。非线性微分方程是描述状态导数与状态自身和控制之间非线性关系的方程。换言之，微分方程不能写成下面形式[⊖]：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

而必须写成

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{9.1}$$

641 的形式。

小信号线性化过程中，我们首先确定满足 $\dot{x}_0 = \mathbf{0} = f(x_0, u_0)$ 的平衡点的值 x_0 和 u_0，并令 $x = x_0 + \delta x$ 和 $u = u_0 + \delta u$。然后，我们以平衡点摄动的形式展开非线性方程，满足

$$\dot{x}_0 + \delta\dot{x} \approx f(x_0, u_0) + A\delta x + B\delta u$$

其中：A 和 B 是非线性函数 $f(x, u)$ 在 x_0 和 u_0 点处的线性化矩阵，

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x_0, u_0}, \quad B = \left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{x_0, u_0} \tag{9.2}$$

去掉平衡点的解，得到

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \tag{9.3}$$

这是一个用来近似平衡点附近状态动态的线性微分方程。通常，会将符号 δ 去掉，然后将 x 和 u 看作是相对于平衡点的偏移量。

在建立本书所用模型的过程中，我们屡次遇到非线性方程。如例2.5中的摆，例2.7中的悬吊式起重机，2.3节中的交流感应电动机，例2.19中的水箱流量，例2.20中的液压执行机构。每种情况下，我们要么假设运动幅度很小，要么假设相对于平衡点的运动幅度很小，从而可将非线性方程近似为线性方程。这些例子遵循的步骤本质上就是为了将微分方程线性化成为式(9.3)的形式而寻找 A 和 B 的过程，正如以下几个例子将要说明的一

⊖ 这个方程假设系统是非时变的。一个更一般的表达式为 $\dot{x} = f(x, u, t)$。

样。Matlab 中的线性化函数包括 linmod 和 linmod2。

例 9.1 非线性摆的线性化

考虑例 2.5 中单摆运动的非线性方程。推导系统的平衡点并确定相应的小信号线性模型。

解答。运动方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=\frac{T_c}{ml^2} \tag{9.4}$$

令 $[x_1 \quad x_2]^T=[\theta \quad \dot{\theta}]^T$，可将此运动方程写成状态空间的形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}x_2\\-\omega_0^2\sin x_1+u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{x},u)\\f_2(\boldsymbol{x},u)\end{bmatrix}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)$$

其中：$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$；$u=\frac{T_c}{ml^2}$。为了确定平衡点状态，假设(标准化的)输入扭矩为标称值 $u_0=0$，则

$$\dot{x}_1=\dot{\theta}=0$$

$$\dot{x}_2=\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

642

因此，系统的平衡状态为 $\theta_0=0$ 和 π(也就是，摆分别处于垂直向下和向上的位置)。平衡状态和输入是 $x_0=[\theta_0 \quad 0]^T$，$u_0=0$，状态空间矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\omega_0^2\cos\theta_0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

线性系统在 $\theta_0=0$ 和 π 的特征根分别为 $\pm j\omega_0$ 和 $\pm\omega_0$，正如所料，后一种情况为不稳定的。◀

例 9.2 球悬浮器运动的线性化

图 9.1 所示的为一个应用于大型涡轮机械的磁力轴承。磁铁是用反馈控制的方法来激励的，以保证转轴总是处于中心位置且不会触碰磁极，从而几乎不存在摩擦力的影响。图 9.2 所示的为一个可在实验室搭建的磁力轴承简化版，用一块电磁石将金属球悬浮起来。悬浮装置的物理结构如图 9.3 所示。利用牛顿定律式(2.1)，导出球的运动方程为

$$m\ddot{x}=f_m(x,i)-mg \tag{9.5}$$

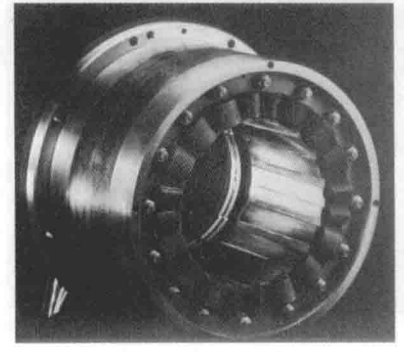


图 9.1 磁力轴承
(图片来源：magnetic bearings 公司)

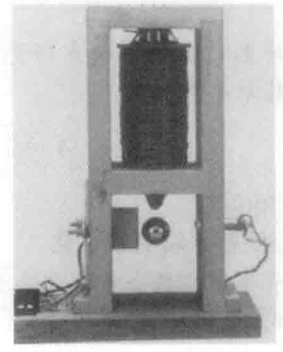


图 9.2 用在实验室的磁力浮球装置
(图片来源：Gene Franklin)

其中：力 $f_m(x, i)$ 是由电磁铁的磁场产生的。理论上，电磁铁产生的磁力与小球到电磁铁的距离平方成反比，但是实验所用悬浮器的准确关系很难用物理机理获得，这是因为磁场非常复杂。不过，这些力可以用仪器来测量。图 9.4 所示的为直径为 1cm，质量为 8.4×10^{-3}kg 的小球的实验曲线。对图中所示电流 $i_2=600$mA 和位移为 x_1 的情况，磁力 f_m 刚好抵消重力，$mg=82\times10^{-3}$N（球的质量为 8.4×10^{-3}kg，重力加速度为 9.8m/s^2）。因此，点 (x_1, i_2) 代表一个平衡点。使用这个数据，找到此平衡点处运动的线性化方程组。

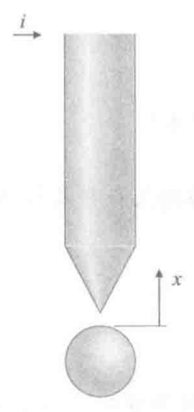


图 9.3　浮球装置模型

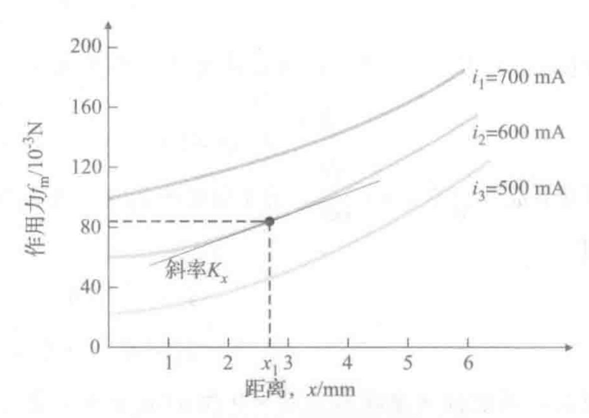


图 9.4　通过实验确定的磁力曲线

解答。首先我们写出力相对于平衡点 x_1 和 i_2 的展开形式为

$$f_m(x_1+\delta x, i_2+\delta i)\approx f_m(x_1, i_2)+K_x\delta x+K_i\delta i \tag{9.6}$$

找到线性增益如下：K_x 是图 9.4 中曲线 $i=i_2$ 上力相对于 x 的斜率，大约为 14N/m。对于固定值 $x=x_1$，K_i 是力随着电流的变化值。我们发现在 $x=x_1$ 处，对于 $i=i_1=700$mA，力大约为 122×10^{-3}N，在 $x=x_1$ 处，对于 $i=i_3=500$mA，力大约为 42×10^{-3}N。因此

$$\begin{aligned} K_i &\approx \frac{122\times10^{-3}-42\times10^{-3}}{700-500}=\frac{80\times10^{-3}\text{N}}{200\text{mA}} \\ &\approx 400\times10^{-3}\text{N/A} \\ &\approx 0.4\text{N/A} \end{aligned}$$

将这些值代入式(9.6)，得到平衡点邻域的线性近似方程为

$$f_m\approx 82\times10^{-3}+14\delta x+0.4\delta i$$

将这个表达式代入式(9.5)并利用质量和重力的数值，对于线性化模型，我们得到

$$(8.4\times10^{-3})\ddot{x}=82\times10^{-3}+14\delta x+0.4\delta i-82\times10^{-3}$$

因为 $x=x_1+\delta x$，所以 $\ddot{x}=\delta\ddot{x}$。因此，关于 δx 的方程为



$$\begin{aligned} (8.4\times10^{-3})\delta\ddot{x} &= 14\delta x+0.4\delta i \\ \delta\ddot{x} &= 1667\delta x+47.6\delta i \end{aligned} \tag{9.7}$$

这就是我们所要得到的平衡点附近的线性化运动方程。逻辑状态矢量是 $\mathbf{x}=[\delta x \quad \delta\dot{x}]^T$，由此可导出标准矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1667 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 47.6\end{bmatrix}$$

且控制量 $u=\delta i$。◀

例 9.3　回顾水箱的线性化

利用本节给出的概念重复例 2.19 的线性化过程。

解答。式(2.94)可以写为

$$\dot{x}=f(x, u) \tag{9.8}$$

其中：$x\stackrel{\text{def}}{=}h$；$u\stackrel{\text{def}}{=}w_{in}$，且

$$f(x,u)=-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{p_1-p_a}+\frac{1}{A\rho}w_{in}=-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{\rho gh-p_a}+\frac{1}{A\rho}w_{in}$$

线性化方程为

$$\delta\dot{x}=A\delta x+B\delta u \tag{9.9}$$

其中：

$$[A]_{x_0,u_0}=\frac{\partial f}{\partial x}=\left[\frac{\partial f}{\partial h}\right]_{h_0,u_0}=\frac{\partial}{\partial h}\left[-\frac{1}{RA\rho}\sqrt{\rho gh-p_a}\right]_{h_0,u_0} \tag{9.10}$$

$$=-\frac{g}{2AR}\frac{1}{\sqrt{\rho gh_0-p_a}}=-\frac{g}{2AR}\frac{1}{\sqrt{p_0-p_a}} \tag{9.11}$$

$$[B]_{x_0,u_0}=\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial w_{in}}=\frac{1}{A\rho} \tag{9.12}$$

然而，注意到需要靠某种流量来将系统保持在某个平衡点，这样式(9.9)才会有效；具体地说，从式(2.94)可以看出，对于 $\dot{h}=0$，

$$u_0=w_{in_0}=\frac{1}{R}\sqrt{p_0-p_a} \tag{9.13}$$

且式(9.9)中的 δu 是 δw_{in}，其中 $w_{in}=w_{in_0}+\delta w_{in}$。因此，式(9.9)变为

$$\delta\dot{h}=A\delta h+B\delta w_{in}=A\delta h+Bw_{in}-B\frac{1}{R}\sqrt{p_0-p_a} \tag{9.14}$$

与式(2.97)精确匹配。◀

9.2.2 反馈线性化

反馈线性化是通过从动态方程中提取出非线性项并将其加到控制中而实现的。如果实施控制的计算机有足够的能力以足够快的速度来计算非线性项，并且所产生的控制量不会引起执行器饱和，那么就会得到一个线性系统。通过一个例子可以更加详细地理解该方法。

646

例 9.4 非线性摆的线性化

考虑由例 2.5 建立的单摆方程[式(2.22)]。使用非线性反馈来线性化系统。

解答。运动方程为

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=T_c \tag{9.15}$$

如果我们计算力矩得到

$$T_c=mgl\sin\theta+u \tag{9.16}$$

则该运动为

$$ml^2\ddot{\theta}=u \tag{9.17}$$

无论角 θ 变得多大，式(9.17)都是线性方程。我们之所以将它作为用于控制的模型，是因为可以使用线性分析技术。所得到的线性控制将基于 θ 的测量值给出 u 的值。然而，实际上我们通过式(9.16)来得到实现平衡的转矩值。对于含有两个或三个刚性连接的机器人，此计算力矩法已经实现了有效的控制。这种方法也用在飞行器控制的研究中，其线性模型会随着飞行状态而发生相当大的变化。◀

9.2.3 通过非线性逆的线性化

把非线性引入控制设计的最简单的情况就是求**逆非线性**。有时将某些非线性的作用反过来是可能的。比如，假设有一个系统的输出为我们所关注信号的平方：

$$y=x^2 \tag{9.18}$$

一种聪明且显然的方法就是在此物理非线性之前串联一个平方根非线性来抵消它，即

$$x=\sqrt{(\cdot)} \tag{9.19}$$

正如下面的例子所示。整个级联系统将会变为线性的。

例 9.5 快速热处理系统的线性化

考虑如图 9.5 所示的使用非线性灯作为执行器的快速热处理系统。假设灯的输入是电压 V，输出是功率 P，它们的关系为

$$P = V^2$$

647 设计一个非线性逆将此系统线性化。

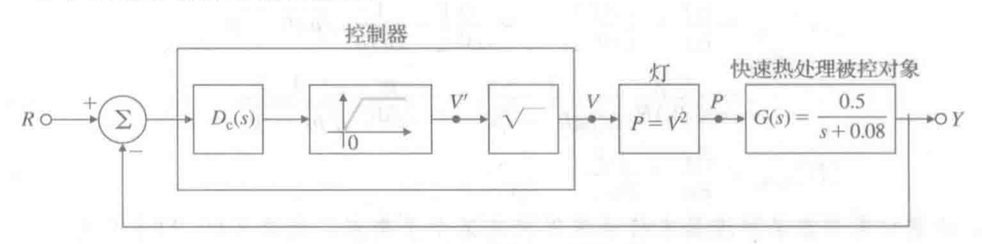


图 9.5 通过逆非线性线性化

解答。我们只在灯的输入前串联一个平方根非线性，即

$$V = \sqrt{V'}$$

整个开环级联系统现在对于任何电压值都是线性的：

$$Y = G(s)P = G(s)V^2 = G(s)V'$$

因此，我们可以用线性控制法设计动态补偿器 $D_c(s)$。注意，为确保模块的输入始终保持非负值，需要将一个非线性元件串联到平方根元件前面。控制器的实现如图 9.5 所示。如果想了解该方法在控制设计上更加详细地的应用，我们推荐读者参见 10.6 节对于快速热处理系统的研究。◀

9.3 使用根轨迹进行等价增益分析

正如之前所说的，每一个真实的系统都是非线性的，并且我们目前所介绍的线性分析和设计方法是用线性近似模型来代替真实模型的方法。有一类重要的非线性系统是不适合进行线性化的，但是可以做有效的分析和设计。这一类系统指这样的系统，其非线性部分不含动态且可以近似为一个随输入信号幅度而变化的增益，也就是无记忆的非线性元件。图 9.6给出了几个这样的非线性系统元件以及它们的通用名称。

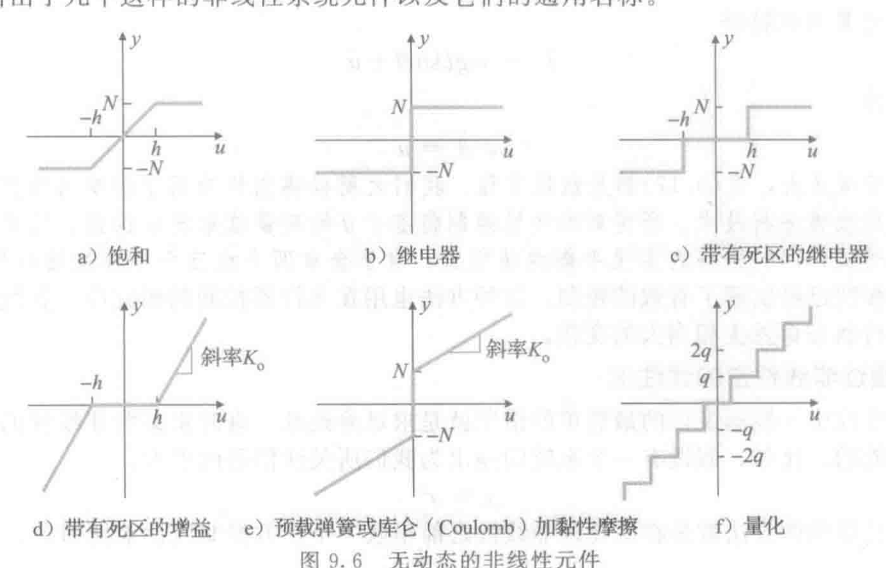


图 9.6 无动态的非线性元件

含有无记忆非线性的系统，其稳定性可以用根轨迹方法探索性地进行研究。方法就

是，用等价增益 K 取代无记忆的非线性部分并绘制这个增益的根轨迹图。对于一定范围的输入信号幅值，等价的增益也将在某范围内取值，就如同增益取固定值那样，可在此增益范围内检验系统的闭环特征根，接下来的几个例子将说明具体如何操作。

例 9.6 变超调和饱和非线性

考虑图 9.7 所示的带有饱和特性的系统。用根轨迹法判断系统的稳定性。

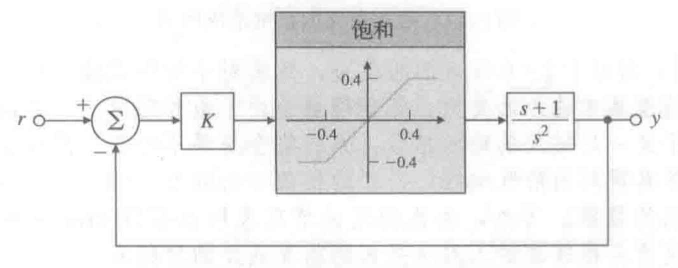


图 9.7 带有饱和的动态系统

解答。此系统不含饱和特性时关于 K 的根轨迹如图 9.8 所示。在 $K=1$ 时，阻尼比为 $\zeta=0.5$。随着增益的减小，根轨迹显示根朝着 s 平面的原点移动，并且阻尼比越来越小。可以利用 Simulink 程序获得系统的阶跃响应。将一系列具有不同幅值的阶跃输入 r 作用于系统，得到如图 9.9 所示的结果。只要输入饱和环节的信号小于0.4，系统就是线性的，系统的行为就是 $\zeta=0.5$处的根所应该具有的行为特点。然而，可以看到，随着输入信号的变大，响应的超调也越来越大，恢复得也越来越慢。注意到输入信号越大相当于有效增益 K 越来越小，正如 9.10 中所见的那样，这就可以解释得通了。从图 9.8所示的根轨迹图我们看到：随着增益 K 的减小，闭环极点更加接近原点，阻尼比越来越小。这导致了响应具有更长的上升时间和调节时间，更大的超调以及更强烈的振荡。◀

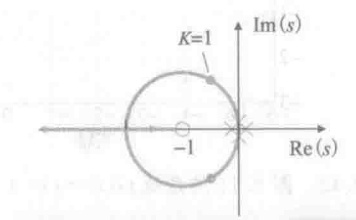
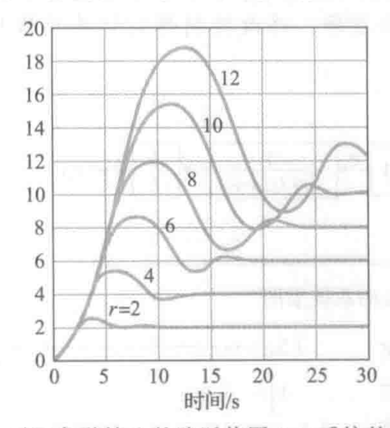
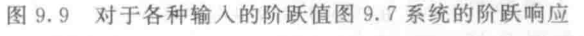


图 9.8 $(s+1)^2/s^2$ 的根轨迹，图 9.7 中不含饱和特性的系统




图 9.9 对于各种输入的阶跃值图 9.7 系统的阶跃响应

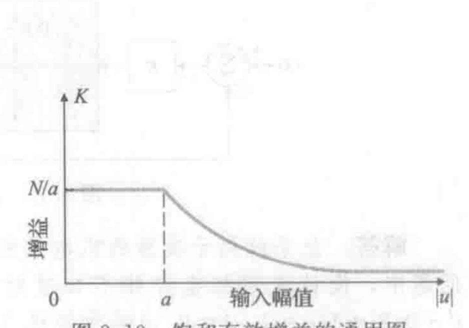


图 9.10 饱和有效增益的通用图

例 9.7 用根轨迹分析条件稳定系统的稳定性

考虑用信号依赖的增益来描述非线性响应的另一个例子，如图 9.11 所示的带有饱和非线性的系统。判断系统是否稳定。

解答。去掉饱和特性后，系统的根轨迹如图 9.12 所示。从这个根轨迹上，我们能够容易地计算出穿过虚轴的点发生在 $\omega_0=1$，$K=\frac{1}{2}$时。这种对于较大增益稳定，而对较小增益却不稳定的系统称为**条件稳定系统**。

648 ～ 650

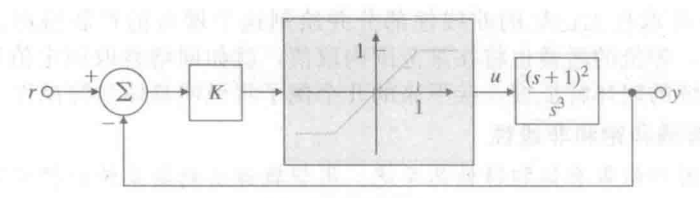


图 9.11 附加条件的稳定系统框图

如果 $K=2$ 时，对应于 $\zeta=0.5$ 时的根轨迹，系统对小的参考输入信号应该符合 $\zeta=0.5$ 的响应。然而，随着参考输入的变大，等价增益会由于饱和而变小，系统的阻尼特性将会变差。最终，对于某一足够大的输入信号，系统将会变得不稳定。图 9.13 所示的为 $K=2$ 时系统的非线性仿真得到的阶跃响应，阶跃的幅值分别取为 $r=1.0$，2.0，3.0 和 3.4。这些响应证实了我们的推测。另外，临界稳定的情况表明以接近 1rad/s 的角频率振荡，正如预测的一样，这恰是根轨迹进入右半平面的临界点处的角频率。◀

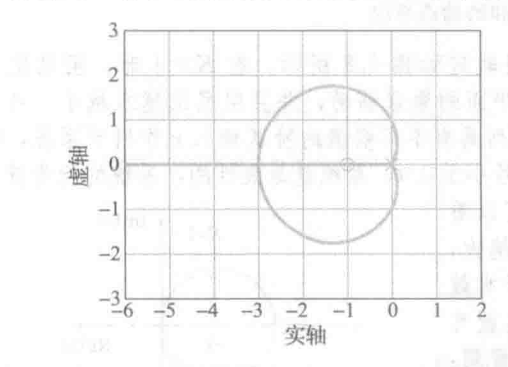


图 9.12 图 9.11 的系统 $G(s)=(s+1)^2/s^3$ 的根轨迹

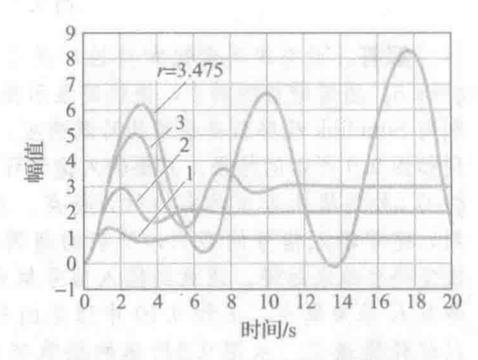


图 9.13 图 9.11 系统的阶跃响应

651

例 9.8 使用根轨迹法对极限环系统的分析和设计

基于图 9.14 所示的框图，最终说明了如何使用根轨迹法对非线性系统响应进行定性描述。确定系统是否稳定，并找到极限环的幅值和频率。修改控制器设计将极限环振荡的影响降到最低。

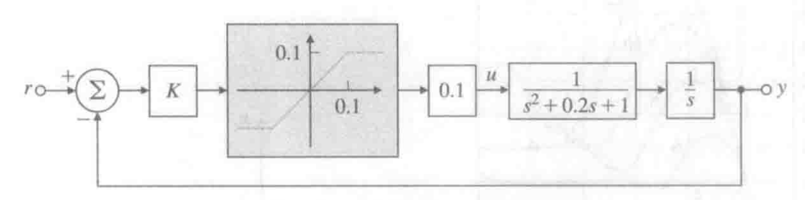


图 9.14 具有振荡模态的系统框图

解答。此系统属于典型的机电控制问题，在该问题中，设计者起初也许并不知道对应于分母项 $s^2+0.2s+1(\omega=1,\ \zeta=0.1)$ 的共振模态。去掉饱和特性之后，此系统关于 K 的根轨迹草图如图 9.15 所示。可以证明，根轨迹和虚轴的交点为 $\omega_0=1$，$K=0.2$；因此，$K=0.5$ 的增益足以使共振模态的根进入右半平面，如图 9.15 中圆点处所示。如果将系统的增益值设为 $K=0.5$，根据我们的分析可以推测：最初不稳定的系统会随着增益值的减小而变得稳定。因此预期一个具有饱和的系统，其响应

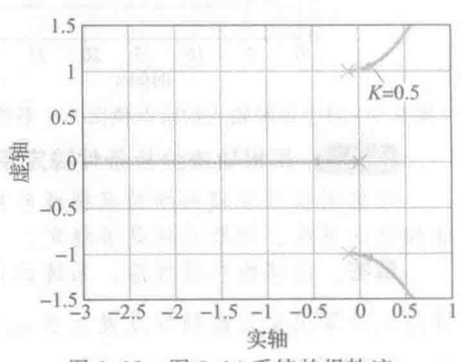
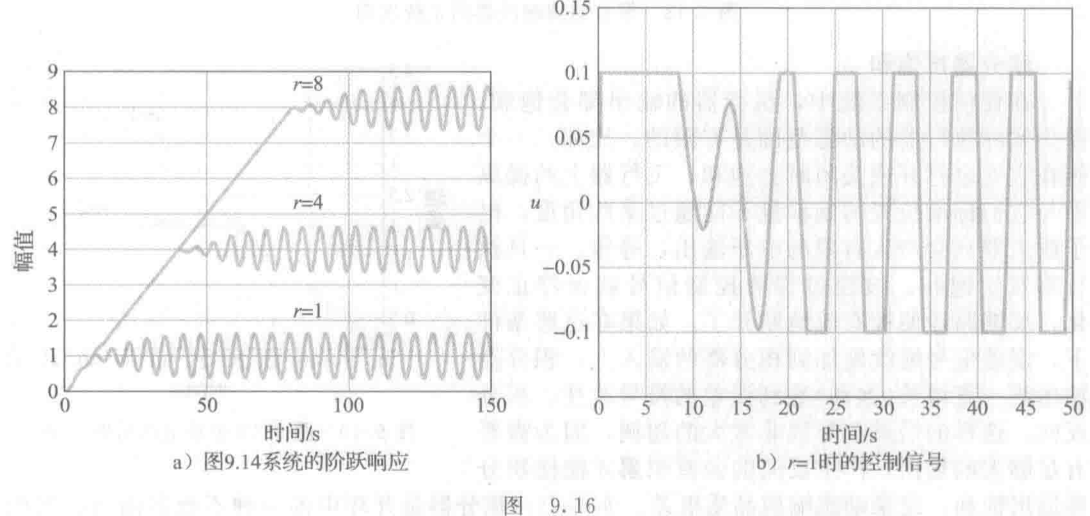


图 9.15 图 9.14 系统的根轨迹

会由于不稳定性而一直增长，直到响应的幅值增大到足以使有效增益下降为 $K=0.2$ 才会停止增长。

输入分别为 $r=1$，4，8 且 $K=0.5$ 的阶跃响应如图 9.16a 所示。图 9.16b 所示的为 $r=1$ 时的控制信号，对于其他两种情况，也有类似的饱和发生，但后来极限环的出现取决于 r 值。我们的探索性分析又一次完全正确：误差逐步达到一个固定的幅度，然后以一定的幅值开始振荡。振荡的频率约为 1rad/s，振荡幅度固定而与输入的阶跃幅值无关。在这种情况下，响应总是趋于一个固定幅值的周期解，也就是**极限环**，之所以这样叫，是因为响应是周期性的，并且随着时间的增大而无限接近极限。



a）图9.14系统的阶跃响应　　b）$r=1$时的控制信号

图 9.16

回到图 9.13，很容易看到阶跃幅度为 3 时的一阶暂态几乎是正弦的。我们可以预测，当系统增益对应的根轨迹增益为 1/2 时，根轨迹穿越到右半平面，此时系统处于稳定的边界。为了防止产生极限环，必须通过补偿器修正根轨迹使得没有根轨迹分支进入右半平面。对于一种轻阻尼比振荡模态，防止它产生极限环的一种常见方法就是，某频率处在极点附近设置补偿零点，使得在这些极点处根轨迹分支的出射角朝向左半平面，该过程早期叫做相位镇定。例 5.8 中合体的机械运动说明了，这样分布的极零点对常常使根轨迹分支从极点朝向零点运动，朝左方翻转，因而远离右半平面。图 9.17 显示了系统的根轨迹，$1/[s(s^2+0.2s+1.0)]$，其陷波补偿的零点位置正如刚才讨论的那样。另外，还包含两个极点使这个补偿在物理上是可实现的。在这种情况下，两个极点都放到 $s=-10$ 处，足够快以至于不会引起系统稳定性问题，而足够慢又使得高频噪声不会被放大太多。因此，用于根轨迹的补偿为

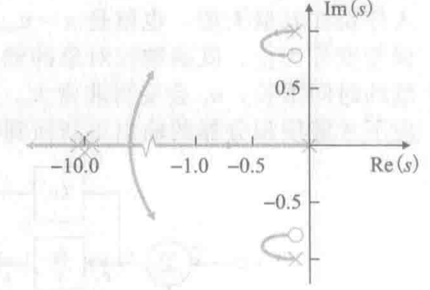
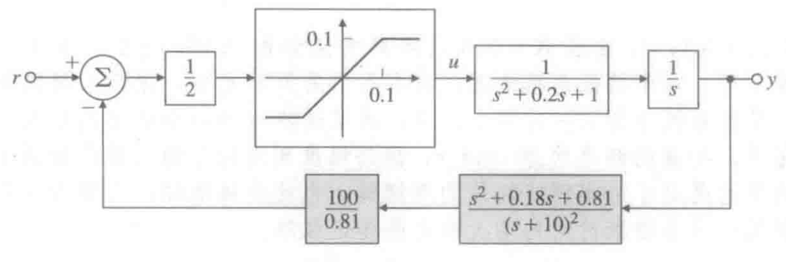


图 9.17 包含补偿的根轨迹

$$D_c(s)=123\frac{s^2+0.18s+0.81}{(s+10)^2}$$

其中增益值选为 123，使补偿的直流增益等于单位值。这个陷波滤波器补偿可减弱 $\omega_n^2=0.81$ 即 $\omega_n=0.9\text{rad/s}$ 附近的输入，因此，任意源于被控对象共振的输入都被削弱了，也就不会影响系统的稳定性。图 9.18 所示为包括陷波滤波器的系统。图 9.19 给出了两种阶跃输入的时间响应。两种输入 $r=2$ 和 4 很大，使得非线性环节一开始就饱和了；然而，因为系统不是条件稳定的，饱和结果只会导致增益降低，因此，系统的响应比线性分析的结果要慢一些，但仍然稳定，也正如我们分段线性分析。两种情况下，非线性环节最终都

变得不饱和，系统稳定到一个新的参考值 r。◀



652
~
654

图 9.18　带有陷波滤波器的系统框图

积分器抗饱和

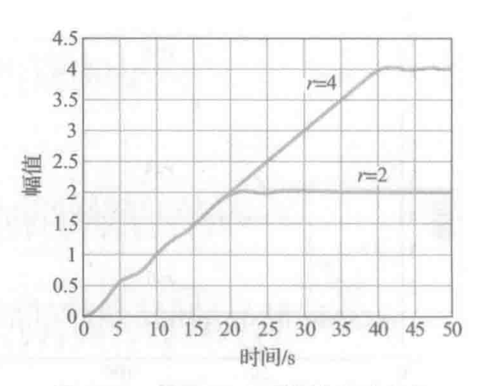


图 9.19　图 9.18 中系统的阶跃响应

在任何控制系统中，执行器的输出都会饱和，因为实际执行器的动态范围是有限的。比如，一个阀在它完全打开或关闭时会饱和，飞行器上的操纵面与它们标准位置的偏移量不能超过某些角度，电子放大器只会产生有限的电压输出，等等。一旦执行器发生饱和，被控过程的控制信号就会停止变化，反馈路径便被有效地断开了。如果在这些条件下，误差信号继续施加到积分器的输入上，积分器输出将一直增长(饱和)直到误差的符号改变、积分反向。这样的后果会导致非常大的超调，因为需要有足够大的输出，产生反向的误差积累才能使积分器退出饱和，结果动态响应品质极差。实际上，积分器是开环中的一种不稳定因素，当饱和发生时，必须镇定积分器。㊀

考虑图 9.20 所示的反馈系统。假设一个给定的参考阶跃信号，其幅度大于使执行器发生饱和的 u_{max}。积分器会一直对误差 e 积分，信号 u_c 会持续增长。然而，被控对象的输入停留在其最大值，也就是 $u=u_{max}$，因此误差将一直很大，直到对象输出超过参考值且误差变号为止。既然被控对象的输入不改变，所以 u_c 的增长无任何意义，但如果饱和持续的时间很长，u_c 会变得非常大。因此需要相当大的负向误差，也就是在很恶劣的动态响应下才能使积分器的输出重新回到线性非饱和区域。

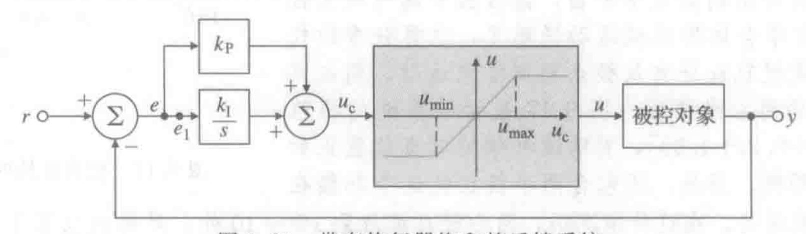


图 9.20　带有执行器饱和的反馈系统

解决这一问题的方法是采用积分器抗饱和回路，当执行器饱和的时候，它会“关闭”积分行为(如果控制器通过数字实现，这很容易借助于形如“if $|u|=u_{max}$，$k_I=0$”的逻辑表述来实现，见第 8 章)。图 9.21(a，b)给出了针对 PI 控制器的两个等价的抗饱和方案。图 9.21a 所示方法比较容易理解，而图 9.21b 所示方法更易于实现，因为它不需要额外增

㊀ 在过程控制中，积分控制通常叫做重置控制，因此抗饱和积分器通常叫做重置抗饱和。若没有积分控制，一个给定点，比如说 10，会得到一个更小的响应值，比如说 9.9。为了使得输出量到达 10，操作员必须重新将给定点设置到 10.1。若利用积分控制，在设定值为 10 时，控制器会自动地将输出调整到 10．因此积分器完成了自动重置。

加单独的非线性部分，而是利用饱和环节本身的特性。[一]在这些方案中，一旦执行器饱和，就会激活积分器周围的反馈环，以保持从 e_1 点进入积分器的输入较小。在此期间，积分器实质上变为快速一阶滞后环节。值得注意的是：为了说明这一点，我们可以将图 9.21a 所示框图中从 e 到 u_c 的部分重画，如图 9.21c 所示。积分部分变为图 9.21d 所示的一阶滞后环节。抗饱和增益 K_a 应该足够大，以保证抗饱和电路在所有误差条件下，都能使积分器的输入值较小。

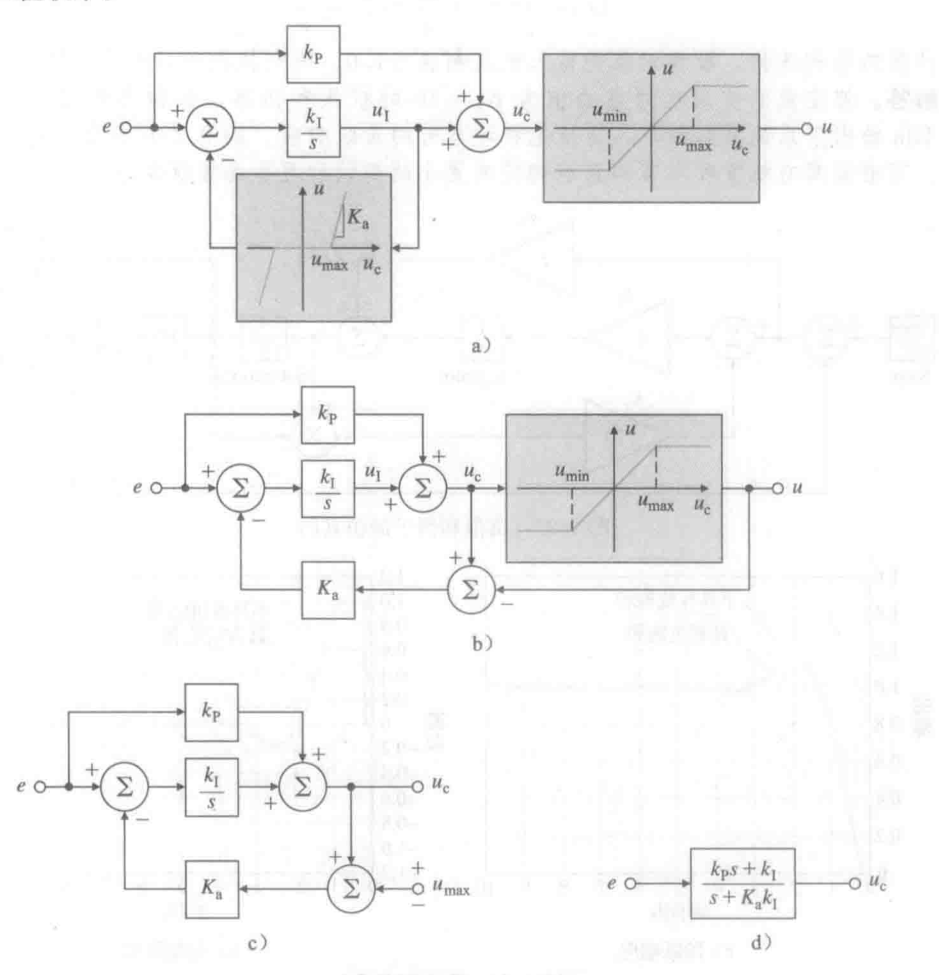


图 9.21 积分器抗饱和技术

抗饱和的作用是减小反馈系统中的超调和控制作用。在任何积分控制的实际应用中都有必要实施这样的抗饱和方案，忽略这种技术将会导致响应的严重恶化。从稳定性的角度看，饱和的影响就是断开反馈环使得开环对象输入为常值，控制器成为一个以系统误差为输入的开环系统。

抗饱和的目的是：当主回路由于信号饱和而断开时，为控制器提供局部反馈使得其自身稳定，任何这样的回路都会起到抗饱和的作用。[二]

[一] 一些情况下，尤其是带有机械执行器的情况，如飞机操纵面或者流量控制阀等，让物理设备撞击它的执行边界是不可取的，可能会使其损坏。此时，习惯做法是设定比物理设备饱和限更低的电子饱和限，这样在物理装置在碰到其饱和限之前系统就会因遇到电子饱和限而停止。

[二] 一种更加复杂的方案可能在低于执行器的饱和水平的地方使用抗饱和反馈，在积分停止后的一段时间内使用 PD 控制。所有这样的方案都需要小心地分析和评估性能并确保稳定性。

例 9.9 PI 控制器的抗饱和和补偿

小信号下，考虑具有如下传递函数的被控对象：

$$G(s)=\frac{1}{s}$$

以及 PI 控制器

$$D_c(s)=k_P+\frac{k_I}{s}=2+\frac{4}{s}$$

以单位反馈结构连接。被控对象的输入被限制在±1.0。研究抗饱和对系统响应的影响。

解答。假定我们使用反馈增益值为 $K_a=10$ 的抗饱和回路，如仿真框图 9.22 所示。图 9.23a 给出了系统具有和不具有抗饱和环节时的阶跃响应。图 9.23b 给出了对应的控制作用。可看到具有抗饱和环节的系统确实有更小的超调和更小的控制作用。 ◀

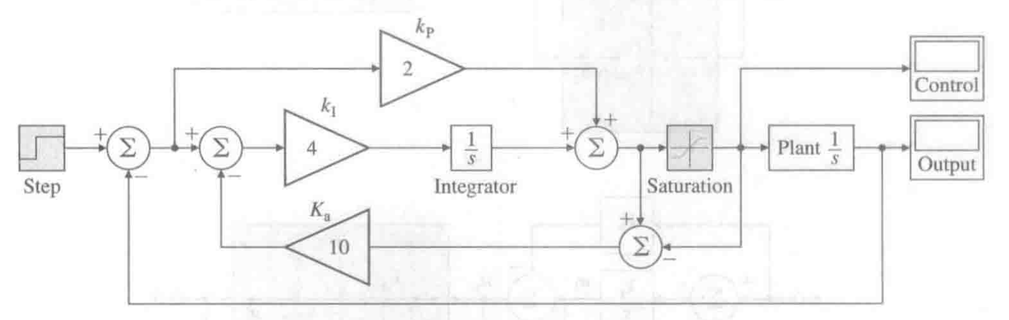
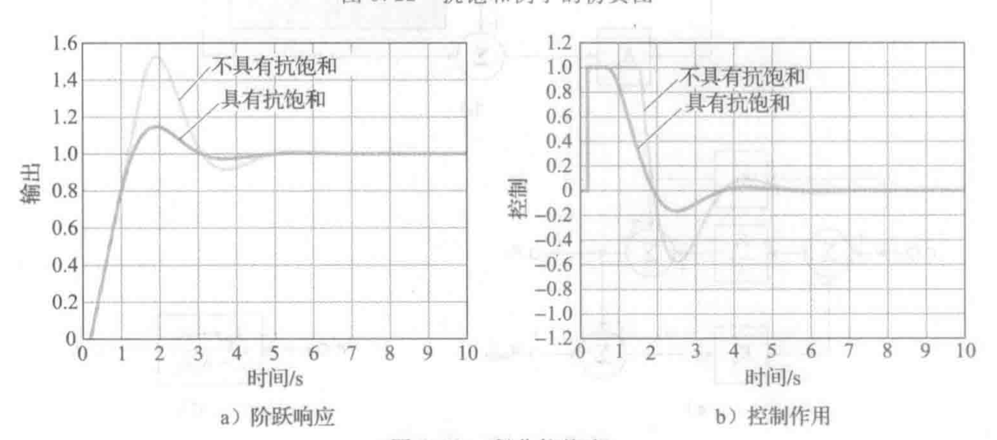


图 9.22 抗饱和例子的仿真图



a）阶跃响应　　b）控制作用

图 9.23 积分抗饱和

9.4 使用频率响应进行等价增益分析：描述函数法

655～658

对于含有图 9.6 所示的任一种非线性的系统，可以将非线性环节视为依赖信号变化的增益，从而定性描述系统行为。例如，含有饱和环节的系统(见图 9.6a)，当输入信号的幅值小于 h 时，非线性环节是线性的且增益为 N/h。而当信号大于 h 时，输出的大小被限制到 N。然而，输入的大小可能远远大于 h，一旦输入超过 h，输出和输入的比值就下降。这样饱和环节的增益特性如图 9.10 所示。所有执行器都会在一定程度上饱和。假如它们不发生饱和，输出就会增加到无穷大，这在物理上是不可能实现的。控制系统设计的一个重要步骤就是执行器选型，也就是选择装置的尺寸、重量、需求功率、成本以及饱和限。通常，更高的饱和程度需要更大、更重和更昂贵的执行器。从控制的角度看，选型的关键因素在于饱和对控制系统性能的影响。

描述函数法是一种假设非线性的输入是正弦的非线性分析方法，可以用来预测一类非

线性系统的行为。非线性环节没有传递函数。不过对于一类特定的非线性，有可能用基于频率的等价增益代替非线性来达到分析的目的。这样我们就能研究闭环的一些性质了，如稳定性。描述函数法主要是一种探索式方法，目的是设法为非线性环节找到一种与“传递函数”类似的表示法。主要思想是作为正弦激励的响应，大部分非线性环节会产生一个与输入同频率的周期信号(不一定是正弦信号)。因此可以将描述函数看作频率响应在非线性环节中的推广。可以假设许多情况下我们都可以只用一次谐波来近似输出，而忽略其他的谐波。这个基本的假设意味着被控对象的行为与低通滤波器近似，幸运的是大部分的实际情况中这个假设都能满足。其他关于描述函数的假设是，非线性环节是时不变的且系统中只有一个非线性环节。事实上，描述函数法是更加复杂的谐波平衡分析的一种特殊情况。它的起源可以追溯到前苏联和其他地方的早期研究中。这种方法是1950年由科谢伯格尔在美国提出的。他提出用傅里叶级数定义增益 K_{eq}(特鲁塞尔，1995年，p. 556)。实践证明这种思想十分有用。该方法是探索式的，但是仍有些人尝试建立该技术的理论依据(伯根(Bergen)和弗兰克斯(Franks)，1971年；卡利尔(Khalil)，2002年；Sastry，1999年)。事实上，比起那些用已有的理论证明了的方法，该方法要有效得多。

考虑如图9.24所示的非线性环节 $f(u)$。如果输入信号$u(t)$是幅值为 a 的正弦曲线，或

$$u(t) = a\sin(\omega t) \tag{9.20}$$

u → [f] → y

图9.24 非线性环节

659

那么输出 $y(t)$将是周期信号，且它的基本周期与输入信号相同，因此它的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} y(t) &= a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty}(a_i\cos(\mathrm{j}\omega t) + b_i\sin(\mathrm{j}\omega t)) \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} Y_i\sin(\mathrm{j}\omega t + \theta_i) \end{aligned} \tag{9.21}$$

其中：

$$a_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(t)\cos(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{9.22}$$

$$b_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y(t)\sin(\mathrm{j}\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{9.23}$$

$$Y_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \tag{9.24}$$

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \tag{9.25}$$

科谢伯格尔建议用这个级数的第一个基波分量来描述这个非线性环节，就像这个非线性环节是一个增益为 Y_1，相位为 θ_1 的线性系统那样。如果幅值是变化的，那么由于非线性环节的特点，傅里叶系数和响应的相位也会作为输入信号幅度的函数而变化。称这种近似为**描述函数**(DF)。描述函数定义为：非线性环节的输出量的基波幅值与输入正弦信号的幅值的比，它本质上是一个“等价的频率响应”函数：

$$DF = K_{eq}(a,\omega) = \frac{b_1 + ja_1}{a} = \frac{Y_1(a,\omega)}{a}\mathrm{e}^{j\theta_1} = \frac{Y_1(a,\omega)}{a}\angle\theta_1 \tag{9.26}$$

因此，描述函数只在jω轴上有定义。对于无记忆并且用奇函数描述[也就是，$f(-a) = -f(a)$]的非线性，傅里叶级数余弦项的系数全为零，描述函数简化为

$$DF = K_{eq}(a) = \frac{b_1}{a} \tag{9.27}$$

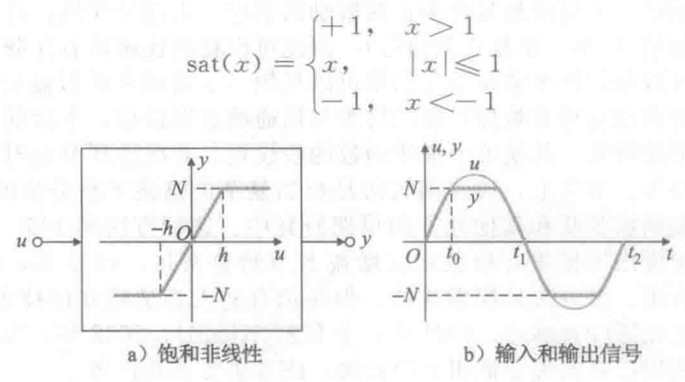
它和频率 ω 无关。这种情况在控制中很普遍，饱和特性，继电器特性，死区非线性特性都会得到这样的描述函数。图9.6所示非线性特性的描述函数计算虽然直接，但是很烦琐。可以通过分析或数字计算获得描述函数，也可以通过实验来确定。现在，我们来计算一些常用非线性的描述函数。

660

例 9.10 饱和非线性的描述函数

图 9.25a 所示的为饱和非线性，它也是控制系统中最为常见的非线性。饱和函数定义为

$$\operatorname{sat}(x)=\begin{cases}+1, & x>1\\ x, & |x|\leqslant 1\\ -1, & x<-1\end{cases}$$



a）饱和非线性　　b）输入和输出信号

图 9.25

如果线性区域的斜率为 k，且最终的饱和值为 $\pm N$，那么这个函数就是

$$y=N\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}x\right)$$

给出这个非线性的描述函数。

解答。考虑图 9.25 所示的饱和环节的输入、输出信号。对于幅值为 $a\leqslant\frac{N}{k}$ 的输入正弦信号 $u=a\sin(\omega t)$，输出使得描述函数恰为单位增益。当 $a\geqslant\frac{N}{k}$ 时，我们需要计算输出所含基波分量的幅值和相位。由于饱和是一个奇函数，式(9.21)中的所有余弦项都是零，并且 $a_1=0$。根据式(9.27)，有

$$K_{\mathrm{eq}}(a)=\frac{b_1}{a}$$

使得

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}N\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}a\sin(\omega t)\right)\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

由于系数 b_1 在区间 $\omega t=[0,\pi]$ 上的积分是在区间 $\omega t=[0,\pi/2]$ 上积分的 2 倍。于是

661

$$b_1=\frac{4N}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}a\sin(\omega t)\right)\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)$$

现在，我们能将积分分为线性和饱和两部分。定义饱和时间 t_s 为

$$t_s=\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{N}{ak}\right)\quad\text{或}\quad \omega t_s=\arcsin\left(\frac{N}{ak}\right)\tag{9.28}$$

那么

$$\begin{aligned}b_1&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left[\int_0^{\omega t_s}\operatorname{sat}\left(\frac{k}{N}a\sin(\omega t)\right)\sin(\omega t)\mathrm{d}t+\int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\omega t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left[\int_0^{\omega t_s}\frac{k}{N}a\sin^2(\omega t)\mathrm{d}t+\int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\omega t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left[\int_0^{\omega t_s}\frac{k}{2N}a(1-\cos(2\omega t))\mathrm{d}t+\int_{\omega t_s}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\omega t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{4N\omega}{\pi a}\left[\frac{k}{2N}at\Big|_0^{t_s}-\frac{k}{2N}a\sin(2\omega t)\Big|_0^{t_s}-\frac{1}{\omega}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos t_s\right)\right]\end{aligned}$$

利用式(9.28)，我们得到

$$\sin(\omega t_s)=\frac{N}{ka}\quad,\quad \cos(\omega t_s)=\sqrt{1-\left(\frac{N}{ka}\right)^2}$$

最终得到

$$K_{eq}(a)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left[k\arcsin\left(\dfrac{N}{ak}\right)+\dfrac{N}{a}\sqrt{1-\left(\dfrac{N}{ak}\right)^2}\right], & \dfrac{ka}{N}>1\\ k, & \dfrac{ka}{N}\leqslant 1\end{cases}\tag{9.29}$$

图 9.26 给出了 $K_{eq}(a)$的图，该图表明了该描述函数是不依赖频率的实值函数，因此不会导致相移。可以看到描述函数开始时为常数，之后作为输入信号幅值 a 的倒数函数衰减。◀

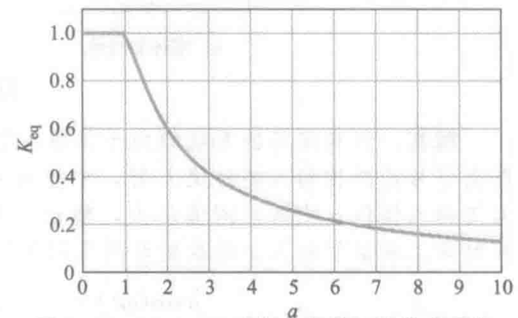


图 9.26　$k=N=1$ 时饱和非线性的描述函数

例 9.11　继电器非线性的描述函数

找出图 9.6b 所示的继电器或符号函数的描述函数且定义

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}+1 & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x=0\\ -1 & , \quad x<0\end{cases}$$

解答。对于任意大小的输入，输出都是幅值为 N 的方波，因此，$Y_1=\frac{4N}{\pi}$且 $K_{eq}=\frac{4N}{\pi a}$。如果我们让 $k\to+\infty$，那么同样可以从式(9.29)得到此解。对于小角度，有

$$\arcsin\left(\frac{N}{ak}\right)\approx\frac{N}{ak}$$

因此，由式(9.27)，我们有

$$K_{eq}(a)=\frac{2}{\pi}\left(k\left(\frac{N}{ak}\right)+\frac{N}{a}\right)=\frac{4N}{\pi a}\tag{9.30}$$

前述的两个非线性是无记忆的。接下来，我们考虑有记忆的非线性。许多应用中都能找到有记忆的非线性，包括磁性记录设备，机械系统中和电子电路中的间隙。考虑图 9.27 所示的双稳态的电子电路，这种电子电路叫做施密特(Schmitt)触发器(Sedra 和 Smith, 1991)。这种电路具有记忆。参考图 9.28，如果电路处于 $v_{out}=+N$ 的状态，那么正的 v_{in} 值不会改变状态。为了将电路状态"触发"到 $v_{out}=-N$，我们必须使 v_{in}的负向值足够大，从而可使 v 的值为负。阈值为 $h=\frac{NR_1}{R_2}$。施密特触发器通常用于航天器控制(Bryson, 1984)。下面，我们求滞环非线性的描述函数。

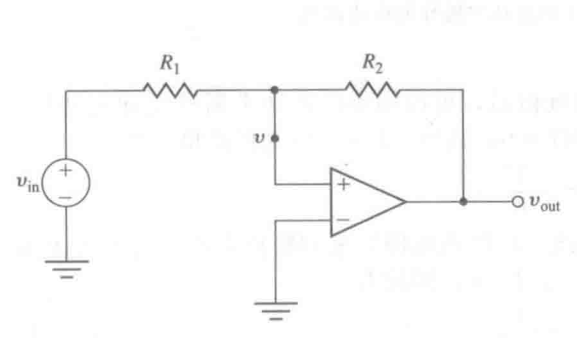


图 9.27　施密特触发器电路

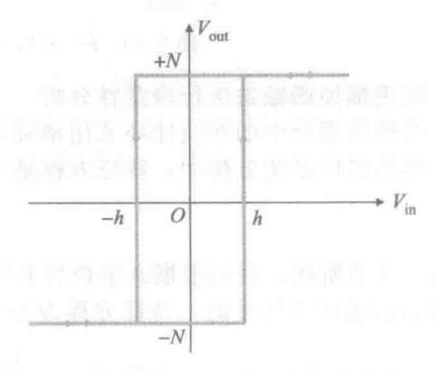
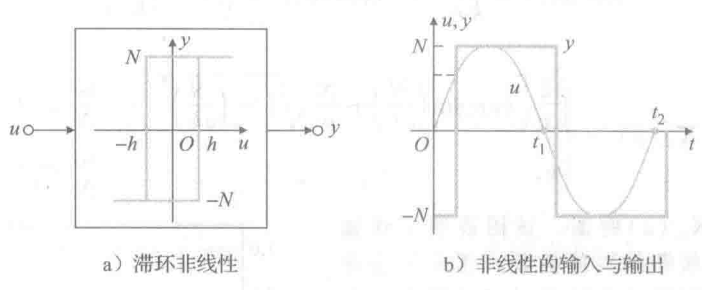


图 9.28　施密特触发器电路的滞环非线性　◀

例 9.12　具有滞环非线性的继电器的描述函数

考虑图 9.29a 所示的具有滞环非线性的继电器函数。求出此非线性的描述函数。



a）滞环非线性　　b）非线性的输入与输出

图 9.29

解答。具有滞环的系统倾向于停留在它当前的状态。若不知道输出的历史值，则只有等到符号函数的输入超过值 h 时，才能唯一地确定输出值。这意味着非线性是带记忆的。只要输入幅值 a 比滞后阈值 h 大，输出就是幅值 N 的方波。从图 9.29b 可以看出，方波在时间上滞后于输入。滞后的时间可以用下式计算：

$$a\sin(\omega t)=h \quad 或 \quad \omega t=\arcsin\left(\frac{h}{a}\right) \tag{9.31}$$

因为对于所有频率相角都是已知的，有

$$K_{eq}(a)=\frac{4N}{\pi a}\angle-\arcsin\left(\frac{h}{a}\right)=\frac{4N}{\pi a}e^{-j\arcsin\left(\frac{h}{a}\right)} \tag{9.32}$$

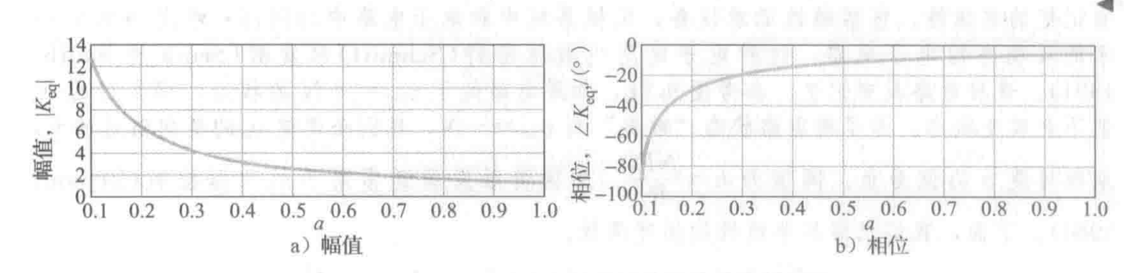
$$=\frac{4N}{\pi a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2}-j\frac{h}{a}\right) \tag{9.33}$$

描述函数为

$$K_{eq}(a)=\begin{cases}\dfrac{4N}{\pi a}\left(\sqrt{1-\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}-j\dfrac{h}{a}\right), & a\geqslant h\\ 0, & a<h\end{cases} \tag{9.34}$$

662 ~ 664

图 9.30 画出了描述函数。幅值和输入信号幅值的倒数成比例，相角在 −90°到 0°间变化。



a）幅值　　b）相位

图 9.30　$h=0.1$，$N=1$ 时滞环非线性的描述函数

利用描述函数法进行稳定性分析

非线性系统中的非线性环节用描述函数近似后，可以用推广的奈奎斯特定理来处理。在标准的线性系统分析中，特征方程是 $1+KL=0$，其中，$L=D_cG$ 为回路增益并且

$$L=-\frac{1}{K} \tag{9.35}$$

如同 6.3 节所述，我们根据奈奎斯特曲线环绕 $-1/K$ 点的圈数来判断稳定性。当用描述函数 $K_{eq}(\alpha)$表示非线性时，特征方程为 $1+K_{eq}(a)L=0$，因此有

$$L=-\frac{1}{K_{eq}(a)} \tag{9.36}$$

现在，我们必须查看 L 与 $-1/K_{eq}(a)$ 的交点，如果曲线 L 与 $-1/K_{eq}(a)$ 相交，根据描述函数所得近似性质可知，系统将会在穿越幅值 a_1 的交点处产生振荡，且相应的频率为 ω_1。然后，就像对线性系统那样，我们查看圈数来判断对某个特定的增益值系统是否稳定。如果是这样，我们推断非线性系统是稳定的。否则，断定非线性系统是不稳定的。

图 9.31 所示的例子中，除了一个非线性环节外，其余都是线性环节。非线性环节其实有可能起到抑制振荡的有利作用。可用描述函数法来确定极限环的幅值和频率。严格地说，一个极限环系统可认为是不稳定的。事实上，极限环的轨迹被限制在状态空间的一个有限区域内。如果这个区域在性能允许的范围之内，那么这种响应也是可以接受的。在一些情况下，极限环也有积极作用（参见 10.4 节研究的情况）。由于系统不会静止在状态空间的原点，所以系统也就不具有渐近稳定性。描述函数法对确定不稳定的产生条件很有帮助，甚至能提出消除不稳定性的补救措施，这点将在接下来的例子中说明，例子中把线性回路增益的奈奎斯特曲线 L 和描述函数的负倒数 $-1/K_{eq}(a)$ 画在一起。它们相交的点就代表极限环。为了确定极限环的幅值和频率，我们将式(9.36)重写为

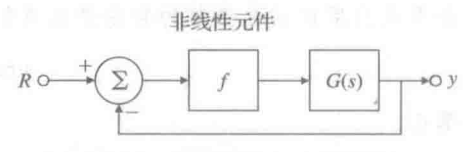


图 9.31　具有非线性的闭环系统

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{L(\mathrm{j}\omega)\}\mathrm{Re}\{K_{eq}(a)\}-\mathrm{Im}\{L(\mathrm{j}\omega)\}\mathrm{Im}\{K_{eq}(a)\}+1=0\\&\mathrm{Re}\{L(\mathrm{j}\omega)\}\mathrm{Im}\{K_{eq}(a)\}+\mathrm{Im}\{L(\mathrm{j}\omega)\}\mathrm{Re}\{K_{eq}(a)\}=0\end{aligned}\tag{9.37}$$

然后，我们求解这两个方程，能得到两个未知量，极限环的频率 ω_1 及其相应幅值 a_1 的可能值，接下来举例说明。

例 9.13　条件稳定系统

考虑图 9.14 所示的反馈系统。利用奈奎斯特图确定极限环的幅值和频率。

解答。如图 9.32 所示，把系统的奈奎斯特曲线与 $-\dfrac{1}{K_{eq}(a)}$ 曲线画在一起。注意，由式(9.29)可知描述函数的负倒数为

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{1}{\dfrac{2}{\pi}\left(k\arcsin\left(\dfrac{N}{ak}\right)+\dfrac{N}{a}\sqrt{1-\left(\dfrac{N}{ka}\right)^{2}}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\dfrac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\dfrac{0.1}{a}\right)+\dfrac{0.1}{a}\sqrt{1-\left(\dfrac{0.1}{a}\right)^{2}}\right)}$$

它是一条与负半轴重合的直线，也是以输入信号幅值 a 为参数的函数。两条曲线在负实轴 -0.5 处的交点对应频率为 $\omega_1=1$ 的极限环。在 $k=1$ 和 $N=0.1$ 时描述函数如图 9.33 所示，$K_{eq}=0.2$ 的幅值相当于 $a_1=0.63$ 的输入幅值。

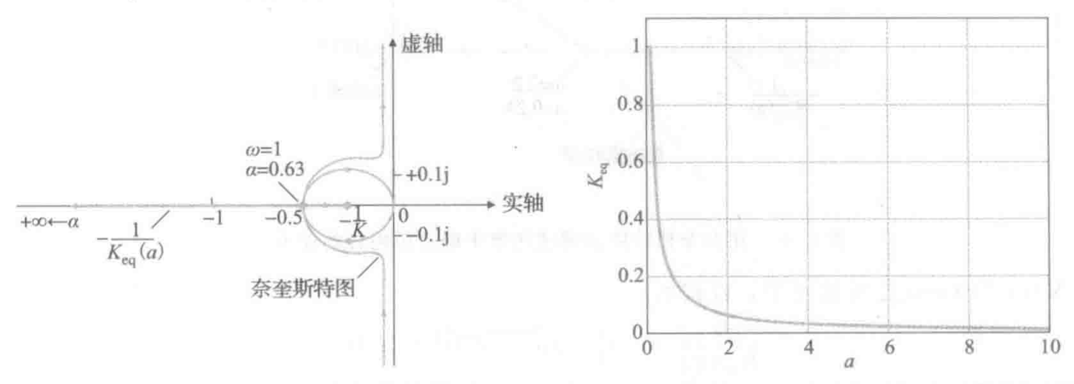


图 9.32　用奈奎斯特图和描述函数确定极限环　　图 9.33　$N=0.1$，$k=1$ 时饱和非线性的描述函数

或者，从图 9.15 所示的本例的根轨迹可见，穿越虚轴处的增益值为 0.2；再根据式(9.29)，我们可得

$$K_{eq}=\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\left(\frac{0.1}{a}\right)+\frac{0.1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{a}\right)^2}\right)=0.2$$

如果我们用反正弦函数的自变量来近似替代反正弦函数，即

$$\arcsin\left(\frac{0.1}{a}\right)\approx\frac{0.1}{a}$$

那么

665 ~ 667

$$\frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{0.1}{a}\right)+\frac{0.1}{a}\sqrt{1-\left(\frac{0.1}{a}\right)^2}\right)=0.2$$

由上式可得多项式方程

$$\pi^2a^4-2\pi a^3+(0.1)^2=0$$

相应的解为 $a=0.63$。通过测量图 9.16 上的时间记录，振荡的幅值为 0.62，与我们的预测很相符。

对于含有记忆非线性的系统，也可以使用奈奎斯特技术，正如下面的例子所说。◀

例 9.14 确定带有滞环非线性特性的稳定性

考虑图 9.34 所示的带有滞环非线性特性的系统。判断该系统是否稳定，并求出极限环的幅值和频率。

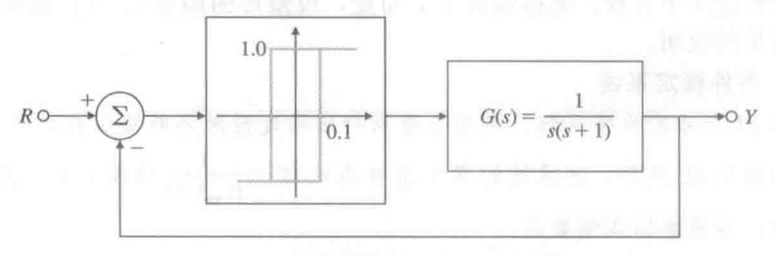
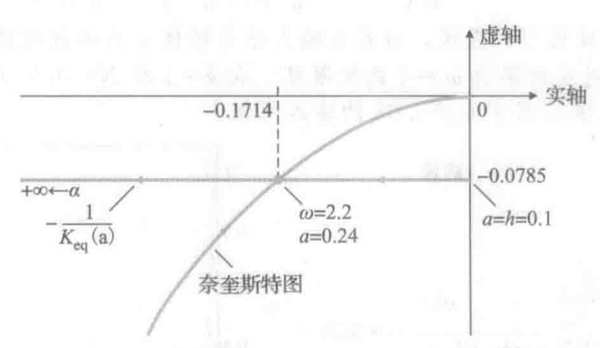


图 9.34 含有滞环非线性的反馈系统

解答。图 9.35 给出了系统的奈奎斯特图。滞环非线性描述函数的负倒数为

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{1}{\frac{4N}{\pi a}\left(\sqrt{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2}-j\frac{h}{a}\right)}=-\frac{\pi}{4N}\left[\sqrt{a^2-h^2}+jh\right]$$



668

图 9.35 用奈奎斯特图和描述函数来确定极限环的性质

在 $N=1$ 和 $h=0.1$ 的情况下，我们有

$$-\frac{1}{K_{eq}(a)}=-\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{a^2-0.01}+0.1j\right]$$

这是一条平行于实轴的直线，是以输入信号幅值 a 为参数的函数，如图 9.35 所示。该曲

线和奈奎斯特图的交点显示了稳定极限环的频率和相应的幅值。我们也能以解析的方式确定极限环的信息为

$$-\frac{1}{K_{\mathrm{eq}}(a)}=-\frac{\pi}{4}[\sqrt{a^2-0.01}+0.1\mathrm{j}]=G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega(\mathrm{j}\omega+1)}$$

去掉前式的分母，我们得到

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2-0.01}\omega^2+\frac{0.1\pi}{4}\omega-1+\mathrm{j}\left[\frac{0.1\pi}{4}\omega^2-\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2-0.01}\omega\right]=0$$

分别令实部和虚部为零可以得到两个方程，含有两个未知数。相关的解为 $\omega_1=2.2\mathrm{rad/s}$ 和 $a_1=0.24$。图 9.36 给出了闭环系统的仿真实现。系统的阶跃响应如图 9.37 所示，极限环的幅值为 $a_1=0.24$，频率为 $\omega_1=2.2\mathrm{rad/s}$，我们的分析很好地预测了这个极限环。◀

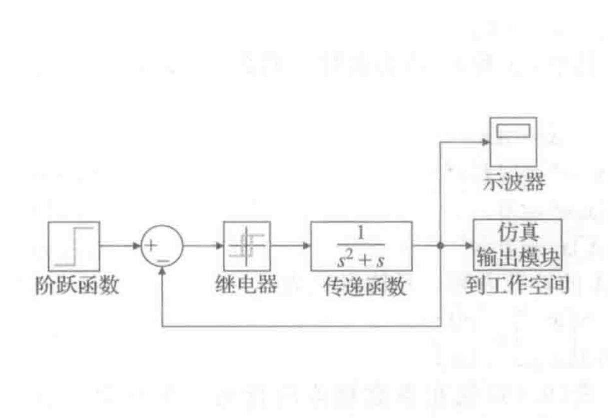


图 9.36 具有滞环特性系统的仿真图

图 9.37 显示极限环振荡的阶跃响应

669

△9.5 基于稳定性的分析和设计

任何控制系统的核心要求是稳定性，我们研究的设计方法正是基于这一事实而得到的。根轨迹是闭环极点在平面的移动曲线图，而设计者都知道：如果有根进入平面的右半部分，则系统将是不稳定的。一种基于状态描述的设计方法是极点配置法，当然，这种方法中极点的理想位置最好能选择在稳定区域。以类似的方式，奈奎斯特方法是基于频率响应证明系统稳定条件的方法，而设计者们也意识到根轨迹的闭环要求，或者说等价地，伯德图中的增益和稳定裕度的相位裕度要求。在研究这些方法之前，数学家们研究了常微分方程的稳定性。而且需要这些或者其他复杂的技术来面对非线性系统的难题。我们首先给出常微分方程解的图形表示也就是众所周知的相平面，并介绍李雅普诺夫方法和其他研究方法，以作为对控制设计这一领域的介绍。

9.5.1 相平面法

根轨迹和频率响应的方法，通过传递函数的极点和零点的分布或频率响应的增益和相位间接地考虑系统的响应，而相平面法则通过绘出状态变量的轨线直接考虑时间响应。尽管直接观测的方式使这种方法局限于只有两个状态变量的二阶系统，但这种方法能够适用于非线性研究，并为线性系统的研究提供新视角，因此该技术值得一看。

为说明相平面的思想，考虑如图 9.38所示的构造的电机系统，其闭环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}$$

如果我们假定 $T=1/6$，该放大器(暂时)没有出现饱和且增益系数为 K，其中 $K=5T$，那么闭环系统的状态方程可写为：

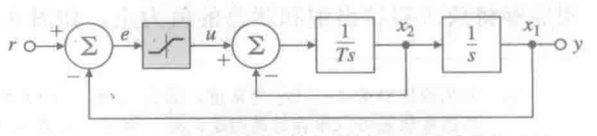


图 9.38 一个具有非线性执行器的基本位置反馈系统

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{9.38}$$

$$\dot{x}_2 = -5x_1 - 6x_2 \tag{9.39}$$

670

$$y = x_1 \tag{9.40}$$

由于这些等式是时不变的，用式(9.38)除式(9.39)可以消除时间变量并得到

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-5x_1 - 6x_2}{x_2} \tag{9.41}$$

这个等式的解给出了 x_2 关于 x_1 的图形，或者换句话说，给出了以(x_1, x_2)⊖为坐标的轨迹。在绘出式(9.41)的轨迹之前，先考虑以矩阵形式给出的系统方程 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是很有用的，其中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

如果我们在此等式中假设，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{st}$，其中：$s$ 和 $\boldsymbol{x}_0$ 均为常数，那么 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}_0 s\mathrm{e}^{st}$，此等式推导过程如下：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{9.42}$$

$$\boldsymbol{x}_0 s\mathrm{e}^{st} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{st} \tag{9.43}$$

$$[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{st} = 0 \tag{9.44}$$

$$[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}_0 = 0 \tag{9.45}$$

在此需要说明的是，式(9.45)是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程，具体形式为

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{01} \\ \boldsymbol{x}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.46}$$

如附录 WE(www.fpe7e.com)所述，式(9.46)仅在系数矩阵的行列式为 0 时才有解，即

$$s(s+6) + 5 = 0 \tag{9.47}$$

$$(s+1)(s+5) = 0 \tag{9.48}$$

故式(9.46)有解时的两特征值为 $s=-1$ 和 $s=-5$。如果把 $s=-1$ 代入式(9.46)，我们得到

671

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & -1+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{01} \\ \boldsymbol{x}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.49}$$

此时，初始状态矢量的解为 $x_{02}=-x_{01}$。在状态空间里，这条直线就是对应特征值 $s=-1$的特征矢量。如果令 $s=-5$，重复这一过程，结果是

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & -5+6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{01} \\ \boldsymbol{x}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.50}$$

这时特征矢量的解为 $x_{02}=-5x_{01}$。

考虑这些含义。我们首先假设状态的时间解是一个常数乘以一个指数，指数项是 e^{-t} 或 e^{-5t}。第一种情况下，状态必定沿着矢量 $\boldsymbol{x}_{02}=-\boldsymbol{x}_{01}$ 变化，而在第二种情况下，状态必定沿着矢量 $\boldsymbol{x}_{02}=-5\boldsymbol{x}_{01}$ 变化。知道了这些，我们就可以针对不同的初始状态计算出式(9.38)和式(9.39)的解，以及在图 9.39 中绘出 $\boldsymbol{x}_2(t)$关于 $\boldsymbol{x}_1(t)$的图。图中粗线表示两个特征矢量。当观察这些曲线时，很明显能够看到所有曲线(快速!)从平行于 $s=5$ 对应的特征矢量出发，并且快速移向平行于 $s=-1$ 对应的特征矢量(慢速!)。所有解都向位于状态空间的原点处的平衡点靠近。

如果放大器达到饱和，图就会发生实质性的改变，例如，如果放大器在 $u=0.5$ 这个值处达到饱和，那么速度就会快速接近这个值，而且会停留在那里，直到位置状态 $\boldsymbol{x}_1$ 达到能够将放大器拉出饱和状态的值为止，如图 9.40 所示。

⊖ 如果设定斜率 dx_2/dx_1 为常值，那么 x_2 和 x_1 的关系是一条直线。如果沿着一组直线标记已知斜率值，那么这些轨迹可以很容易被勾绘出来。例如，沿着 x_1 轴，$x_2=0$，斜率为无穷大，这些解的图像是垂直的。这种方法就称为等值线法。

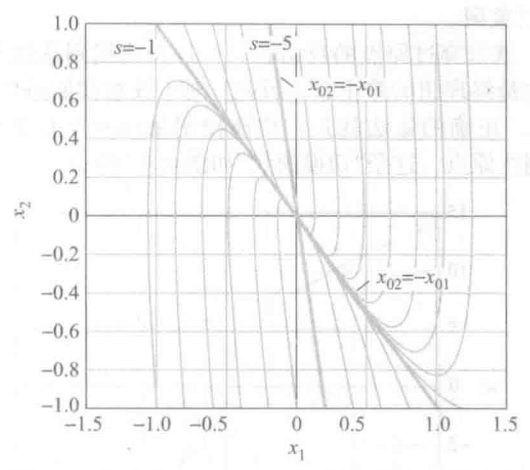


图 9.39 极点在 $s=-1$ 和 $s=-5$ 的具有一个结点的相平面图

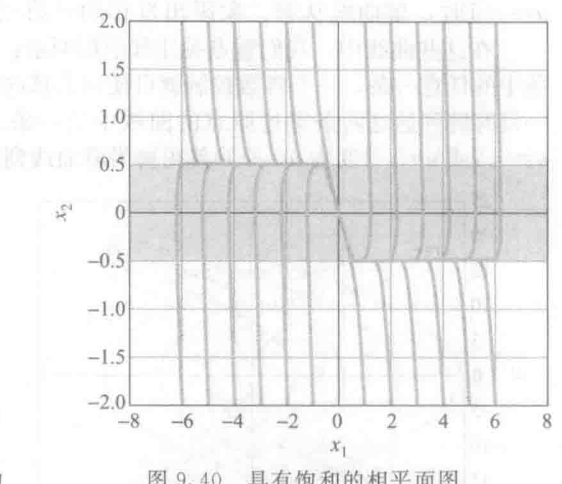


图 9.40 具有饱和的相平面图

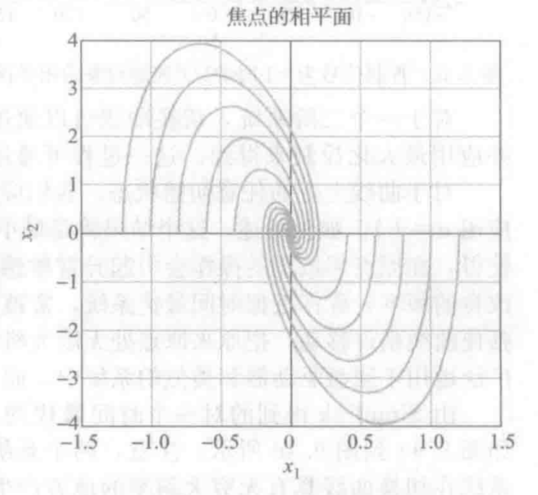


图 9.41 具有复极点的系统相平面图

注意，在线性区域中曲线走向几乎完全沿"慢"特征矢量方向。最后，我们注意到，当极点分布是复数时，相平面的图又会发生改变。这种情况下，状态变量的运动是由阻尼正弦曲线组成的，x_1 关于 x_2 的图形是沿着螺旋状的。不同的初始状态对应的轨迹汇总在图 9.41中。

这几个例子仅仅触及了相平面分析法的表面而已，但给出了运用这一形式帮助设计者观察动态响应的某些想法。注意，这种可视化对二阶(主)系统非常有用，对于更高阶的系统，这个概念仍然成立，但可视化明显变得更加困难。

Bang-bang 控制

一个基于相平面法的非线性系统设计的例子是存在控制饱和时的最优最小时间控制。为此，我们介绍这种得到广泛应用的技术中最简单的情形：控制对象为$1/s^2$。其方程式为

672
~
673

$$\ddot{y} = u \tag{9.51}$$

$$e = y - y_f \tag{9.52}$$

其中：$y(0)=\dot{y}(0)=0$，y_f 是一个常数。输入控制限制在$|u|\leqslant 1$。问题是，想要在最短的时间里使误差恒为 0。如果我们定义状态变量 $x_1=e$ 和 $x_2=\dot{e}=\dot{y}$，等式变为

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{9.53}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{9.54}$$

$$x_1(0) = -y_f \tag{9.55}$$

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0 \tag{9.56}$$

而问题是使 t_f 最小。直观上，这是一个急躁的司机希望在最短时间里从一站到达下一站的问题。司机有时会猛踩油门，然后在恰到好处的地方切换踩住刹车，使车刚好滑到下一站。最优控制理论的一个基本结果证实了这种直观的想法，那就是：如果 $y_f>0$，这个问题的解应当是施加一段时间的最大正向控制，然后在某一时刻切换到最大负向控制，使得误差减到 0，并且停留在那儿。为研究此问题，图 9.42 给出了 $u=1$ 和 $u=-1$ 两种情况下被控对象在相平面的解曲线。$u=+1$ 时，解曲线从第四象限出发移动到第一象限。

$u=-1$时，解曲线从第二象限出发移动到第三象限。

在这些曲线中，我们重点关注其中那两条：就是穿过原点的那两条。一旦有曲线到达这两条中的任意一条，一个常数控制就可使状态移向最终理想的静止点。因此，对于任意初始条件，一旦有解到达这两条穿过原点的曲线中的一条，正确的做法就是，切换控制量($u=+1$ 变为 $u=-1$或 $u=-1$变为 $u=+1$)使得解沿着曲线到达原点。这条“切换曲线”如图 9.43 所示。

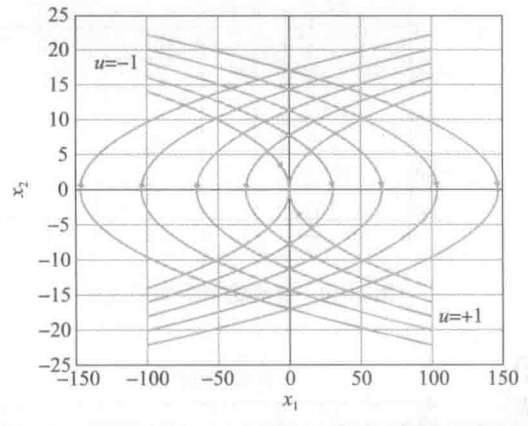


图 9.42　控制信号为±1 时的$1/s^2$控制对象的相平面图

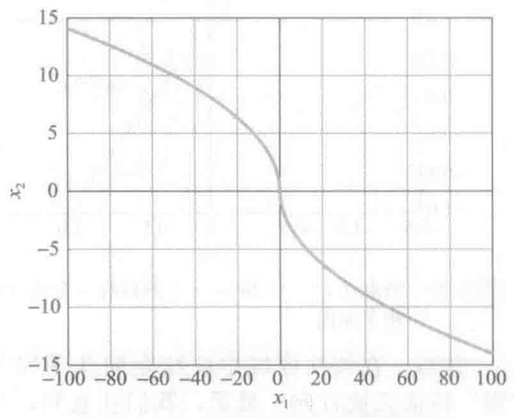


图 9.43　$1/s^2$控制对象的切换曲线

对于一个二阶系统，切换曲线可以通过对运动方程中的时间取倒数、设置零初始状态并应用最大化控制来得到。这一过程可通过最小化控制来排除曲线的其他分支重复进行。

对于曲线上方的任意初始状态，我们应用 $u=-1$；对于曲线下方的任意初始状态，我们应用 $u=+1$。如上所述，这个结果将是最小时间响应。注意，曲线在原点处垂直于轴；这就使得，在原点邻域里的操作会引起异常敏感的反应。沃尔克曼(Workman，1987)研究了一种改良的版本，称作近似时间最优系统，常被用在计算机磁盘驱动器行业。其中改良的地方包括使曲线稍许移动，把原来原点处无限大斜率替换为线性区域里的有限斜率。这一结果已被广泛地用于硬盘驱动器和类似的系统中，而且有时也称为“滑动模态”控制。

由 Simulink 得到的对一个时间最优的系统和一个近似时间最优系统的几种典型响应如图 9.44 到图 9.46 所示。注意，两个系统的响应时刻几乎完全一致，但是时间最优控制系统在切换曲线具有无穷大斜率的地方产生了剧烈的震颤，而近似时间最优系统的输出响应平稳地滑动到其终值。对于更精确的研究，我们需要转向研究非线性方程。

674~675

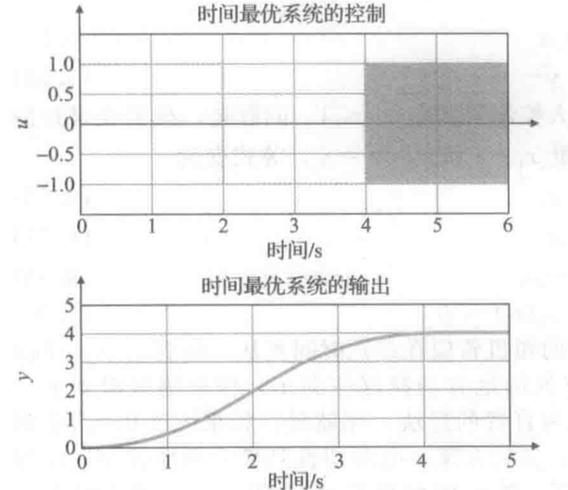
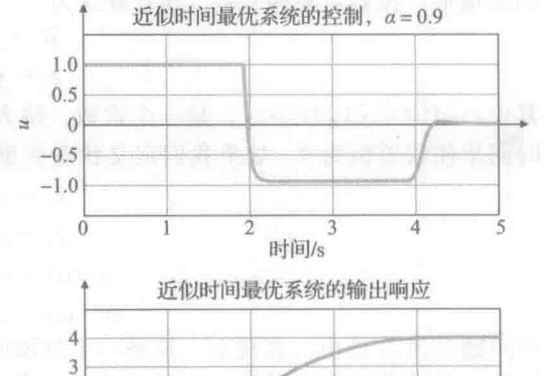


图 9.44　时间最优系统的响应



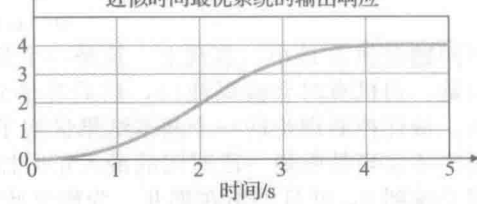


图 9.45　近似时间最优系统的响应

阶跃信号 饱和环节 积分环节1 积分环节 示波器

图 9.46 位置反馈系统的 Simulink 框图

676

9.5.2 李雅普诺夫稳定性分析

李雅普诺夫研究的运动稳定性涉及的复杂数学知识超出了本书范围。在此，我们提出一些体现该理论特点的探索性议题，并给出几个最基本的结论。李雅普诺夫提出了两种方法来研究由常微分方程描述的运动系统的稳定性问题。他的间接法或第一方法是基于方程的线性化，对非线性系统的稳定性的结论也是通过考虑近似线性化的系统的稳定性来得到的。他的直接法或第二方法直接考虑了非线性方程，通过第二方法他证明了第一方法的结论。间接法的讨论便于我们介绍这两种方法。这一问题需要一个适合矢量矩阵方程的新的稳定性定义。直观上看，如果从一定范围内出发的初始状态，总是停留在一定范围的扇形区域里，我们就说这个系统是稳定的。为了数学化地表述，首先给“范围”下个定义。为此，我们用$\|\boldsymbol{x}\|$表示矢量的范数。在众多可能的定义中，我们选择熟悉的欧几里得(Euclidean)测度，并定义矢量的平方为

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

由此，我们使用的稳定性定义就是：如果任意给定一个半径为ε的球域，总可以找到一个更小的半径为δ的球域，使得如果初始状态在δ球域，那么所有解将一直处在ε球域里。严格的叙述如下：如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总可以找到$\delta>0$，使得$\|\boldsymbol{x}(0)\|<\delta$时，对于任意的时刻$t$，总有$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon$成立，那么系统是稳定的。如果状态不仅稳定，并且在极限意义下当$t\to+\infty$时，$\|\boldsymbol{x}(t)\|\to 0$，那么就说系统是渐近稳定的。如果对任意的$\varepsilon$，都可能选择任意大的$\delta$，那么就说系统是大范围稳定的。

为研究这些问题，首先来看如下时不变常微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{9.57}$$

其线性化近似为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{9.58}$$

在这个方程中，假定所有线性项都包含在$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$中、高阶项都在$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$中，高阶的含义是当$\boldsymbol{x}$变小时，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$变小得更快，如下式所示：

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=0 \tag{9.59}$$

首先从直观上认识一下李雅普诺夫第二方法。任一时刻存储在系统中的总能量作为一个物理系统状态大小的一个度量，当存储的能量不再变化，系统必定静止不动。以一个电路系统为例，电能正比于电容器的电压的平方，而磁能正比于电感电流的平方。李雅普诺夫抽象出其本质，进而定义了一个状态的标量函数$V(\boldsymbol{x})$，称为李雅普诺夫函数，它具有如下性质：

(1) $V(\mathbf{0})=0$；

(2) $V(\boldsymbol{x})>0$，$\|\boldsymbol{x}\|\neq 0$；

677

(3) $V(\boldsymbol{x})$连续且关于x的各分量有连续的导数；

(4)沿着系统方程的轨迹有$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=\dfrac{\partial V}{\partial x}f(\boldsymbol{x})\leqslant 0$。

前三个条件，确保在原点的一个邻域里，李雅普诺夫函数像是一个光滑的碗放在状态

空间的原点上。而第四个条件明显依赖于运动方程，这保证了，如果选择的 δ 使得初始状态在碗中低于由 ξ 定义的球域的任意部分，那么在碗上曲线就不会比它最初的位置高，所以就会停留在 ϵ 定义的域里，从而系统就稳定了。另外，如果条件(4)被加强为 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$，那么函数值必将衰减到0，又由条件(1)可知，系统状态也会走向零点。由此，作为李雅普诺夫第二方法基础的稳定性定理表述如下：

对于一个系统，如果能找到一个李雅普诺夫函数，那么系统的运动是稳定的；而且，如果 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$，那么系统运动是渐近稳定的。第二方法就是寻找一个李雅普诺夫函数。

应用此理论的困难是“如果能找到一个李雅普诺夫函数”这一条件。现在提供的寻找李雅普诺夫函数的方法只针对线性的情况；在其他情况下，这一理论只是给工程师寻找一个这样的函数提供了“许可证”。现在使用间接方法来研究方程式(9.58)的稳定性。

也许是因为在简单系统中能量是各变量的平方和，对此问题，李雅普诺夫选择了一个二次函数 $V(\boldsymbol{x})$。假设可以找到一个对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，而李雅普诺夫函数可定义为 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$。很明显，这个函数满足前三个条件。我们必须验证第四个条件才能说明这一函数确实是李雅普诺夫函数。计算过程如下：

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \tag{9.60}$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{9.61}$$

$$=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \tag{9.62}$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \tag{9.63}$$

由此得到一个基本的矩阵结果，就是著名的李雅普诺夫方程：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q} \tag{9.64}$$

他证明了如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个稳定矩阵，即 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都在左半平面，那么对任意正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，上述方程的解 $\boldsymbol{P}$ 也是正定的。接下来的问题就是选择 $\boldsymbol{Q}$ 和解出 $\boldsymbol{P}$。那么，如果 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都在左半平面，则 $\boldsymbol{P}$ 将是正定的，所以 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个可能的李雅普诺夫函数，并且

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{g} \tag{9.65}$$

这个论证的最后一部分指出：由式(9.59)可知，如果 $\boldsymbol{x}$ 足够小，那么式(9.65)的第一项将占主导地位，第四个条件得以满足，于是 $V(\boldsymbol{x})$ 是一个李雅普诺夫函数，这就证明了系统是稳定的。注意 $\boldsymbol{x}$ 足够小的要求只保证了在原点的一个邻域内系统是稳定的。想要证明随着 $\|\boldsymbol{x}\|$ 趋于 $+\infty$(先前不要求此条件)，由 $V(\boldsymbol{x})$ 定义的“碗”朝着各个方向趋于 $+\infty$，以至于对于任意状态，稳定性均成立且是大范围稳定的，还需要更多条件。

678

还有一个不稳定性定理：如果 $\boldsymbol{A}$ 的任意一个特征值在右半平面，那么原点将是不稳定的。如果 $\boldsymbol{A}$ 除了几个极点在虚轴上，其余全在左半平面，那么系统的稳定性依赖于 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 非线性项的性质。有了这些结论，李雅普诺夫第一法或间接法可描述如下：

(1) 找到线性近似，计算出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

(2) 如果所有特征值在左半平面，那么存在一个原点邻域的稳定区域。

(3) 如果至少有一个特征值在右半平面，那么原点将是不稳定的。

(4) 如果有几个特征值在虚轴上，其余全在左半平面，那么基于此方法不能得到任何关于稳定性的结论。

例 9.15　二阶系统的李雅普诺夫稳定性

用李雅普诺夫方法找到如下状态矩阵描述的二阶线性系统的稳定性条件：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha\end{bmatrix}$$

解答。对于线性情况，我们可以选取任意正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，最简单的是 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$。对应的李雅普诺夫方程为

$$\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.66}$$

将式(9.66)乘开并且令各对应元素相等，我们得到

$$-\alpha p-\beta q-\alpha p-\beta q=-1 \tag{9.67}$$

$$-\alpha q-\beta r+\beta p-\alpha q=0 \tag{9.68}$$

$$\beta q-\alpha r+\beta q-\alpha r=-1 \tag{9.69}$$

从式(9.67)到式(9.69)解出 $p=r=\frac{1}{2\alpha}$，$q=0$，于是，有

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} \end{bmatrix}$$

其各阶行列式为$\frac{1}{2\alpha}>0$和$\frac{1}{4\alpha^2}>0$，因此$\boldsymbol{P}>0$。所以我们得出结论：如果$\alpha>0$，则系统就是稳定的。◀

679

对于具有很多状态变量和非数值参数的系统，李雅普诺夫方程的求解会很烦琐，但是，对于计算带有字母参数的系统的稳定性条件而言，这一结果是对劳斯方法的一种等效替代。

例 9.16 位置反馈系统的李雅普诺夫直接方法

考虑如图 9.38 所示的位置反馈系统模型，说明直接法在非线性系统上的应用。用 Simulink 仿真系统，并假设 $T=1$，估计系统的阶跃响应。

解答。我们假设在此情况下执行器只是一个放大器，但它具有重要的非线性，在图中表示为一个饱和器，但也可能更为复杂。假设 $u=f(e)$ 这个函数只在第一象限和第三象限使得 $\int_0^e f(e)\mathrm{d}e>0$。还假设 $f(e)=0$，可推出 $e=0$。我们还假设 $T>0$，所以系统是开环稳定的。运动方程为

$$\dot{e}=-x_2 \tag{9.70a}$$

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{T}x_2+\frac{f(e)}{T} \tag{9.70b}$$

为了获得李雅普诺夫函数，考虑类似动能加势能的函数：

$$V=\frac{T}{2}x_2^2+\int_0^e f(\sigma)\mathrm{d}\sigma \tag{9.71}$$

很明显，如果 $x_2=e=0$，那么 $V=0$，且由于对 f 的假设，如果 $x_2^2+e^2\neq 0$，那么 $V>0$。为检验等式(9.71)中的 V 是否为李雅普诺夫函数，我们计算$\dot{V}$，有

$$\begin{aligned}\dot{V}&=Tx_2\dot{x}_2+f(e)\dot{e}\\&=Tx_2\left[-\frac{1}{T}x_2+\frac{f(e)}{T}\right]+f(e)(-x_2)\\&=-x_2^2\end{aligned}$$

因此 $\dot{V}\leqslant 0$，原点是李雅普诺夫稳定的。另外，如果 $x_2\neq 0$，$\dot{V}$总是下降的，并且式(9.70b)说明：除了 $x_2=0$，系统没有使得 $x_2\equiv 0$ 的轨迹。因此，我们得出结论：对于每一个满足如下两个条件的 f，相应的系统都是渐近稳定的：(1) $\int f\mathrm{d}\sigma>0$、(2) $f(e)=0$ 意味着 $e=0$。$T=1$ 时的系统的 Simulink 图如图 9.46 所示。系统的阶跃响应如图 9.46 所示。系统的阶跃响应如图 9.47 所示。◀

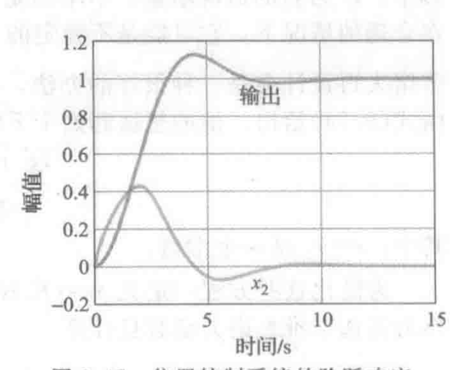


图 9.47 位置控制系统的阶跃响应

正如前面提到的，非线性系统的稳定性的研究很广泛，因此，我们只在这里提到一些要点和方法。更多研究资料可以参见 LaSalle and Lefschetz(1961)，Kalman and Bertram(1960)，Vidyasagar(1993)，Khalil(2002)，以及 Sastry(1999)。

自适应控制的李雅普诺夫再设计

李雅普诺夫稳定性理论在控制领域的经典应用之一就是著名的李雅普诺夫再设计技术。其思想是构造一个带有一些待定的关键控制参数的系统，提出备选李雅普诺夫函数，然后选择可选的部分使得备选函数成为真正的李雅普诺夫函数，由此得出稳定性结论。此方法在一篇帕克斯(Parks)(1966 年)早期的论文中被应用在一个模型参考自适应系统中。首先考虑一个简单系统其框图如图 9.48所示。

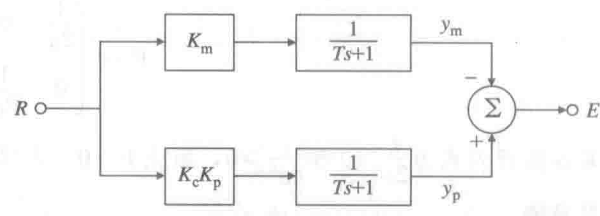


图 9.48 一个简单的模型参考自适应控制系统框图

在这个系统中，模型和被控对象具有相同的动态，但有不同的增益。控制目标是调整控制增益 K_c，使得 $K_cK_p=K_m$，并且系统输出 y_p 将等于模型输出 y_m。一种具有启发性的称之为 MIT 的规则正是基于如下思想提出的，如果我们定义成本为瞬时误差的平方，修改 K_c 使得成本更小，这样就会得到 K_c 的合适的值。如果耗能的梯度为正(也就是说成本上升)，增益应当减小；而如果梯度为负，增益应当增加。因而，增益的时间导数应该正比于梯度的相反数。方程形式为

$$J=\mathrm{e}^2 \tag{9.72}$$

680 ~ 681

$$\frac{\partial J}{\partial K_c}=2e\frac{\partial e}{\partial K_c} \tag{9.73}$$

$$\frac{\mathrm{d}K_c}{\mathrm{d}t}=-Be\frac{\partial e}{\partial K_c} \tag{9.74}$$

其中 B 为待选“自适应增益”。从系统框图得到：

$$E(s)=\frac{K_cK_p-K_m}{Ts+1}R(s) \tag{9.75}$$

$$\frac{\partial E}{\partial K_c}=\frac{K_p}{Ts+1}R \tag{9.76}$$

$$=\frac{K_p}{K_m}Y_m \tag{9.77}$$

如果我们把式(9.77)的结果代入式(9.74)，就得到了 MIT 规则：

$$\frac{\mathrm{d}K_c}{\mathrm{d}t}=-B'eY_m \tag{9.78}$$

其中：B'为新的适应增益。不幸的是，这条规则的稳定性没有建立，并且一些分析表明，在合理的情况下，它可能是不稳定的，例如，如果有未建模动态或扰动。帕克斯提出李雅普诺夫再设计会是一种很好的办法。他还提出，$\dot{K}_c$ 的选择方式应该保证稳定性，而不是由式(9.74)给出。他的想法起始于下面的微分方程：

$$T\dot{e}+e=(K_cK_p-K_m)r_o \tag{9.79}$$

$$\dot{K}_c=-B'eY_m \tag{9.80}$$

其中：$r=r_o$ 是一个常值。

为简化这些方程，定义 $x=(K_cK_p-K_m)$，而且 $\dot{x}$ 将被得出。帕克斯选择 $V=e^2+\lambda x^2$ 作为备选李雅普诺夫函数且计算

$$\dot{V}=2e\dot{e}+2\lambda x\dot{x} \tag{9.81}$$

$$= 2e(\frac{xr_o}{T} - \frac{e}{T}) + 2\lambda x\dot{x} \tag{9.82}$$

如果在最后的方程中 $\dot{x}$ 被选为 $\dot{x} = -\frac{er_o}{\lambda T}$，那么 $\dot{V} = -2\frac{e^2}{T}$，李雅普诺夫函数的条件都满足，给定的假设也就保证了系统的稳定性。反向推回去，我们发现新的算法为

$$\dot{K}_c = -B''er_o \tag{9.83}$$

显然，这一结果并不能解答未建模动态和干扰的问题，但其原理是明确的：将关键控制方程作为待定方程，以便获得李雅普诺夫函数，这样系统的稳定性具有坚实的基础。

作为李雅普诺夫再设计的第二个例子，考虑图 9.49 所示电机的自适应控制。定义模型输出为 y_m，系统输出为 y_p，方程为

$$\ddot{y}_m + 2\zeta\omega_n\dot{y}_m + \omega_n^2 y_m = \omega_n^2 r \tag{9.84}$$

$$\ddot{y}_p + 2\zeta\omega_n\dot{y}_p + \omega^2 y_p = K_c K_p \omega_n^2 (r - y_p) + \omega_n^2 y_p \tag{9.85}$$

682

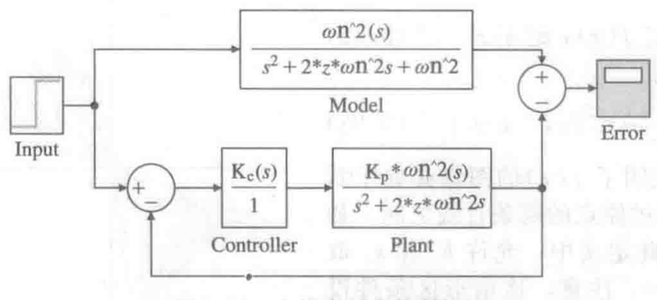


图 9.49 电机自适应控制框图

（在这个关于 y_p 的方程中，两端同时加上了 $\omega_n^2 y_p$ 项，这样使得误差方程更加简单。）

定义误差为 $e = y_m - y_p$，误差方程可通过 y_m 的方程减去 y_p 的方程得到，结果为

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 ye = \omega_n^2(1 - K_c K_p)(r - y_p) \tag{9.86}$$

现在的想法是找到 K_c 的方程，以便为误差方程找到李雅普诺夫函数。为简化计算，我们定义参数为 $x = 1 - K_c K_p$，则 $\dot{x} = -K_p \dot{K}_c$，根据该式，误差方程变为

$$\ddot{e}_p + 2\zeta\omega_n\dot{e} + \omega_n^2 e = \omega_n^2 x(r - y_p) \tag{9.87}$$

在此提出 $V = e^2 + a\dot{e}^2 + \beta x^2$ 作为可能的函数。我们需要求 $\dot{x}$，使得 V 成为李雅普诺夫函数。微分方程为

$$\dot{V} = 2e\dot{e} + 2\alpha\dot{e}\ddot{e} + 2\beta x\dot{x} \tag{9.88}$$

$$= 2e\dot{e} + 2\alpha\dot{e}\{-2\zeta\omega_n\dot{e} - \omega_n^2 e + \omega_n^2 x(r - y_p)\} + 2\beta x\dot{x} \tag{9.89}$$

$$= -4\alpha\zeta\omega_n\dot{e}^2 + 2e\dot{e}(1 - \alpha\omega_n^2) + x\{2\alpha\dot{e}\omega_n^2(r - y_p) + 2\beta\dot{x}\} \tag{9.90}$$

如果令 $1 - \alpha\omega_n^2 = 0$，且 $2\alpha\dot{e}\omega_n^2(r - y_p) + 2\beta\dot{x} = 0$，那么$\dot{V}$的方程简化为 $\dot{V} = -4\alpha\zeta\omega_n\dot{e}^2$，这样$V$总是负定的，于是 V 是李雅普诺夫函数，从而系统是稳定的。替换 x，我们得到自适应控制律

$$\dot{K}_c = -\beta'\dot{e}(r - y_p) \tag{9.91}$$

其中：β'是等于$\frac{\alpha\omega_n^2}{K_p\beta}$的新常数。

显然，我们仅涉及了李雅普诺夫稳定性理论，尽管再设计的例子很古老，甚至可以追溯到 1966 年，但是它们很好地说明了这一原理，并为进一步研究这一重要领域提供了良好开端。

9.5.3 圆判据

一个只带有一个单输入单输出的非线性项的非线性系统表示为如图 9.50 所示的结构，其中，非线性项的输入和输出点绘在框图中。苏联科学家们首先研究了它，以后这个问题

683

在文献中一直被称为 Lur'e 问题。

我们假定系统是非受迫的，那么 $r\equiv 0$。这样可以导出此类系统的用图形表述的稳定性充分条件。虽然此方法实用，但在某些情况下，这可能会导出保守的结果，尽管也具有较少保守性的若干扩展(参见萨弗诺夫（Safonov）和韦兹纳（Wyetzner），1987)。首先，我们定义无记忆非线性项的扇形区条件。

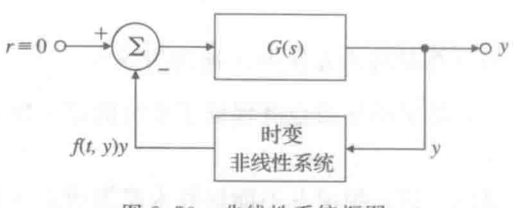


图 9.50　非线性系统框图

扇形区条件

具有标量输入和标量输出的函数 $f(x)$ 属于扇形区 $[k_1, k_2]$，如果对于所有的输入 x，下式成立：

$$k_1 x^2 \leqslant f(x)x \leqslant k_2 x^2 \tag{9.92}$$

此关系式可改写为

$$k_1 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant k_2, \quad x \neq 0 \tag{9.93}$$

大体上，此定义表明了 $f(x)$ 的图像必处于斜率为 k_1 和 k_2 且穿过原点的两条直线之间，如图 9.51 所示。在此定义中，允许 k_1 和 k_2 取值为 $-\infty$ 或者 $+\infty$。注意，该扇形区条件没有对增量增益或函数 $f(x)$ 的斜率做任何限制。接下来的例子解释了如何确定 k_1 和 k_2。

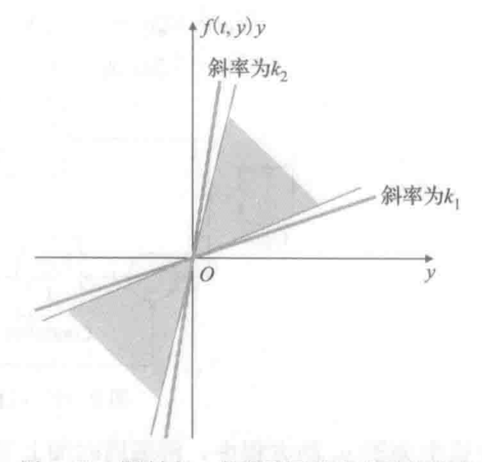


图 9.51　限制在一定扇形区的非线性的输出

例 9.17　符号非线性扇形区的计算

符号函数 $y=f(u)$ 如图 9.6b 所示，确定包含此函数的扇形区。

解答。既然 $\mathrm{sgn}(0)=0$，可知限定符号函数上界且穿过原点的唯一直线是 y 轴。对应的斜率是 $k_2=+\infty$。相似地，确定符号函数下界且穿过原点的唯一的直线的斜率是 0，对应直线为 x 轴，因此 $k_1=0$。所以符号函数的扇形区域是 $[0, +\infty]$。◀

例 9.18　饱和非线性扇形区

考虑如图 9.52 所示的饱和非线性函数，确定此函数的扇形区。

解答。此函数上方由一条斜率为 1 的直线界定，所以 $k_2=1$；且由 x 轴界定下方，则 $k_1=0$，如图所示。因此，函数的扇形区为 $[0, 1]$。

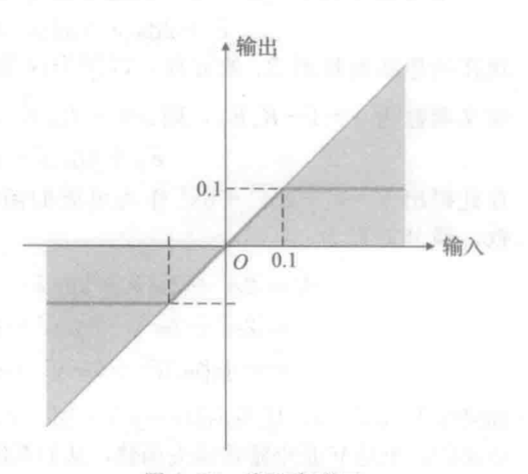


图 9.52　饱和扇形区

◀

圆判据

1949 年，苏联科学家艾泽尔曼(Aizermann)猜想：如果由任意介于 $k_1<k<k_2$ 的线性增益替代 f，则 Lur'e 系统是稳定的，那么此增益被一个位于扇形区 $[k_1, k_2]$ 的非线性增益替代后，系统仍将是稳定的。这意味着，如果一个如图 9.50 所示的具有线性前向通路 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ 的单环(严格正则)连续时间反馈系统，对任意 $k_1<k<k_2$ 的固定线性反馈增益都是稳定的，即可使得所得的闭环系统矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{BC}$ 稳定，那么如图 9.50 所示的这个带

684
～
685

有无记忆非线性时变反馈项的非线性系统也是稳定的，其中反馈项处于扇形区$[k_1, k_2]$中。不幸的是，因为有反例存在[1]，这种猜想是不正确的。然而，艾泽尔曼猜想的一种变体是正确的就是圆判据。

对圆判据我们不给出严格的证明，只描述一个有助于深入了解此问题和如何进行证明的启发性结论。一个带有线性阻抗$Z(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)$的电路，被欧姆(Ohm)定律描述为$V=IZ(s)$。假定$Z$由真实元件构成，这就是说，实部$R$是偶性的，虚部$X$是奇性的；也就是$R(-\omega)=R(\omega)$以及$X(-\omega)=-X(\omega)$。如果对于所有的$\omega$，有$R(\omega)\geqslant\delta>0$，此阻抗称为严格无源阻抗。它将消耗能量。进入电路的瞬时功率是$p=v(t)i(t)$，且电路吸收的全部能量为$e=\int_0^{+\infty}v(t)i(t)\mathrm{d}t$。参照图形，欧姆定律等同于系统方程$Y=UG(s)$，其中：$Y$为电压；$U$为电流；$G(s)=R+\mathrm{j}X$为阻抗。将这种对能量的表达应用到系统方程，并利用 Parseval[2]提出的定理，将此研究转到频域就得到

$$\int_0^{+\infty}y(t)u(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\mathrm{j}\omega)Y(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9.94}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\mathrm{j}\omega)U(-\mathrm{j}\omega)G(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9.95}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|U(\mathrm{j}\omega)|^2(R-\mathrm{j}X)\mathrm{d}\omega \tag{9.96}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|U(\mathrm{j}\omega)|^2R(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{9.97}$$

最后一步，用到了X是奇性的这一条件。在此，使用一些常规记号将大大简化方程。我们定义内积和范数为：

$$\int_0^{+\infty}y(t)u(t)\mathrm{d}t=\langle y,u\rangle \tag{9.98}$$

$$\|u\|^2=\int_0^{+\infty}[u(t)]^2\mathrm{d}t=\langle u,u\rangle \tag{9.99}$$

用这样的记法，以及$R\geqslant\delta>0$的假设，式(9.97)可简化为

$$\langle y,u\rangle\geqslant\delta\|u\|^2 \tag{9.100}$$

686

现在转向非线性部分，使用相同的“能量”概念，并假设f在扇形区$[0, K]$中，可得

$$\int_0^{\infty}y(t)f(y,t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{[f(y,t)]^2}{f(y,t)/y(t)}\mathrm{d}t \tag{9.101}$$

$$\geqslant\frac{\|f(y,t)\|^2}{K} \tag{9.102}$$

$$\geqslant\frac{\|u(t)\|^2}{K} \tag{9.103}$$

假设由式(9.100)和式(9.102)的和所供给的全部能量是正的，那么由于能量稳步衰减，系统必然是稳定的。损失能量的实际值将等于存储在系统中元件的初始能量。由此我们可得出：如果$\delta\|u\|^2+\frac{\|u(t)\|^2}{K}>0$，那么系统是稳定的。因此，判据为：

$$\delta\|u\|^2+\frac{\|u(t)\|^2}{K}>0 \tag{9.104}$$

$$\left[\mathrm{Re}\{G(\mathrm{j}\omega)\}+\frac{1}{K}\right]\|u(t)\|^2>0 \tag{9.105}$$

$$\mathrm{Re}\{KG(\mathrm{j}\omega)+1\}>0 \tag{9.106}$$

---

[1] Aizermann 的猜想激发了此领域的很多研究，并促进了 Kalman-Yakubovich-Popov 引理的发展，Kalman-Yakubovich-Popov 引理给出了无源系统的状态空间条件。此引理可用在圆判据的证明中。

[2] 参见附录 A。

在推导式(9.106)时，假设非线性项位于一个零扇形区域$[0, K]$。如果函数实际位于扇形区$[k_1, k_2]$，可通过在框图中加或减k_1，使之移动到零扇形区域，框图如图9.53所示。则相应地，动态系统由$H=\dfrac{G}{1+k_1G}$替代，函数由$f'=f-k_1$替代，其中：f'位于$[k_2-k_1, 0]$。在这些改变之下，稳定性判据变为

$$\operatorname{Re}\left\{1+(k_2-k_1)\frac{G}{1+k_1G}\right\}>0 \tag{9.107}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1+k_1G+(k_2-k_1)G}{1+k_1G}\right\}>0 \tag{9.108}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1+k_2G(\mathrm{j}\omega)}{1+k_1G(\mathrm{j}\omega)}\right\}>0 \tag{9.109}$$

事实上，一个形如式(9.109)，$F=\left\{\dfrac{1+k_2G(\mathrm{j}\omega)}{1+k_1G(\mathrm{j}\omega)}\right\}$所描述的双线性函数会将$F$平面中的一个圆映射成$G$平面的另一个圆(参见附录WD，www.fpe7e.com)。在这种情况下，可接受的扇形区是$\operatorname{Re}\{F\}>0$，其边界是虚轴。所以将虚轴，即认为是半径为无穷大的圆映射到某个有限圆上。因为函数是实函数，圆必定以实轴上的点为圆心，而我们只需要确定实轴上的两个点。例如，当$F=0$时，我们有$1+k_2G=0$或$G=-\dfrac{1}{k_2}$。当函数值无限时，实轴上的另一个点使得$1+k_1G=0$或$G=-1/k_1$。这样G平面上的圆以实轴上的点为圆心，且经过点$\left[-\dfrac{1}{k_2}, -\dfrac{1}{k_1}\right]$，如图9.54所示。既然$F$不得进入左半平面，如果令$F=-1$而去求解，这时$F$处于被禁止区域，我们发现$G=\dfrac{-2}{k_1+k_2}$处于圆内，由此得出结论：如果$G(\mathrm{j}\omega)$的图像全在圆外，那么系统是稳定的。

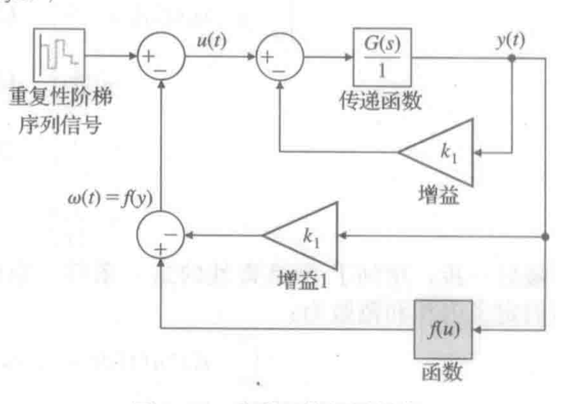


图9.53 扇形区的框图操作

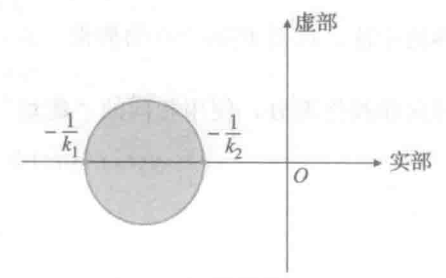


图9.54 圆判据的说明

实际定理如下：

所描述的非线性系统是渐近稳定的，如果：

(1) $f(t, y)$在扇形区$[k_1, k_2]$上，且$0\leqslant k_1<k_2$。

(2) 传递函数$G(\mathrm{j}\omega)=\boldsymbol{C}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$的奈奎斯特图不与临界圆相交，且不包围临界圆，其中临界圆就是以实轴上的点为圆心，且经过$-1/k_1$和$-1/k_2$两点的圆，如图9.54所示。

实际上，奈奎斯特图中通常的“-1”点都被临界圆所替代。这一结果称为圆判据或圆定理，且这一结果来自桑德伯格(Sandberg)(1964)和赞默斯(Zames)(1966)。注意，这些条件都是充分而非必要的，因为传递函数的图像与临界圆相交并不能证明不稳定。临界圆的圆心位于

687 ~ 688

$$c=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right]=-\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}$$

半径为

$$\frac{k_1 - k_2}{2k_1k_2}$$

如果 $k_1=0$，那么临界圆将退化为由 $\mathrm{Re}\{G\}\geqslant -1/k_2$ 定义的半平面。

圆判据与描述函数是相关的。实际上，对于一个位于扇形区且其描述函数是实函数的时不变奇非线性项的情况，描述函数满足

$$k_1 \leqslant K_{\mathrm{eq}}(a) \leqslant k_2,\text{对所有的 } a \tag{9.110}$$

从而，

$$-\frac{1}{k_1} \leqslant -\frac{1}{K_{\mathrm{eq}}(a)} \leqslant -\frac{1}{k_2} \tag{9.111}$$

且描述函数的负倒数的图像将位于临界圆内。这可以由如下的上界和下界看出。

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{eq}}(a) &= \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} f(a\sin(\omega t))\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \\ &\geqslant \frac{2k_1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) = k_1 \end{aligned} \tag{9.112}$$

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{eq}}(a) &= \frac{2}{\pi a}\int_0^{\pi} f(a\sin\omega t)\sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) \\ &\leqslant \frac{2k_2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) = k_2 \end{aligned} \tag{9.113}$$

等效增益分析法和描述函数法产生同样的结果。如果我们采取描述函数的增益分析法，则可以预测极限环的幅值。这两种等效的增益分析法均可以用于判定稳定性，但正如我们所看到的，圆判据可用于时变非线性系统。

例 9.19　利用圆判据判定稳定性

考虑例 9.17 所示的系统。用圆判据判定系统的稳定性。

解答。相应的扇形区与例 9.18 中确定的是一样的。临界圆退化为由 $\mathrm{Re}(G)\leqslant -1$ 确定的半平面，如图 9.55 所示。由于奈奎斯特图完全落在临界圆的右侧，所以系统是稳定的。◀

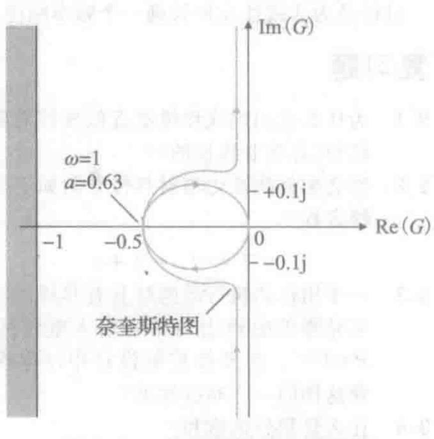


图 9.55　奈奎斯特图和圆判据

9.6　历史回顾

几乎所有的物理动态系统都是非线性的；因此对非线性系统的研究有着悠久而丰富的历史并不奇怪。对非线性系统的研究可以追溯到天文学，以及托里拆利（Torricelli，1608—1647 年）、拉普拉斯、拉格朗日（Lagrange）对太阳系的稳定性研究。1892 年，俄罗斯的李雅普诺夫在他的博士论文中提出了“能量”这一概念。他试图解决由庞加莱（Poincaré）提出的旋转流体机构的稳定性，并认识到，如果他能证明该系统存储的能量一直下降，则系统会稳定，最终静止。李雅普诺夫函数的研究在 1960 年由卡尔曼和伯特伦（Bertram）引入控制领域，并从此迅速发展。

麦克斯韦是第一个用平衡点附近线性化方法通过对瓦特的飞球调速器的线性模型的推导来研究稳定性的，并提出如果特征根都具有负实部，则该系统将是稳定的。科谢伯格尔（Kochenburger）在尝试解决非线性项时，基于频率响应的想法于 1950 年得出了描述函数法。Lur'e 在 1944 年提出了绝对稳定性问题。1961 年，波波夫（Popov）建立了用于非线性稳定性分析的圆判据。雅库波夫维奇（Yakubovich，1962）和卡尔曼（1963）之后确立了 Lur'e 和波波夫的结果之间的关系。

20 世纪 60～80 年代的三十年间，自适应控制的研究得到了广泛的关注。自适应控制

器一般既是时变的也是非线性的。20 世纪 60 年代，德雷珀(Draper)和其他研究人员为自适应调节建立了敏感度方法和 MIT 规则。基于李雅普诺夫的方法和无源性，研究自适应系统的方法在 20 世纪 70 年代被提出。在 20 世纪 80 年代，鲁棒自适应控制方法得到了研究。此外，还有大量对系统的研究，如天气系统，其初始条件或参数的微小变化可导致该系统的响应急剧变化，这样的系统被认为是混沌的。在最近非线性系统的所有研究中，功能强大的计算机在求解方程和绘制结果方面起到了至关重要的作用。建立非线性控制的一般理论一直是控制理论专家的一个梦想，是一个持续不懈的追求过程。

689 ~ 690

小结

- 通过考虑平衡点附近准确的小信号线性模型，动态的非线性方程组可以用线性的方程组来近似。
- 在许多情况下，非线性的逆可用于将一个系统线性化。
- 无动态的非线性，如饱和，可以将其看作是一个可变增益，并使用根轨迹法进行分析。
- 根轨迹法可以用来确定无记忆非线性的极限环特性，并产生与描述函数相同的结果。
- 本质上，描述函数法是一种启发式的方法，其目标是为非线性元件找到一个频率响应函数。
- 具有单一非线性的系统稳定性，可以用描述函数法进行研究。
- 描述函数可以在反馈系统中用来预测周期解。
- 奈奎斯特图和描述函数一起可用于确定极限环特性。
- 相平面法通过绘出状态变量的轨迹考虑时间响应，并呈现非线性行为。
- 状态空间描述的非线性系统，可以通过李雅普诺夫方法进行研究其稳定性。
- 圆判据为判定稳定性提供了一个充分条件。

复习题

9.1 为什么我们用线性模型近似被控对象的物理模型(总是非线性的)？

9.2 你会如何线性化辐射热传导的如下非线性系统方程？

$$\dot{T} = T^4 + T + u$$

9.3 一个用作热执行器的灯具有非线性项，使得实验测得的输出功率与输入电压的关系为 $P=V^{1.6}$。在反馈控制设计中，你将如何处理这样的一个非线性项？

9.4 什么是积分抗饱和？

9.5 为什么抗饱和电路很重要？

9.6 用增益为 1、上下限为±1 的非线性饱和函数，绘出增益为 7、上下限为±20 的执行器饱和的框图。

9.7 什么是描述函数，它与传递函数有何关系？

9.8 使用描述函数的假设条件是什么？

9.9 什么是非线性系统极限环？

9.10 怎样在实验中确定非线性系统的描述函数？

9.11 有界控制下，卫星姿态控制的最小时间控制策略是什么？

9.12 如何使用两种李雅普诺夫方法？

习题

9.2 节习题

9.1 如图 9.56 所示单摆系统，其中细绳缠绕在一个固定的圆柱体上。该系统动态由如下微分方程来描述。

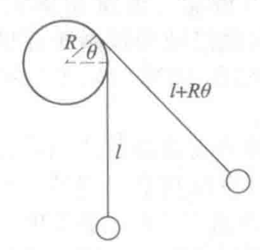


图 9.56 缠绕在固定的圆柱体上的细绳的动态

$$(l + R\theta)\ddot{\theta} + g\sin\theta + R\dot{\theta}^2 = 0$$

其中：l 为细绳在垂直于圆柱体(上下)的位置的长度；R 为圆柱体的半径。

(a) 写出此系统的状态变量方程

(b) 在点 $\theta=0$ 附近将方程线性化，并证明当 θ 的值很小时，原系统微分方程可简化为一个简单单摆，也就是

$$\ddot{\theta} + (g/l) = 0$$

9.2 图 9.57 所示的电路有一个非线性电导 G 使得 $i_G=g(v_G)=v_G(v_G-4)(v_G-1)$，状态微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -i + v$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -i + g(u-v)$$

其中：i，v 是状态变量，u 是输入。

(a) 当 $u=1$ 时，$i_1=0$，$v_1=0$，则产生一个平衡状态。找到另外两对 i 和 v 使系统平衡。

(b) 当平衡点在 $u=1$，$i_1=0$，$v_1=0$ 时，找到系统的线性化模型。

(c) 找到另外两种平衡态时，系统的线性化模型。

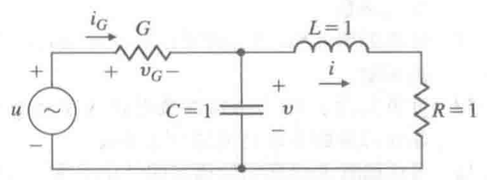


图 9.57 题 9.2 的非线性电路图

9.3 考虑图 9.58 所示的电路图，u_1、u_2 分别是电压源和电流源，R_1 和 R_2 是非线性电阻，且具有如下性质。

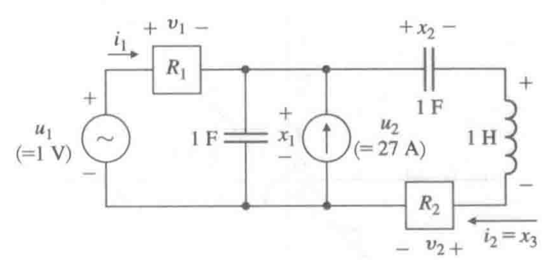


图 9.58 一个非线性电路

电阻 1：

$$i_1 = G(v_1) = v_1^3$$

电阻 2：

$$v_2 = r(i_2)$$

这里的函数 r 定义如图 9.59 所示。

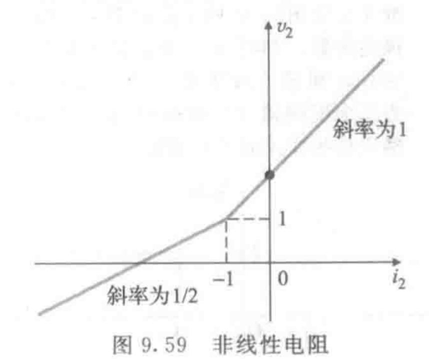


图 9.59 非线性电阻

(a) 证明电路的方程式可以被改写为

$$\dot{x}_1 = G(u_1 - x_1) + u_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - r(x_3)$$

假设恒定电压源的电压为 1V，恒定电流源的电流为 27A(即，$u_1^0=1$，$u_2^0=27$)，找到此电路的平衡状态 $\boldsymbol{x}^0=[x_1^0 \quad x_2^0 \quad x_3^0]^{\mathrm{T}}$。对于一个特定输入 u^0，系统的平衡状态被定义为各分量满足 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=\dot{x}_3=0$ 的常数状态变量。因此，任意一个从平衡态出发的系统，将永远停留在平衡态，直到采用不同的输入信号。

(b) 由于干扰的存在，初始状态(电容，电压和电感电流)与平衡态略有不同，各独立项也是如此，也就是说，有

$$u(t) = u^0 + \delta u(t)$$

$$x(t_0) = x^0(t_0) + \delta x(t_0)$$

对此网络关于(a)问中的平衡点做小信号分析，方程式以如下方式写出：

$$\delta\dot{x}_1 = f_{11}\delta x_1 + f_{12}\delta x_2 + f_{13}\delta x_3 + g_1\delta u_1 + g_2\delta u_2$$

(c) 绘出对应线性化后的模型的电路图，给出各项的值。

9.4 考虑非线性系统

$$\dot{x} = -x^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \sin u, \quad x(0) = 1$$

(a) 假设 $u^0=0$，求解 $x^0(t)$

(b) 找出(a)问中提到的标称解的线性化模型。

9.5 对于反馈的线性化影响，我们已经看出，反馈能够减小与被控对象传递函数变化相关的输入-输出传递函数的敏感性，并降低作用于被控对象的扰动的影响。在下面的问题中，我们探索反馈另一个有用的属性：它可以使所述输入-输出响应比单独的被控对象的开环响应更加线性。为简单起见，让我们忽略被控对象的所有动态项，假定被控对象是由如下静态非线性描述：

$$y(t) = \begin{cases} u, & u \leqslant 1 \\ \dfrac{u+1}{2}, & u > 1 \end{cases}$$

(a) 假设使用比例反馈

$$u(t) = r(t) + \alpha(r(t) - y(t))$$

其中：$\alpha \geqslant 0$ 是反馈增益。为闭环系统找到 $y(t)$ 关于 $r(t)$ 的函数表达式(该函数称为系统的非线性特性)。绘出当 $\alpha=0$(实际是开环系统)、$\alpha=1$、$\alpha=2$ 时非线性传递特性的图。

(b) 假设使用积分控制

$$u(t) = r(t) + \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))\mathrm{d}\tau$$

因此闭环系统是非线性的，动态的。证明如果 $r(t)$ 是一个常数，比如说是 r，那么 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = r$。这样，积分控制使闭环系统的稳定状态传递特性是完全线性性。那么这时的闭环系统可以由 r 到 y 的传递函数来描述吗？

9.6 下面的问题说明线性化方法不总是好用的。考虑系统

$$\dot{x} = \alpha x^3, \quad x(0) \neq 0$$

(a) 找出平衡点并求解 $x(t)$。

(b) 假设 $\alpha=1$。线性化模型是对系统的一种有效表述吗？

(c) 假设 $\alpha=-1$。线性化的模型是对系统的一种有效表述吗？

9.7　考虑沿直线并以图 9.60 所示的恒定速率移动的对象。唯一可测的是对象的范围。系统方程式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ v\\ z\end{bmatrix}$$

其中：z 为常数；$\dot{x}=v_0$ 是常数；$r=\sqrt{x^2+z^2}$。推导该系统的线性模型。

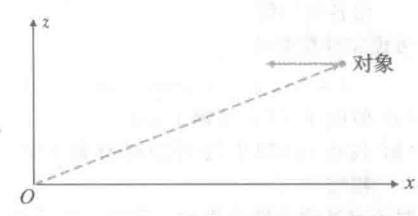


图 9.60　习题 9.7 中移动对象的图

9.3 节习题

9.8　考虑如图 9.61 所示的三阶系统。

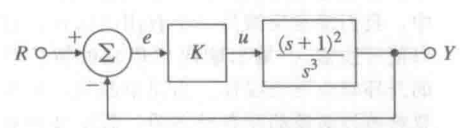


图 9.61　习题 9.8 的控制系统

(a) 绘制该系统关于 K 的根轨迹图，写出渐近线的角度、分离角的计算过程，等等。

(b) 利用绘图法，仔细确定该轨迹穿过虚轴的点。在该点 K 的值是多少？

(c) 假设，由于某些未知机理，放大器的输出由下面的饱和非线性函数给定(而不是比例增益 K)：

$$u = \begin{cases} e, & |e| \leqslant 1 \\ 1, & e > 1 \\ -1, & e < -1 \end{cases}$$

定性地描述你认为系统将对单位阶跃输入会有怎样的响应。

9.9　考虑具有如下传递函数的系统：

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

我们将使用如下形式的 PID 控制来控制系统。

$$D_c(s) = 10\left(1+\frac{1}{2s}+2s\right)$$

已知该系统的执行器是一个具有单位斜率的饱和非线性函数，且 $|u| \leqslant 10$。对于大小为 10 的阶跃输入，比较具有和不具有抗饱和电路的系统响应。用 Simulink 画出两者的阶跃响应和控制输入。定性地描述抗饱和电路的影响。

9.4 节习题

9.10　计算如图 9.6c 所示的死区非线性继电器的描述函数。

9.11　计算如图 9.6d 所示的死区非线性增益的描述函数。

9.12　计算如图 9.6e 所示预加载弹簧或库仑加上黏性摩擦的非线性项的描述函数。

9.13　考虑如图 9.62 所示阶梯状的量化函数。为此非线性函数找到描述函数，并写出 matlab.m 函数来生成它。

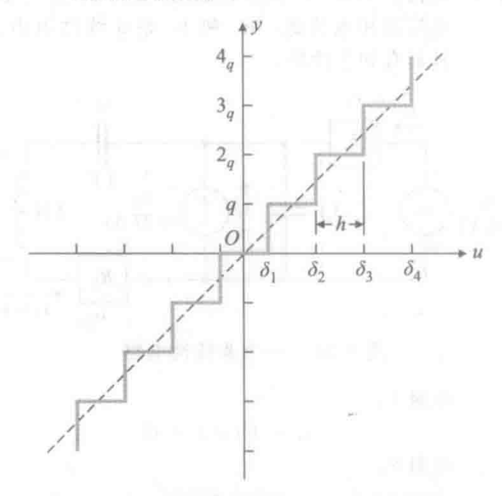


图 9.62　习题 9.13 的量化非线性函数

9.14　推导出如图 9.63 所示的理想触点控制器的描述函数。判断其是否依赖于频率？如果它有时间延迟或磁滞，是否会依赖频率？为几个不同幅度的输入绘制输出曲线，并确定那些输入的描述函数的值。

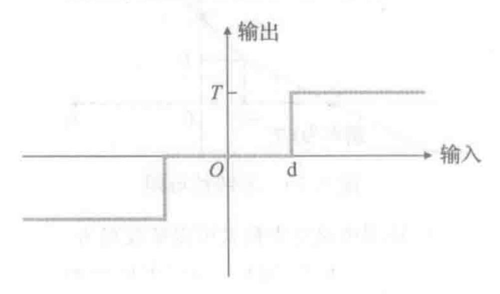


图 9.63　习题 9.14 的触点器图

9.15　惯性平台的触点控制器如图 9.64 所示，其中

$$I = 0.1\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\frac{I}{B} = 10\text{s}$$

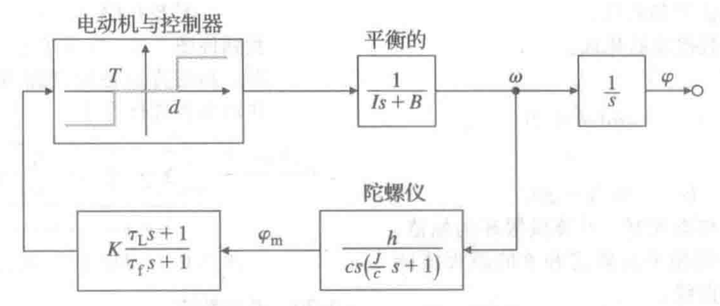


图 9.64 习题 9.15 系统框图

$$\frac{h}{c}=1$$
$$\frac{J}{c}=0.01\text{s}$$
$$\tau_L=0.1\text{s}$$
$$\tau_f=0.01\text{s}$$
$$d=10^{-5}\text{rad}$$
$$T=1\text{N}\cdot\text{m}$$

需要的稳定解大约是 10^{-6} rad：当 $\varphi_m>10^{-6}$ rad 时，有 $K\varphi_m>d$

判断极限环是否存在，若存在，则使用增益 K 和控制器的描述函数组成的函数来表示其幅值和频率。对带有磁滞的死区特性重复这些讨论。

9.16 非线性 J.C. 克莱格(Clegg)积分：多年来，已经有一些尝试想要完善线性积分器。线性积分器具有在所有频率处相位滞后的缺点。1958 年，克莱格提出修改线性积分器，使得每当对积分器的输入经过 0(就是说改变符号时)，就将状态重置到 0。该克莱格积分器具有这样的性质：当它的输入和输出具有相同符号时，它就像一个线性积分器。否则，重置输出为零。克莱格积分器可描述为

$$x(t)=e(t),\quad \text{如果 } e(t)\neq 0$$
$$x(t+)=0,\quad \text{如果 } e(t)=0$$

其中后一个方程式意味着积分器的状态 x 在 e 改变符号后立刻重置为 0. 它可用运算放大器和二极管来实现。克莱格积分的一个潜在缺点是它可能引起振荡。

(a) 如果输入是 $e=a\sin(\omega t)$，绘出克莱格积分器的输出。

(b) 证明克莱格积分器的 DF 是

$$N(a,\omega)=\frac{4}{\pi\omega}-\mathrm{j}\frac{1}{\omega}$$

且这只有 38°的相位滞后。

△ 9.5 节习题

9.17 计算并绘出最优的反转曲线与最小时间控制系统的最优控制，系统方程为

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_2+u$$
$$|u|\leqslant 1$$

使用逆时间方法并消除时间。

9.18 对 $|u|\leqslant 1$ 的最小时间线性控制系统

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-2x_1-3x_2+u$$

绘出最优的反转曲线。

9.19 对系统

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-x_1+u$$
$$|u|\leqslant 1$$

绘出时间最优控制律，并画出 $x_1(0)=3$，$x_2(0)=0$ 时的轨迹。

9.20 考虑如图 9.65 所示的热控制系统。物理系统可以是一个房间，炉子等等。

(a) 极限环周期是多少？

(b) 如果 T_r 是一个缓慢递增的函数，绘出系统的输出 T，写出 T_r“很大”时的解。

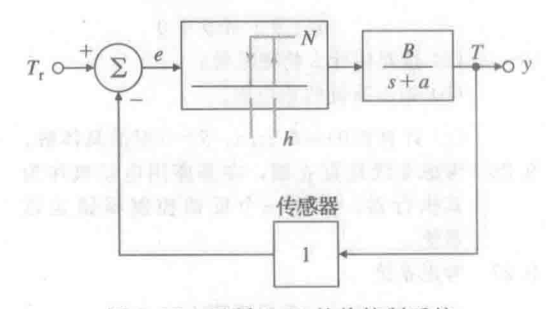


图 9.65 习题 9.20 的热控制系统

9.21 几个系统，如航天器，谐振频率远低于切换频率的弹簧系统，和由电机驱动的摩擦力非常小的大负载可被建模为一个惯性系统。对于一个理想的切换曲线，画出系统的相图。切换函数为 $e=\theta+\tau\omega$。假设 $\tau=10$s，控制信号频率为 10^{-3} rad/s². 绘出如下情况的结果。

(a) 死区。

(b) 带有磁滞的死区。

(c) 具有时滞 T 的死区。
(d) 带有常数扰动的死区。

9.22　用输入信号

$$u = -\operatorname{sgn}(\tau\dot{\theta} + \theta)$$

对带有延迟

$$I\ddot{\theta} = Nu(t - \Delta)$$

的卫星进行姿态控制，计算极限环的幅值。画出极限环的相平面轨迹和 θ 的最大值随时间的变化曲线。

9.23　考虑零摩擦质点单摆，如图 9.66 所示。以等值线方法为指导，画出其运动的相平面图像。特别要注意 $\theta=\pi$ 的附近。表明解对应的是摆锤一圈一圈地旋转，而不是来回振荡的。

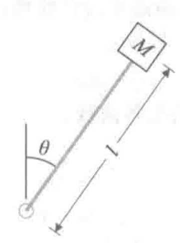


图 9.66　习题 9.23 中的摆

9.24　画出系统

$$\ddot{x} = 10^{-6}\ \mathrm{m/s^2}$$

在 $\dot{x}(0)=0$，$x(0)=0$ 与 $x(t)=1\mathrm{mm}$ 之间的相轨迹。通过比较使用不同间隔值所得的解和精确解，用图形法从抛物线上求出过渡时间 t_f。

9.25　考虑具有下式运动方程的系统

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} + \sin\theta = 0$$

(a) 这对应什么物理系统？
(b) 画出系统的相位图。
(c) 计算 $\theta(0)=0.5\mathrm{rad}$，$\dot{\theta}=0$ 时的具体解。

9.26　考虑非线性直立摆，在基座用电动机作为其执行器。设计一个反馈控制器镇定该系统。

9.27　考虑系统

$$\dot{x} = -\sin x$$

证明原点是渐近稳定的平衡点。

9.28　一个由方程 $\dot{x}=-f(x)$ 描述的一阶非线性系统，其中：$f(x)$ 是连续可微的非线性函数，满足以下条件：

$$f(0) = 0$$
$$f(x) > 0,\quad x > 0$$
$$f(x) < 0,\quad x < 0$$

利用李雅普诺夫函数 $V(x)=x^2/2$ 证明在原点 $(x=0)$ 附近系统是稳定的。

9.29　利用李雅普诺夫方程：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{I}$$

找到使图 9.67 所示的系统稳定的 K 的范围。利用劳斯稳定判据求取 K 的稳定值，并对两者进行对比。

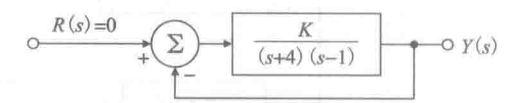


图 9.67　习题 9.29 的控制系统

9.30　考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 u \\ x_2(x_2 + u) \end{bmatrix},\quad y = x_1$$

找到所有 α、β 值，使得输入 $u(t)=\alpha y(t)+\beta$ 能将输出 $y(t)$ 保持在 1 附近。

9.31　考虑非线性自治系统：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(x_3 - x_1) \\ x_1^2 - 1 \\ -x_1 x_3 \end{bmatrix}$$

(a) 找到平衡点(多个)。
(b) 对于每个平衡点，找到线性化后的系统。
(c) 对于(b)问中的每种情况，利用李雅普诺夫理论判定非线性系统在平衡点附近的稳定性。

9.32　考虑图 9.68 所示的电路。对于什么样的二极管特性这个系统是稳定的？

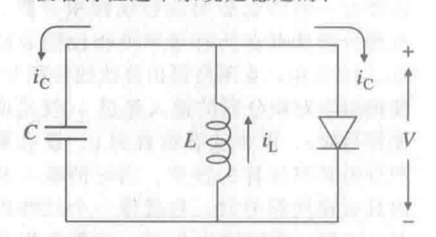


图 9.68　习题 9.32 的电路图

9.33　范·德尔·波尔(Van der Pol)方程：考虑由如下非线性微分方程所描述的系统

$$\ddot{x} + \varepsilon(1 + x^2)\dot{x} + x = 0$$

其中常数 $\varepsilon>0$。

(a) 证明此方程可以写为如下形式[利纳德(Liénard)或者$(x,\ y)$平面]

$$\dot{x} = y + \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$
$$\dot{y} = -x$$

(b) 利用李雅普诺夫函数 $V=\frac{1}{2}(x^2+\dot{x}^2)$，在利纳德平面绘出由此 V 确定的稳定区域。
(c) 画出(b)问的轨迹，并找出使其靠近原点的初始条件。用不同的初始条件 $x(0)$ 和 $\dot{x}(0)$ 在 Simulink 中仿真系统。

考虑 $\varepsilon=0.5$ 和 $\varepsilon=1.0$ 这两种情况。

9.34 杜芬(Duffing)方程：考虑由如下非线性微分方程描述的系统，

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\varepsilon x^{3}=u$$

其中：$u=A\cos(t)$。这个方程表示一个硬弹簧模型，其中，k 是弹簧劲度系数，如果 $\varepsilon>0$，弹簧会随着位移的增加而变坚硬。令 $k=0.05$，$\varepsilon=1$，且 $A=7.5$。

(a) 在 Simulink 中建立此系统的模拟系统。证明该系统的响应对初始条件 $x(0)$，$\dot{x}(0)$ 的轻微摄动非常敏感(该系统称为混沌的)。当 $t=30\text{s}$，模拟系统在 $x(0)=3$，$\dot{x}(0)=4$ 下的响应。对轻微摄动的初始条件 $x(0)=3.01$，$\dot{x}(0)=4.01$ 重复仿真。比较这两种结果。

(b) 考虑非受迫杜芬方程($u=0$)。画出 $t=200\text{s}$ 时系统在 $x(0)=1$，$\dot{x}(0)=1$ 的时间响应。画出系统的相平面图。证明原点是一个平衡点。

(c) 现在，考虑受迫杜芬方程($u\neq0$)。找到杜芬方程在 $t=30\text{s}$ 时初始条件 $x(0)=-1$，$\dot{x}(0)=1$的解。画出此时的相平面图($\dot{x}(t)$以 $x(t)$为变量)

(d) 令 $k=0.25$，$\varepsilon=1$，$A=8.5$，重复(c)问。

(e) 令 $k=0.1$，$\varepsilon=1$，$A=11$，重复(c)问。

(f) 以 $x(t_j)$为自变量，在以 2π 为周期的数百个观察时刻绘出 $\dot{x}(t_j)$曲线，我们就能对系统有更深入的理解。换句话说，不是连续地观察系统，我们"过滤"系统，并只绘制在选通时刻的行为。证明，不同于(c)问～(e)问的相平面曲线，这些点落在称为庞加莱 Poincaré 截面的结构良好的曲线(也称为奇异吸引子)上。绘制(c)问～(e)问的庞加莱截面。在初始条件 $x(0)=-1$，$\dot{x}(0)=1$ 下，模拟 $t=10000\text{s}$ 时的系统，以便绘制庞加莱截面。

(g) 从前面几项的结果中，能得到杜芬方程解的哪些性质？

(h) 说明系统参数 k、ε 和 A 的取值范围对系统动态的影响。

691～702

第10章 控制系统设计：原理与案例研究

设计原理简介

在第 5 章、第 6 章和第 7 章中，我们基于根轨迹、频率响应和状态变量法提出了分析和设计反馈系统的方法。迄今为止，我们考虑的都是在一定程度上孤立的、理想化的较大的系统，并且每次只采用一种方法对其进行分析研究。在本章，我们将重新回到第 4 章所阐述的主题——反馈控制的优点，运用第 5～7 章和第 9 章提供的成熟工具重新考虑控制系统设计的整体问题。我们将通过实例的形式阐述如何将这些工具应用到复杂的实际系统中。

总体来说，循序渐进的设计方法有两个目的，即它不仅为实际的控制问题提供了有用的研究起点，而且一旦设计过程出现问题，也为其提供了有效的检查点。本章给出的正是这样一种广泛通用的方法，这种方法将被应用到实例研究中。

703

章节概述

10.1 节用一种循序渐进的设计过程开始了本章内容，这种非常通用的方法不但可用于任何控制设计，也为设计过程提供了有用的定义和指导原则。接下来，我们把这种方法应用到五种复杂的实际系统中：卫星姿态控制系统的设计(10.2 节)；波音 747 的横向和纵向控制(10.3 节)；汽车发动机的空燃比控制(10.4 节)；磁盘驱动器控制(10.5 节)；快速热处理(RTP)系统控制(10.6 节)。其中，卫星例子是地球同步通信卫星系统控制的研究代表。该研究解决的是物理参数在已知给定范围内变化的鲁棒控制系统的设计。在此系统中，控制系统需要满足从“生命的开始”(BOL)到“生命的结束”(EOL)这一跨越 12～15 年的周期。卫星的转动惯量和质量将会随着姿态控制引起的燃油消耗而变化，因此，需要调度和重新定位卫星天线来保持卫星的姿态。

卫星例子研究说明了缺口补偿对于弱阻尼共振系统的作用。从这个例子的研究中，我们可以看到，合体的执行器和传感器系统比非合体的系统更容易控制。波音 747 案例研究了商业客机常见的飞行控制系统。给出运动的非线性方程，并且在特定的飞行条件下对其线性化。纵向和横向运动的刚体动态系统都是四阶的。当然，为了获得一个更精确的模型，我们也需要考虑灵活的模态。波音 747 飞机横向镇定的例子研究将说明作为内环设计的反馈控制有助于负责基本外环控制的飞行员对系统进行控制。高度控制的研究将表明如何结合内环反馈与外环补偿来设计一个完整的控制系统。汽车发动机的空燃比研究是一个很实际的例子，其包括一个非线性传感器和纯滞后。我们将使用第 9 章中的描述函数法来分析该系统的行为。对于每一个电脑用户而言，另一个常见的问题是存储在磁盘驱动器中的数据控制。这个例子是研究位置控制的，带宽将是一个关键的性能参数。源于半导体晶片制造中的 RTP 研究非常接近工业应用。主要关注的问题是对一个高度非线性的热力系统的温度跟踪和干扰抑制问题。执行器(灯)也是非线性的，我们将使用第 9 章的技术来消除非线性的影响。该系统另一个重要方面是执行器的饱和使得控制信号不能是负值。在所有的这些例子中，设计者们需要使用前面章节中的多种工具，包括根轨迹、频率响应、通过状态反馈极点配置和时间响应(非线性)仿真，来获得令人满意的设计。在 10.7 节中，

704

我们提出了一个来源于系统生物学这个新兴领域的研究例子，其描述了大肠杆菌的趋药性

或大肠杆菌如何远离困境。10.8 节向读者提供了反馈控制应用的历史展望。

10.1　控制系统设计概要

控制工程是许多动态系统设计过程中的一个重要部分。正如第 4 章所提到的那样，有意使用反馈可以使不稳定的系统稳定、减小由扰动输入引起的误差、减小跟踪控制输入时产生的跟踪误差、减弱系统闭环传递函数对内在参数细微变化的灵敏度。在需要反馈控制的情况下，我们可以总结出一套控制系统设计方法，利用该方法能够得到令人满意的结果。

在描述这种方法之前，我们希望强调控制的目的是促进诸如机械、机器人、化工厂、飞行器等产品或生产过程能更好地工作。从事其他设计过程领域的工程师越来越重视在他们的计划初期就考虑控制的作用。因此，越来越多的系统被设计成反馈系统，以至于若没有反馈，系统根本就不能有效地工作。这种情况在高性能的飞行器设计中尤为突出，控制学、结构学和航空动力学共同为飞行器的飞行提供了必要的保证。在本书中对这种设计方法进行全面的描述是不可能的，但是要正确地认识到这种设计方法不仅可以应用于控制系统设计的特定任务中，而且在企业中，它也起着核心作用。

控制系统设计开始于特定的产品或过程，其依靠反馈来获得令人满意的性能，包括稳定性、跟踪精度、扰动控制和参数变化影响的减弱等。我们将给出这个设计过程的概要，不管产品是电子放大器还是在地球运行轨道上放置的大型装置，该设计过程都将适用。显然，要想获得如此广泛的应用，我们所给出的设计概要只能在反馈控制问题方面是具体的，而在物理细节方面是模糊的。为了给出我们的结论，将控制设计问题划分成一系列典型的步骤。

步骤 1　理解控制过程并将动态性能指标转化成时域、频域或零极点指标。理解过程的重要性包括了解系统要完成的任务、系统的允许误差有多大、如何描述期望的控制信号和扰动信号，以及实体能力和局限性，这些内容相当重要。遗憾的是，此类教材很容易将控制过程看作是一个能响应任意大小输入的线性时不变传递函数，同时我们也容易忽略一个事实，即线性模型是实际系统的一种非常局限的表达形式，它仅在小信号、短时间，以及特定环境条件下才会有效。千万不要将近似系统与现实系统混淆。为了实现预期目的，你必须能够使用简化的模型，然后回到精确的模型或实际物理系统中来验证设计的系统性能。

705

这一步的经典结果有：系统的阶跃响应位于限制边界内(见图 10.1a)、系统具有满足特定限制条件的开环频率响应(见图 10.1b)或具有位于某一限制边界左侧的闭环极点(见图 10.1c)。

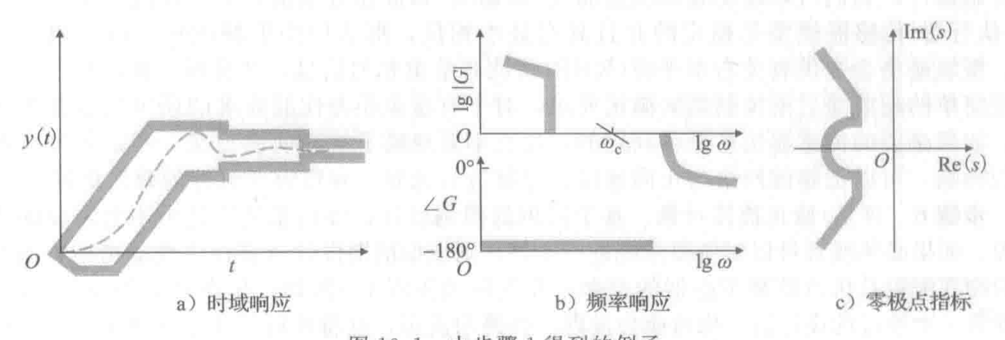


图 10.1　由步骤 1 得到的例子

步骤 2　选择传感器。在选择传感器时，要考虑到哪些变量对控制是重要的，哪些变量在物理上是可以测量的。例如，在喷气式发动机中存在必须控制的变量，即内部温度，但是内部温度在发动机运行时是无法被直接测量的。我们必须选择能对这些关键变量进行间接测量的传感器。对于有干扰的情况，考虑传感器是非常重要的。尤其是在化工过程

中，传感器有益于直接观测载荷扰动，因为如果能将这些信息前馈给控制器，就可以提高系统的性能。

影响传感器选择的因素如表 10.1 所示

表 10.1

传感器的数量和位置：	选择满足要求的最少数量的传感器和最佳的位置
工艺：	电的、磁的、机械的、机电的、光电的、压电的
函数特性：	线性度、误差、精度、带宽、分辨率、动态范围、噪声
物理特性：	重量、尺寸、强度
品质因数：	可靠性、耐用性、可维护性
成本：	费用、可利用性、检验和维修设备

步骤 3　选择执行器。为了控制一个动态系统，显然，必须有能够对响应产生影响的装置，该装置称为执行器。在选择特定的执行器之前，我们需要考虑哪些变量可以被影响。例如，在飞行器中可移动的表面可以有许多种结构，而且这些结构对飞行器性能和可控性的影响是很大的。喷气式飞机或其他力矩装置的安装位置也是航天器控制设计中所要考虑的一个主要部分。

选好特定的待控变量后，你可能还需要考虑其他因素，如表 10.2 所示。

表 10.2

执行器的数量和位置：	选择满足要求的最少数量的执行器和最佳的位置
工艺：	电的、液压的、气压的、热力的及其他
函数特性：	最大允许力矩、线性度、最大允许速度、功率、效率
物理特性：	重量、尺寸、强度
质量因数：	可靠性、耐用性、可维护性
成本：	费用、可利用性、检验和维修设备

步骤 4　建立线性模型。选取最佳的控制过程、执行器和传感器；确定期望的平衡点；并且构造小信号动态模型使其在步骤 1 中的整个指标频率范围内有效。同时在可能的情况下也要保证模型对实验数据有效。为了能够使用所有可利用的工具，我们可以用状态变量形式、零极点形式和频率响应形式来表示模型。正如我们所看到的那样，Matlab 和其他计算机辅助控制系统的设计软件包都可以在这三种形式之间进行转换。如必要，可简化并对模型进行降阶，量化模型的不确定性。

步骤 5　尝试简单的比例积分微分(PID)或超前滞后设计。为了对设计问题复杂度进行初始估计，我们可以绘制频率响应曲线(伯德图)和被控对象增益的根轨迹。如果被控对象-执行器-传感器模型是稳定的并且具有最小相位，那么使用伯德图将是最有效的；否则，根轨迹将会提供有关右半平面(RHP)特性非常重要的信息。在任何一种情况下，要尽量用简单的超前滞后型控制器来满足要求，对于有稳态误差性能要求的还可以包含积分控制。如果必要的传感器信息是可利用的，那么不要忽略了扰动前馈控制。考虑到传感器噪声的影响，可以把超前网络与正向速度传感器进行比较，观察哪个设计的效果更好。

步骤 6　评估/修正被控对象。基于简单的控制设计，评估系统性能中不合需要的特性来源。如果必须或者可以对所得系统进行完善，则依据前期设计重新评估性能指标、控制过程的物理配置及执行器和传感器的选择，并返回到步骤 1。例如，在许多运动控制问题中，检验第一次通过的设计后，你可能会发现一些振动模态，这将使得设计不能满足问题的原始性能指标。此时，可以通过附加刚性组件或用无源阻尼器来改变被控对象的结构，这种方法比单用控制策略更容易满足指标。另一种解决方案是可以移动传感器，使其处在振动模态的节点上，这样没有为运动提供反馈。有些执行器工艺(如液压的)比其他工艺(如电的)的元件有更多的低频振动，此时可能需要改变执行器工艺。在数字系统实现中，延迟时间常常是导致稳定性下降的因素，因此我们可以通过修正传感器-控制器-执行器系统结构，以减少延迟

706 ～ 707

时间。在热力系统中，通常可以通过材料置换来改变热容量或热导率，这样可以增强控制设计。为了用最好的成本效益方式实现期望的性能指标，我们不仅仅要考虑到控制逻辑，还要考虑到其他所有的设计环节，这一点是非常重要的。如果修改了被控对象，那么要返回到步骤1。如果现在的设计可以满足要求，转到步骤8；否则进行步骤7。

步骤7　尝试最优设计。如果经过反复试验得到的补偿器仍然不能给出完全令人满意的性能，那么就基于最优控制来进行控制系统设计。对称根轨迹(SRL)将会给出可能的根的位置，从这些位置中选取能满足响应指标的控制极点；同时也可以选取观测器极点，这些极点体现了传感器与过程噪声之间的折中。可以通过绘制相应的开环频率响应和根轨迹曲线来估计该设计的稳定裕度和系统对参数变化的鲁棒性。你可以修改极点的位置，直到获得最理想的折中结果为止。返回到用不同成本度量的对称根轨迹常常是该步骤的一部分，或者直接使用函数 lqr 和 lqe 进行计算。另外一种最优控制的方法是给出一个带有未知参数的固定结构控制器，将其性能成本函数用公式表示，并且通过参数优化求得一组理想的参数值。

将产生最理想频率响应的最优设计与步骤5中所提到的变换方法设计进行比较。选择二者之间较好的一个，执行步骤8。

步骤8　建立计算机模型，并计算(仿真)所得设计的性能。在工艺改造、执行器和传感器的选择、控制器设计选择都达到了最优的折中后，开始建立系统的计算机模型。此模型应包含重要的非线性特性，如执行器饱和、实际噪声源以及系统运行过程中期望发现的参数变化。仿真通常可以识别灵敏度，这可能会导致设计回到步骤5，甚至步骤2。设计过程应该反复进行，直到仿真结果验证了系统的稳定性及鲁棒性均达到要求为止。参数优化常可作为仿真的一部分，在参数优化过程中，计算机通过调整自由参数以得到最佳的性能。在设计的初期，仿真模型相对简单；随着设计的进行，将要研究更复杂、更精细的模型。在本步骤中也可将第4章和第8章描述的模拟控制器进行数字等效。为了达到数字化的效果，控制器的参数可能需要进行某些细化。最终的设计可以用数字处理机逻辑实现。 708

如果仿真的结果证明设计是令人满意的，执行步骤9，否则返回到步骤1。

步骤9　制作样机。作为生产前最后的测试，通常需要制作、调试样机。这样，你可以检验模型的质量，发现未知的模外动态信息，如振动和其他的模态，从而想办法改善设计。通过使用嵌入式软件/硬件来实现控制器。必要的话还要调整控制器。在完成这些测试后，除非时间金钱耗尽或者想法已经枯竭，否则需要重新考虑传感器、执行器及控制过程并返回到步骤1。

这个设计概要是最佳实践的近似；其他工程师可能在上述步骤上稍有更改。在某些场合你可能希望以不同的顺序执行这些步骤或者忽略一步、增加一步。不同的系统仿真和样机制作阶段差距非常大，这是因为其依赖于系统的性质。对于那些样机很难测试和再造的系统(如卫星)，或设计失败则很危险的系统(如高速离心机和人类登月系统的稳定性)，大部分的设计验证只能通过一些仿真来解决。可以采用数字仿真、实验室模型或者带有仿真环境的全尺寸实验模型。对于那些比较容易建立和修改的系统(如汽车燃油系统的反馈控制)，完全可以跳过仿真这一步；设计的验证和细化可以通过样机调试替代完成。

在步骤6中提出了一个重要的问题，即考虑改变被控对象本身。在很多情况下，适当地修正被控对象能够提供附加阻尼或增加刚度、改变模态形状、减小系统对扰动的响应、减小库仑摩擦、改变热容量或热导率等。用作者经历中的具体例子来对这方面进行阐述是很有价值的。在生产半导体晶片的例子中，装晶片的边缘圈被认为是闭环控制的限制因素。调整边缘圈的厚度、使用不同的覆层材料以减少热损失，将某个温度传感器重新放置在离边缘圈更近的地方，这些都会使控制性能得到极大的改善。在另一个实际应用，即薄膜加工中，简单地改变两个输入流程的顺序能够使得原料和氧化物的混合度明显地提高，进而改善薄膜的均匀性。在射频等离子物理蒸镀的应用中，弯曲的目标形状可以抵消腔室的几何影响，进而显著地提高蒸镀的均匀性。作为最后一个例子，在液压轴控制问题中， 709

增加带有陶瓷绝缘体的油温控制和控制铃箱的温度转换器，可以使扰动的幅度降低几阶，这单靠反馈控制是不可能实现的[⊖]。有人也许会提出在航空航天领域中的一些应用例子，但这些例子的控制都是事后产生的想法，因此反馈控制的问题变得极其困难，这就导致闭环系统的性能非常差。讨论这一问题的原则是必须考虑修正被控对象本身，从而使得控制问题简单化并提供最佳的闭环性能。

通常的控制系统设计方法对控制人员来说是无效率的、有缺陷的。一个更好的方法是让控制工程师从项目的开始就参与进去，这样便于对控制系统的难度提出早期的反馈，这种方法正在走向成熟。此外，控制工程师还可以对执行器和传感器的选择提出有价值的反馈，甚至可以对被控对象的修正提出建议。如果需要改变被控对象，最好在图纸成形之前改变，这样将是更有效率的。在初期，我们可以对简单系统模型的闭环性能进行研究。

在设计过程中众所周知的是，在给定范畴内设计要经常利用从早期模型中获得的经验。因此，好的设计往往是不断完善而不是第一次设计就能得到的。我们将用几个实例来阐述这一方法(10.2～10.6节)。为了便于参考，我们总结出以下几个步骤。

控制系统设计步骤总结

(1) 理解控制过程及其性能要求。

(2) 通过考虑安装位置、工艺和噪声来选择传感器的类型和数量。

(3) 通过考虑安装位置、工艺、噪声和功率来选择执行器的类型和数量。

(4) 为控制过程、执行器、传感器建立线性模型。

(5) 基于超前滞后补偿或PID控制的概念尝试简单的试验设计。如果满足性能指标要求，则转到步骤(8)。

(6) 考虑修改被控对象本身来改善闭环控制。

(7) 如果在步骤(5)中所设计的简单补偿器不能满足性能指标，则基于最优控制或其他准则进行极点配置试验设计。

(8) 对设计进行仿真，包括非线性、噪声、参数变化的影响。如果性能不够理想，返回到步骤(1)重复进行。为了改善闭环控制性能可以考虑修改被控对象本身。

710

(9)制作样机并对其进行测试。若性能不够理想，则返回到步骤(1)重新进行设计。

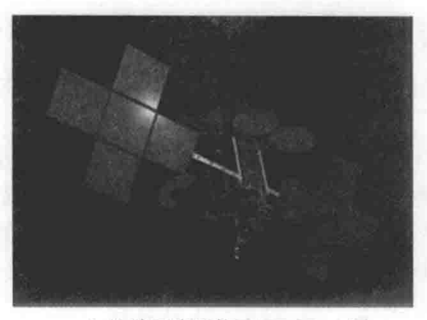
10.2 卫星姿态控制设计

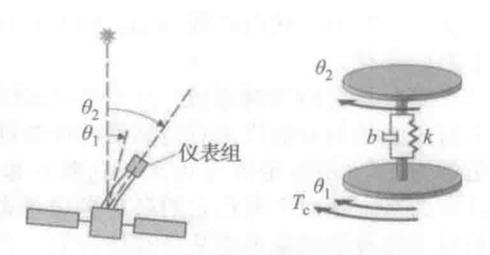
我们的第一个例子取自空间项目，该例子是根据控制绕地卫星的指向或姿态的需要提出的。图10.2a所示的为地球同步通信卫星。我们将根据控制系统设计概要中所提供的步骤逐步进行设计，而且会涉及控制这类系统需要考虑的一些因素。

步骤1 了解控制过程及其性能指标。卫星示意图如图10.2b所示。我们设想卫星肩负天体观测的任务，这项任务需要科学探测装置精确定向。由于该装置必须尽可能放在最安静的环境中，这就要求将该设备与主控设备的振动和电噪声隔离，与电源、推进器和传动齿轮隔离。我们将卫星结构模型看作是由活动吊杆连接在一起的两个质体构成的。在图10.2b所示模型中，卫星姿态角θ_2代表星体传感器与仪表组的夹角，θ_1是卫星主体与星体的夹角。卫星的等效机械系统如图10.2b所示，其中传感器被安装到与θ_2有关的圆盘上。通过计算可知，由太阳压强、陨石微粒、轨道的摄动引起的扰动力矩可以忽略不计。当必须指向另一个方向的设备时，定向的要求就会产生。这个可以通过采用暂态调节时间为20s、超调量不大于15%的动态性能指标来满足。卫星的动态模型包含了可变参数，在列写方程时，控制必须满足预先给定范围内的任意参数变化。

步骤2 选择传感器。为了定向科学设备，必须测量设备的姿态角。为了实现这个目

⊖ 我们的同事Daniel DeBra教授强烈地建议将修改对象本身作为改进控制的一个选择。他引用了这个具体例子去说明这点。当然，我们是很赞成他的。


a）地球同步通信卫星IPSTAR图



b）卫星示意图及其双体模型

图 10.2

标，我们建议使用星体跟踪器作为传感器，当该系统采集某个特定星体图像时，会把图像锁定在望远镜焦平面上。该传感器能够给出有相对噪声但很精确(平均而言)且与 θ_2 成正比的读数，该读数是仪表组的实际方向角与期望方向角的偏离角度。作用在星体跟踪器信号上的超前网络会将噪声过多地放大，因此为了使控制稳定，需要包含一个速度陀螺仪来给出 $\dot{\theta}_2$ 的不含噪声的读数。除此之外，速度陀螺仪还能够使得星体跟踪器在获取目标星体图像之前的大范围动作稳定。

步骤 3 选择执行器。在选择执行器时主要考虑的是精度、可靠性、重量、功率指标和使用周期。施加转矩的几种方法包括：冷气式喷气发动机、反力式叶轮或反应式陀螺仪、磁转矩仪和重力梯度仪。其中喷气发动机功率最大、精度最低。反力式叶轮很精确但是只能传递动量，因此需要喷气发动机和磁转矩仪不时地向其提供动量。磁转矩仪可以提供能级相对较低的转矩，因此只适合那些执行低空任务的卫星。重力梯度仪同样只能提供非常小的转矩，这不仅限制了响应速度，同时对卫星的形状也有严格的要求。为了实现这项任务的目标，我们选择快速且有足够精度的冷气式喷气发动机作为执行器。

步骤 4 建立线性模型。对于卫星而言，正如图 10.2 所示的那样，我们假设其两个质体通过一个转矩常数为 k、黏性阻尼比为 b 的弹簧相连接。运动方程如下：

$$J_1\ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c \tag{10.1a}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \tag{10.1b}$$

其中：T_c 为作用在主体上的控制转矩。取惯量 $J_1=1$、$J_2=0.1$，则传递函数为

$$G(s) = \frac{10bs + 10k}{s^2(s^2 + 11bs + 11k)} \tag{10.2}$$

如果我们选择

$$\boldsymbol{x} = [\theta_2\ \dot{\theta}_2\ \theta_1\ \dot{\theta}_1]^{\mathrm{T}}$$

作为状态矢量，那么使用式(10.1a)，并且假定 $T_c \equiv u$，我们可以得到运动方程的状态变量形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_2} & -\frac{b}{J_2} & \frac{k}{J_2} & \frac{b}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_1} & \frac{b}{J_1} & -\frac{k}{J_1} & -\frac{b}{J_1} \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix}u, \tag{10.3a}$$

$$y = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\boldsymbol{x} \tag{10.3b}$$

711 ~ 712

通过对支架的物理分析，我们可以假定参数 k 和 b 随温度的波动而变化，但有界且满足：

$$0.09 \leqslant k \leqslant 0.4 \tag{10.4a}$$

$$0.038\sqrt{\frac{k}{10}} \leqslant b \leqslant 0.2\sqrt{\frac{k}{10}} \tag{10.4b}$$

因此，卫星的自然谐振频率 ω_n 可以在 1rad/s 和 2rad/s 之间变化，阻尼比 ζ 在 0.02 与 0.1 之间变化。

对于参数易变的控制系统，一种控制设计方法是选择参数的额定值来对模型进行设计，然后用其他的参数值来对控制器的性能进行测试。在当前的这种情况下，我们选取 ω_n 的额定值为 1，ζ 的额定值为 0.02。这些值是在经验和直观推断的基础上任意选取的。但需要注意的是，这两个值在它们各自的取值范围内是最小的，因此如果要满足性能指标，这些值对应的被控对象可能是最难控制的。我们假设这个模型的设计恰好使其他的参数值也能很好地满足性能指标(另一种可选方案是，为模型的每个参数都选取其平均值)。选定的参数值为 $k=0.091$、$b=0.0036$；取 $J_1=1$、$J_2=0.1$，则额定方程变为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.91 & -0.036 & 0.91 & 0.036 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.091 & 0.0036 & -0.091 & -0.0036 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \tag{10.5a}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{x} \tag{10.5b}$$

用 Matlab 的 ss2tf 函数求得相应的传递函数为

$$G(s) = \frac{0.036(s+25)}{s^2(s^2+0.04s+1)} \tag{10.6}$$

当尝试性设计完成时，应在参数允许值范围内进行计算机仿真，以确保设计的系统对参数的变化有很好的鲁棒性。等式(3.74)～式(3.76)说明如果闭环极点的自然频率为 0.5rad/s、闭环阻尼比为 0.5，那么动态性能指标将被满足；此时对应的开环穿越频率为 $\omega_c \approx$ 0.5rad/s、相位裕度约为 PM＝50°。我们应该尽可能地满足这些设计标准。

步骤 5 尝试超前滞后或 PID 控制器设计。图 10.3 所示的为额定对象的比例增益根轨迹，图 10.4 所示的为其相应的伯德图。从图 10.4 我们可以看到，欠阻尼谐振频率比穿越频率的设计点仅大 2 倍，因此这可能是设计中的一个难题。这种情况需要补偿能够校正被控对象在谐振频率处的滞后相位。这类校正必须首先知道谐振频率，而本例子中的谐振频率是容易变化的。因此，继续进行设计可能会有一定的麻烦。

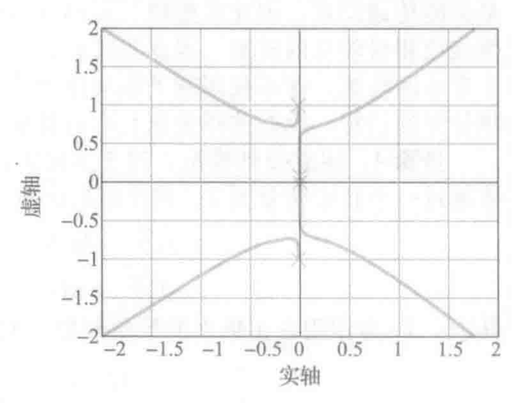
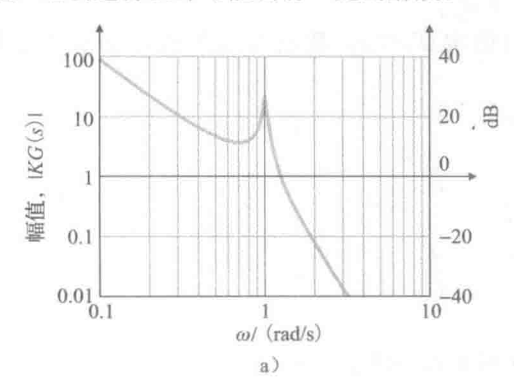


图 10.3 $KG(s)$的根轨迹



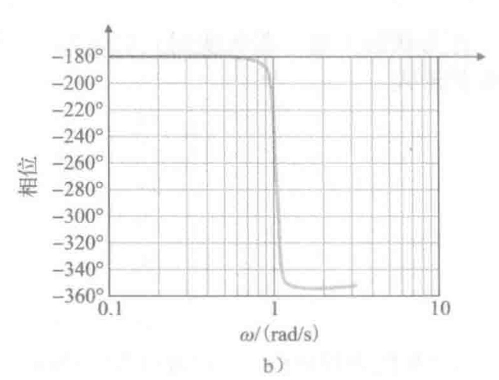


图 10.4 $K=0.5$ 时 $KG(s)$的开环伯德图

713～714

为了说明补偿设计的一些重要方面，我们首先需要忽略谐振，从而获得一个仅对刚体适用的设计。选取控制过程的传递函数为 $1/s^2$，反馈是位置加微分(星体跟踪器和速度陀螺仪)或 PD 控制，其传递函数为 $D_c(s)=K(sT_D+1)$，目标响应是 $\omega_n=0.5\text{rad/s}$，$\zeta=0.5$。选取一个较为合适的控制器：

$$D_{c1}(s) = 0.25(2s+1) \tag{10.7}$$

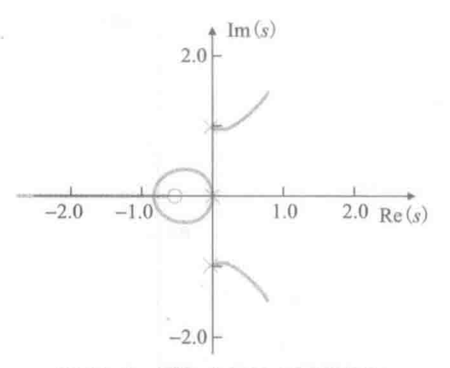


图 10.5　$KD_{c1}(s)G(s)$的根轨迹

图 10.5 所示的为带有 D_{c1} 控制器的实际被控对象的根轨迹，图 10.6 所示的为其相应的伯德图。从这些曲线中我们可以看到，虽然系统的低频极点是合适的，但系统会因谐振而不稳定[⊖]。此时我们可以减小期望的带宽并通过降低增益来放慢系统速度，直到系统稳定为止。事实上，对于那么小的阻尼比，我们必须放慢速度。通过实验得出：

$$D_{c2}(s) = 0.001(30s+1) \tag{10.8}$$

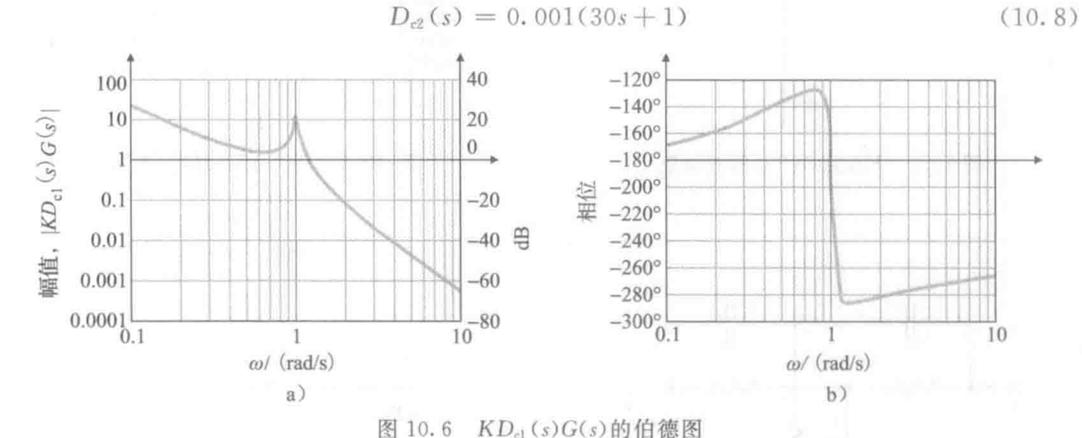


图 10.6　$KD_{c1}(s)G(s)$的伯德图

图 10.7 所示的为该系统的根轨迹，图 10.8 所示的为其相应的伯德图。从伯德图中可以看出系统相位裕度是 50°，但是穿越频率 ω_c 仅为 0.04rad/s。尽管穿越频率太低无法满足调节时间的指标要求，但是如果要求在谐振频率处的增益保持在单位值以下而使系统是增益稳定的，那么如此低的穿越频率则是不可避免的。

解决这个问题的另一种方法是，将零点放置在欠阻尼极点附近，从而用零点将这些欠阻尼极点从右半平面内拉回来。这类补偿在不好的极点附近的频率响应增益非常低，而在其他位置的增益却是很合理的。由于在该装置频率响应图里好像有个凹陷或是凹口，因此也将其称为**陷波滤波器**(在电子网络理论中也称为**带阻滤波器**)。图 10.9 所示的为具有陷波特性的一个 *RC* 电路，图 10.10 所示的为其零极点分布，图 10.11 所示的为其相应的频率响应。陷波具有 180°的超前相位，可以用来补偿谐振的 180°滞后相位；如果陷波处的频率低于被控对象的谐振频率，则系统在谐振附近的相位需保持在 180°以上。

由这一思想，我们返回到式(10.7)所给出的补偿方程，增加陷波滤波器后，得到修正后的补偿器传递函数为

$$D_{c3}(s) = 0.25(2s+1)\frac{(s/0.9)^2+1}{[(s/25)+1]^2} \tag{10.9}$$

⊖ 如果建立了系统，那么喷气式发动机将随着响应的增加而饱和。我们可以采用 9.3 节中介绍的非线性系统的分析方法来分析该响应。通过分析可知，我们期望信号增大、执行器等效增益下降，直到根回到 ω_n 附近的虚轴上。产生的极限环将快速地耗尽控制气体的供应。

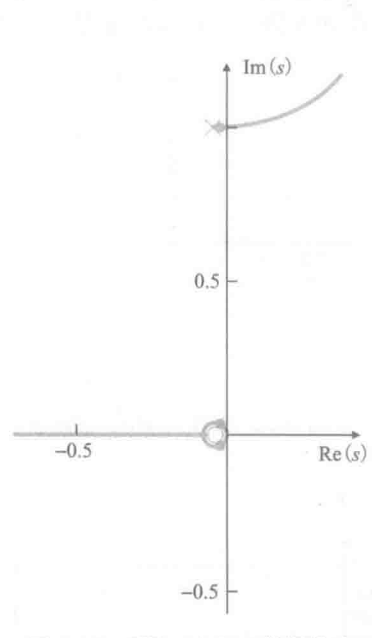


图 10.7　$KD_{c2}(s)G(s)$的根轨迹

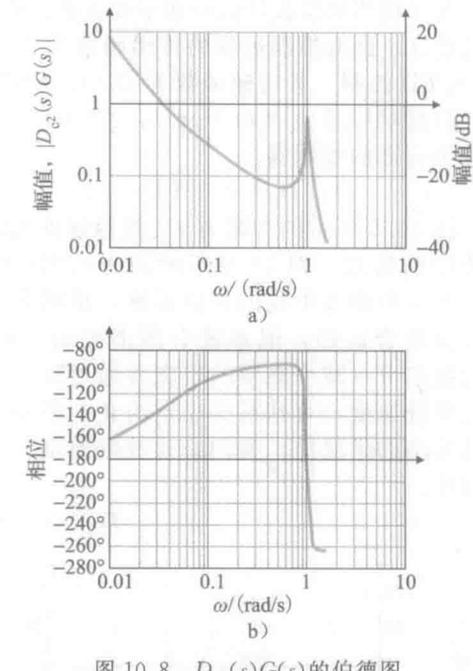


图 10.8　$D_{c2}(s)G(s)$的伯德图

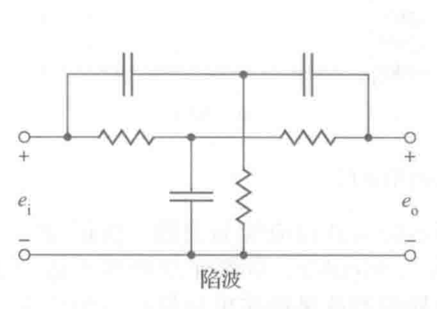


图 10.9　双 T 形的陷波滤波器

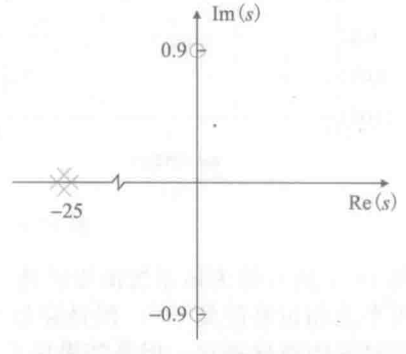
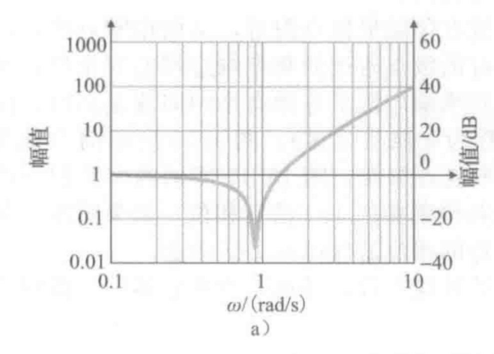


图 10.10　陷波滤波器的零极点分布



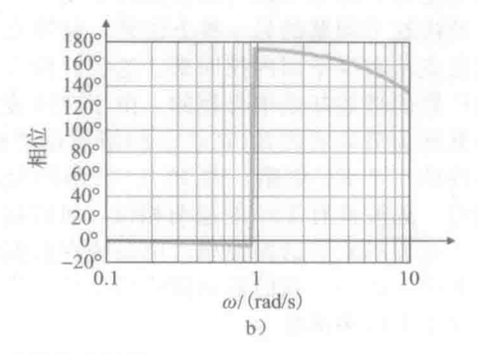


图 10.11　陷波滤波器的伯德图

图 10.12 所示的为这种情况对应的伯德图，图 10.13 所示的为其根轨迹，图 10.14 所示的为单位阶跃响应。尽管该设计的调节时间相对于性能指标要求来说相对较长，且超调量太大，但是这种设计方法看起来似乎是很有前景的；通过多次迭代就可以得到令人满意的补偿器。

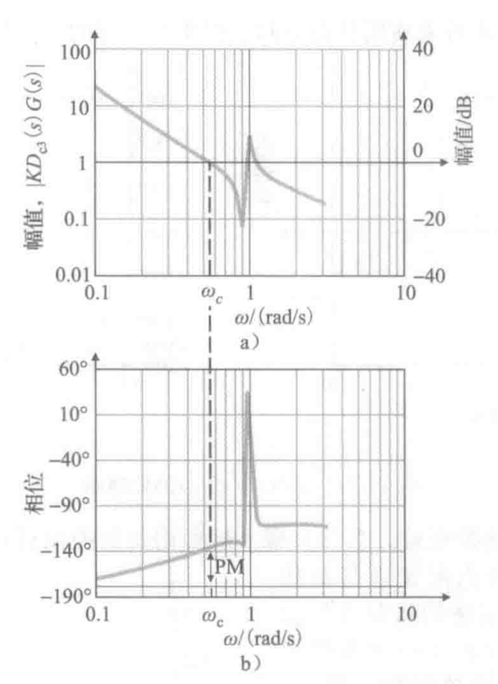


图 10.12 $KD_{c3}(s)G(s)$的伯德图

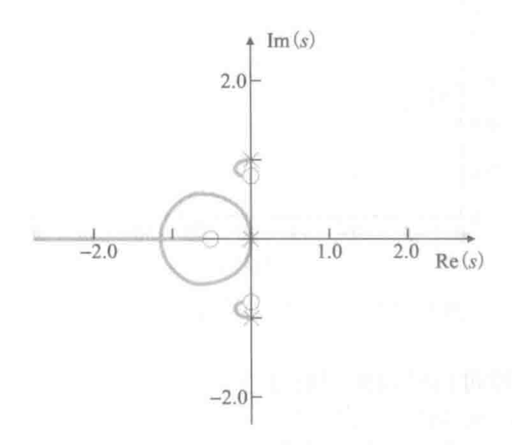


图 10.13 $KD_{c3}(s)G(s)$的根轨迹

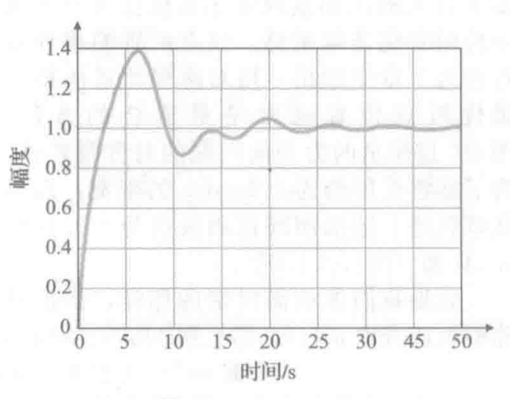


图 10.14 当 $\theta_2(0)=0.2\text{rad}$ 时 $D_{c3}(s)G(s)$的闭环阶跃响应

现在我们回想一下，当参数在等式(10.3a)给定的范围内变化时，我们期望补偿器能够提供满足要求的性能。通过观察图 10.15 所示的根轨迹，我们可以检验该设计的鲁棒性，从而使得

$$\hat{G}(s)=\frac{(s/50+1)}{s^2(s^2/4+0.02s+1)} \tag{10.10}$$

其中，根轨迹是依据等式(10.9)对应的补偿器和 $\omega_n=2$(而不是 1)的被控对象绘制出来的。假设吊杆有足够的刚度。注意到，低频极点的阻尼比仅为 0.02。结合各个参数值，我们可以得到频率响应和暂态响应，如图 10.16 和 10.17 所示。我们可以用陷波滤波器和速度反馈进行多次反复试验，但是由

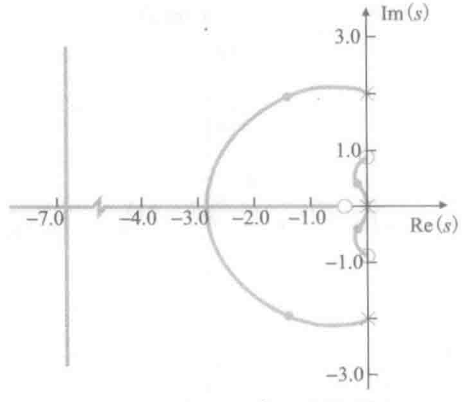


图 10.15 $KD_{c3}(s)\hat{G}(s)$的根轨迹

于系统非常复杂，所以现在看来使用状态空间法似乎是合理的。然后转到步骤 7。

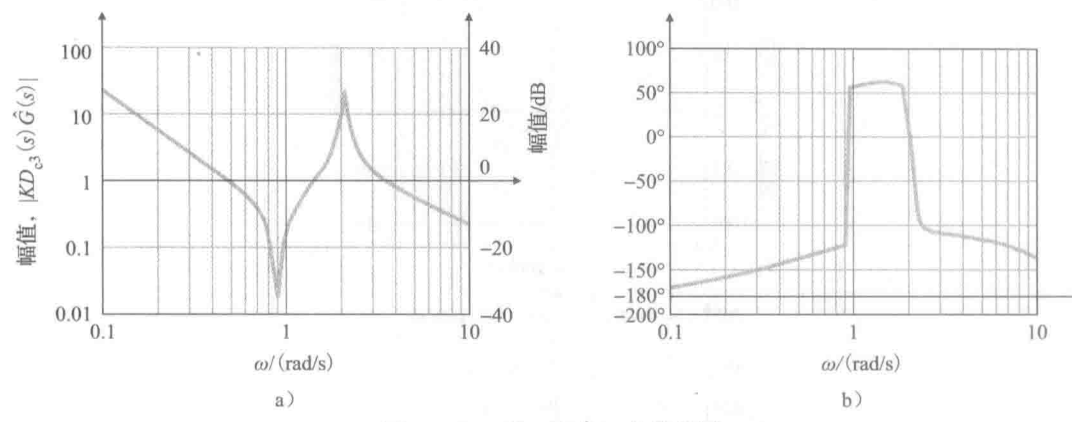


图 10.16　$KD_{c3}(s)\hat{G}(s)$的伯德图

步骤 6　评估/修正被控对象。参阅步骤 8 后面附加的控制讨论。

步骤 7　尝试使用极点配置进行最优设计。使用式(10.4a)所描述的运动方程的状态变量形式，我们可以设计一个将把闭环极点放置在任意位置的控制器。当然，毫无疑问，使用极点配置法得到的设计需要非常大的控制量或要求对被控对象传递函数的变化非常敏感。极点配置的指导方针在第 7 章中给出；用对称根轨迹法推导最优极点位置通常是最适合的方法。图 10.18所示的为当前问题的对称根轨迹。为了能够获得约为 0.5rad/s 的带宽，需要从该轨迹上选取闭环控制极点为$-0.45\pm 0.34j$和$-0.15\pm 1.05j$。

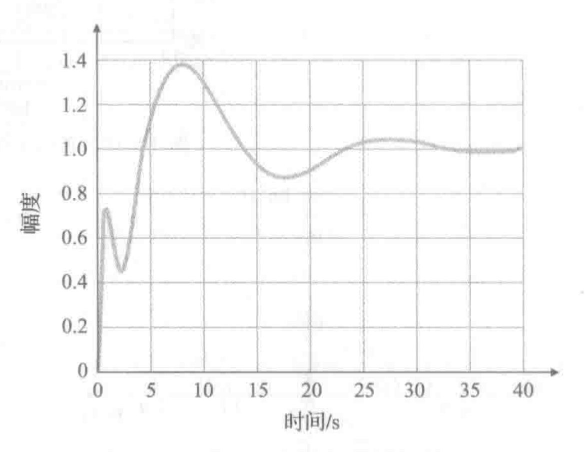


图 10.17　$D_{c3}(s)G(s)$的闭环阶跃响应

如果我们像前面讨论的那样，依据对称根轨迹选取 $\alpha_c(s)$，那么用 Matlab 的 place 函数可以得到控制增益为

$$\boldsymbol{K}=[-0.2788\quad 0.0546\quad 0.6814\quad 1.1655] \tag{10.11}$$

图 10.19 所示的为额定对象参数和刚性弹簧对象模型的阶跃响应。带有额定对象参数的对称根轨迹控制器设计的伯德图可以由下面的环路传递函数获得(通过在 u 处断开环路)：

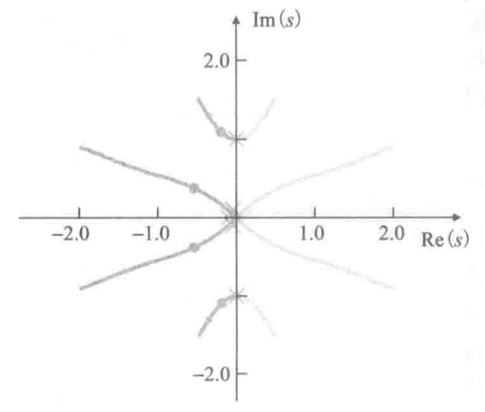


图 10.18　卫星系统的对称根轨迹

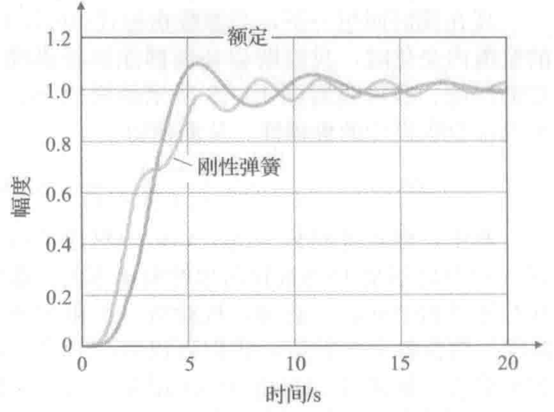


图 10.19　对称根轨迹设计的闭环阶跃响应

$$\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}(s)}{U(s)}=\boldsymbol{K}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

且得到的相位裕度约为 60°，如图 10.20 所示。对额定对象而言，尽管该设计的响应速度能够满足指标要求，但是当被控对象有刚性弹簧时，对应的调节时间相比与要求的性能指标稍长一点。但有一点我们根本不知道，通过在对称根轨迹上选取另外一点，就可能在额定对象和刚性弹簧之间得到一个更好的折中。设计者必须要面对诸如此类的选择，并选取最佳折中方案应对手边的问题。

图 10.19 所示的是基于全状态反馈的设计。为了完成最优设计，我们需要一个估计器。选取速度比控制极点快约 8 倍的闭环估计器误差极点。这种做法是，为了避免误差极点降低设计的鲁棒性；使用快速观测器与不加观测器对响应的影响几乎是相同的。从对称根轨迹上选取误差极点为 $-7.7\pm3.12\mathrm{j}$ 和 $-3.32\pm7.85\mathrm{j}$。用 Matlab 的 place 函数进行极点配置得到估计(过滤)器增益为

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}22\\242.3\\1515.4\\5503.9\end{bmatrix}\tag{10.12}$$

正如 7.8 节所描述的那样，在我们将控制增益与估计器结合后，根据等式(7.177)得到补偿器传递函数为

$$D_{c4}(s)=\frac{-745(s\pm0.3217)(s+0.0996\pm0.9137\mathrm{j})}{(s+3.1195\pm8.3438\mathrm{j})(s+8.4905\pm3.6333\mathrm{j})}\tag{10.13}$$

该补偿器的频率响应(见图 10.21)表明极点配置引入了一个陷波。图 10.22 和图 10.23所示的分别为复合系统 $D_{c4}(s)G(s)$ 的频率响应和根轨迹曲线，而图 10.24 所示的为额定对象和刚性弹簧对象的阶跃响应。注意到，该设计基本上能够满足性能指标要求。

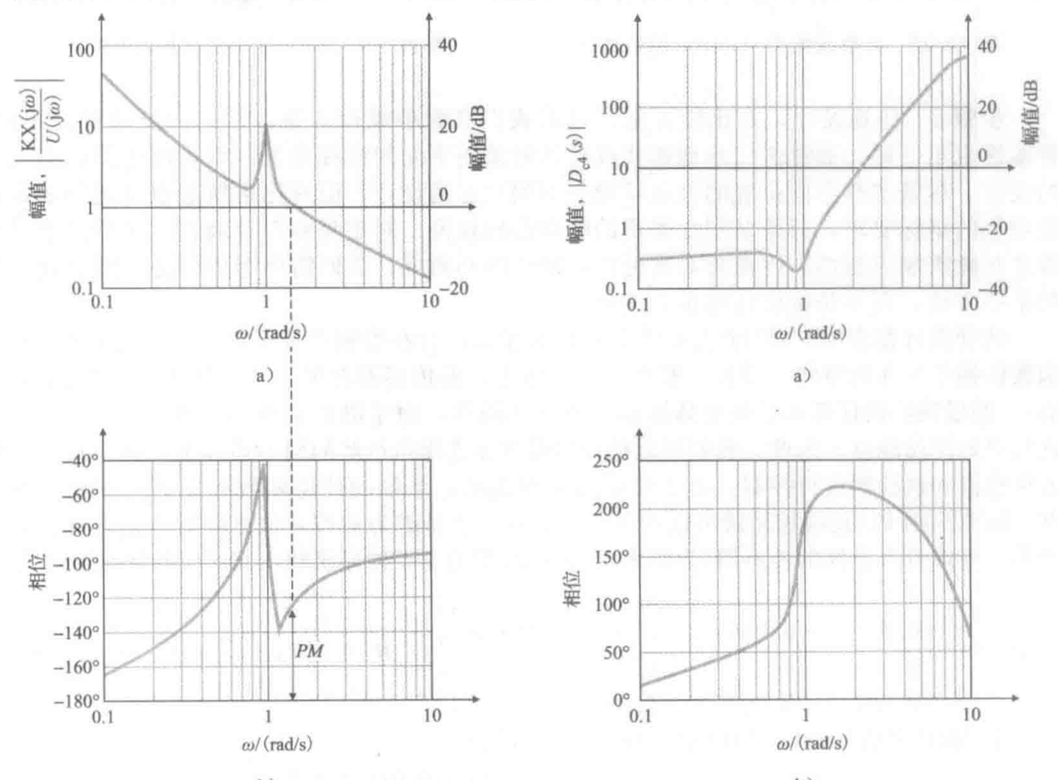


图 10.20　从 u 到 $\boldsymbol{Kx}$ 的对称根轨迹设计的频率响应

图 10.21　最优补偿器 $D_{c4}(s)$ 的伯德图

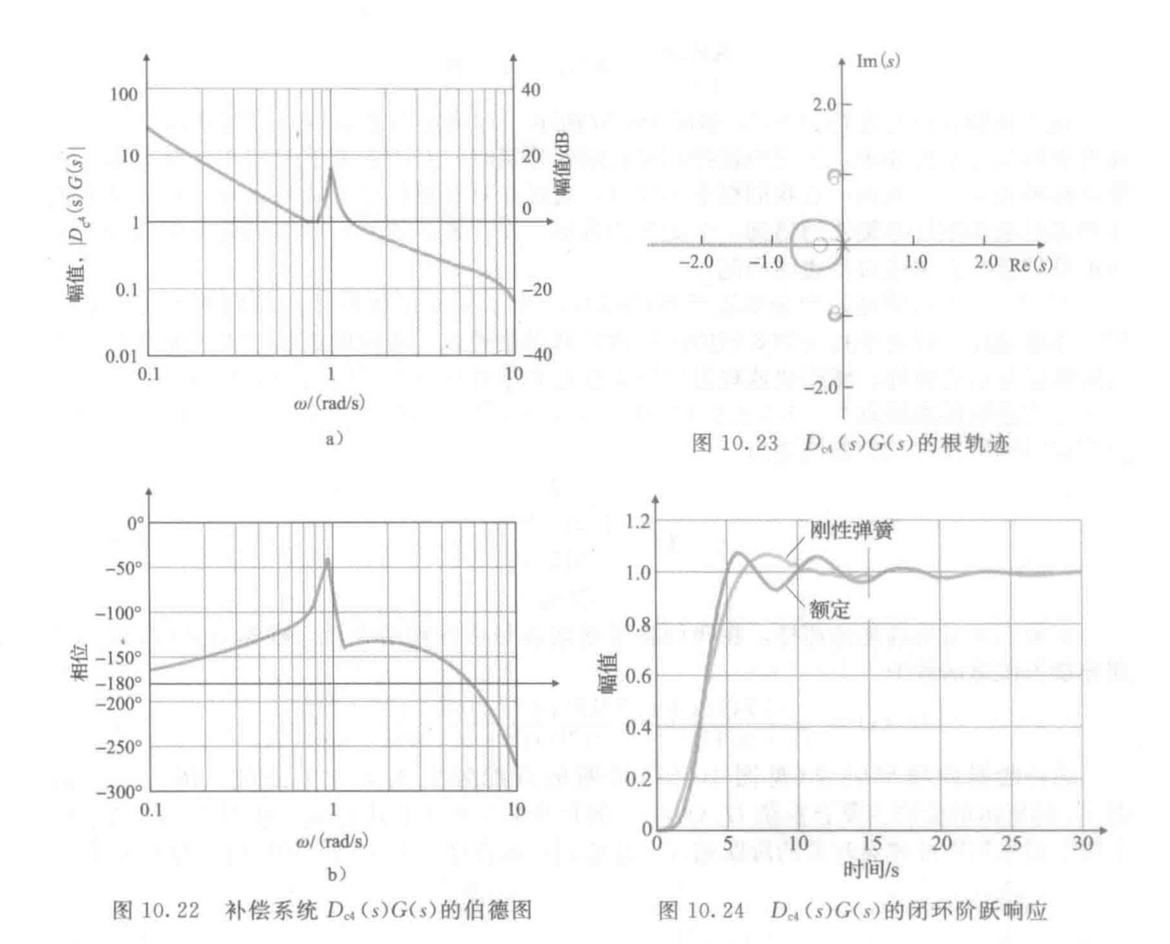


图 10.23　$D_{c4}(s)G(s)$的根轨迹

图 10.22　补偿系统 $D_{c4}(s)G(s)$的伯德图

图 10.24　$D_{c4}(s)G(s)$的闭环阶跃响应

步骤 8　仿真设计，并比较方案。目前我们有两种设计方案，它们的复杂程度不同，鲁棒性也不一样。通过进一步地迭代或开始时采用不同的标称情况，可以改进陷波滤波器的设计。尽管选择不同位置的极点可能会得到更好的设计，但对称根轨迹设计能够满足额定对象的指标要求，只是对刚性弹簧的响应会比较慢。对于每种设计而言，想要探索其鲁棒性和噪声响应特性，则需要对其进行更加广泛的研究。我们需要考虑的是实际物理系统的某些方面，而不是按照这些步骤进行。

两种设计都会因为耦合产生的欠阻尼谐振模态的存在受到严重影响。但是该系统的传递函数依赖于这样的事实，即执行器在一个质体上，而传感器在另一个质体上(也就是非合体的)。假设我们的任务不是使星体跟踪器瞄准小质体，而是瞄准主质体，例如，为了通信而进行对地面站瞄准。为此，我们可以把传感器放在支撑执行器的同一质体上，以实现对合体的传感器和执行器进行控制。由于环境的物理现状，系统的传递函数有靠近可调模态的零点，因此只用 PD 反馈控制就可以达到控制目的，这是因为被控对象已经有了陷波补偿器的效果。考虑带有合体的传感器(为测量 θ_1)和执行器的卫星传递函数，其对应的状态矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -0.91 & -0.036 & 0.91 & 0.036\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.091 & 0.0036 & -0.091 & -0.0036\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

715
~
726

用 Matlab 的 ss2tf 函数求得系统的传递函数为

$$G_{co}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{(s+0.018\pm0.954\mathrm{j})}{s^2(s+0.02\pm\mathrm{j})}\tag{10.14}$$

注意到，零点会在复共轭极点附近出现。如果我们现在使用与前面相同的 PD 反馈，即

$$D_{c5}(s)=0.25(2s+1) \tag{10.15}$$

那么系统不仅会稳定，而且还会产生令人满意的响应(如果将 θ_1 作为输出)，这是因为谐振极点易被复共轭零点抵消。

图 10.25～图 10.27 所示的分别为该系统的频率响应、根轨迹和阶跃响应曲线。注意从图 10.27 中我们可以看到，阶跃响应有过高的超调量，这与传递函数前向通道中存在的补偿器零点有关。

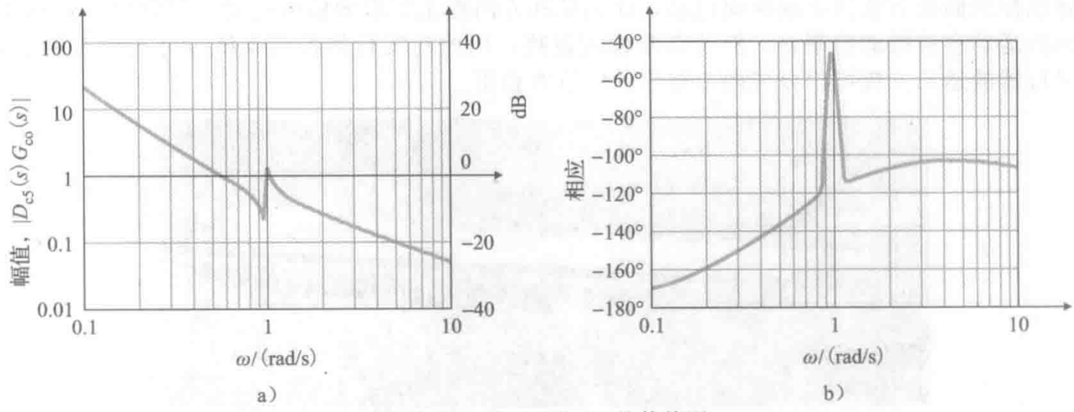


图 10.25　$D_{c5}(s)G_{co}(s)$的伯德图

将传感器从一个单体的位置移动到与执行器合体的位置，就可以得到一个非常简单的鲁棒设计。这个结果说明，为了获得良好的反馈控制，考虑传感器的位置和这个物理问题的其他特性是非常重要的。然而，最终的控制设计并不是为了实现星体跟踪器的瞄准。这一点可以从与图 10.27 所示阶跃响应对应的 θ_2 输出曲线中明显看出来。结果如图 10.28所示。

这些结果所提出的一种体系结构是，在卫星主体上放置一个不太精确的星体跟踪器来进行搜索和初始调节。然后为了获得优良的控制，切换到位于仪表组上的星体跟踪器，该星体跟踪器具有更长的调节时间。

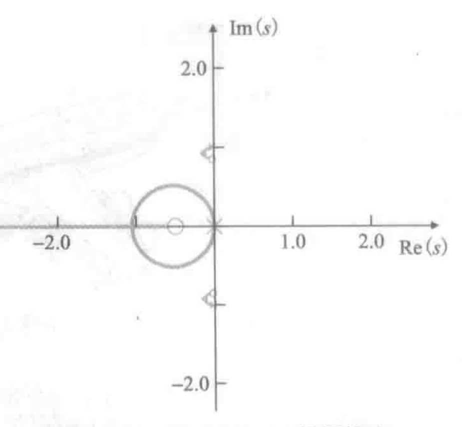


图 10.26　$D_{c5}(s)G_{co}(s)$的根轨迹

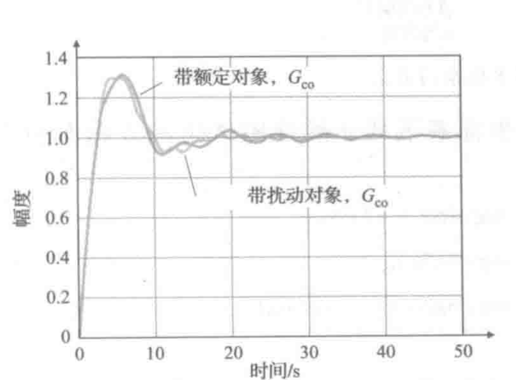


图 10.27　带有合体控制 $D_{c5}(s)G_{co}(s)$和 $D_{c5}(s)\hat{G}_{co}(s)$的系统的闭环阶跃响应

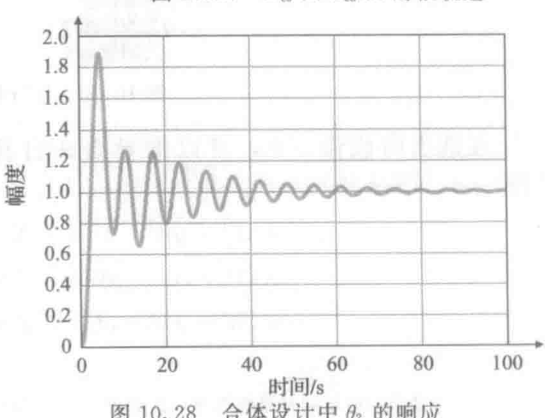


图 10.28　合体设计中 θ_2 的响应

727
~
728

10.3　波音747的横向和纵向控制

波音747(见图10.29)是一种大型宽体喷气式运输机。飞机运行时的相关坐标示意图如图10.30所示。波音747的(刚体)运动[一]线性方程组是八阶的，但可将其拆分为2个四阶方程组，即分别代表纵向运动扰动(见图10.30中的U，W，θ和q)和横向运动扰动(φ，β，r和p)。纵向运动由横轴(X)、竖轴(Z)和俯仰(θ，q)运动构成；而横向运动由滚转(φ，p)和偏航(r，β)运动构成。侧偏角β是飞机前向速度方向与机头方向之间的夹角。升降舵控制面和节流阀影响纵向运动，而副翼和方向舵主要影响横向运动。尽管横向运动和纵向运动会有微弱的耦合，但这点常常被忽略，因此对飞行器控制系统设计或增稳而言，飞行器的运动方程可以分成两个解耦的四阶方程组。

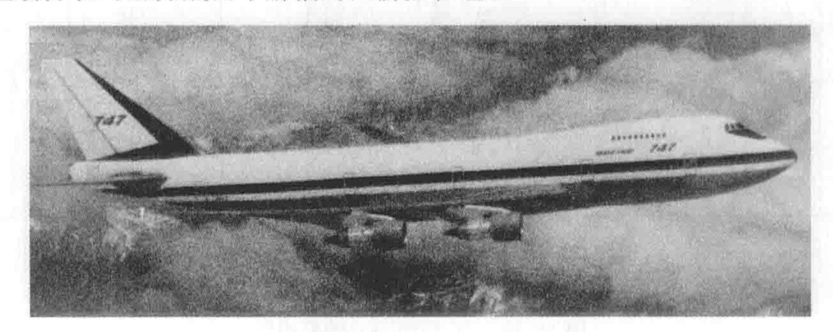


图10.29　波音747

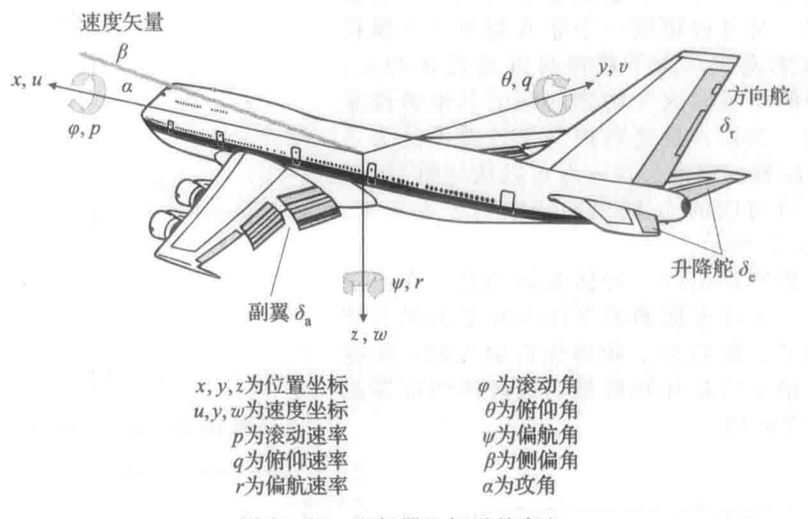


图10.30　飞行器坐标系的定义

在适当的假设下[二]，可以推导出在自身坐标系下的非线性刚体运动方程布顿森(Bryson，1994年)：

$$
\begin{aligned}
m(\dot{U}+qW-rV) &= X-mg\sin\theta+\kappa T\cos\theta \\
m(\dot{V}+rU-pW) &= Y+mg\cos\theta\sin\varphi \\
m(\dot{W}+pV-qU) &= Z+mg\cos\theta\cos\varphi-\kappa T\sin\theta
\end{aligned}
\tag{10.16}
$$

[一] 对于飞行器运动方程的推导，读者可以参考Bryson(1994年)、Etkin和Reid(1996年)、和McRuer等人(1973年)的相关著作。

[二] $x-z$是关于质心对称的机体轴平面。

$$I_x\dot{p} + I_{xz}\dot{r} + (I_z - I_y)qr + I_{xz}qp = L$$
$$I_y\dot{q} + (I_x - I_z)pr + I_{xz}(r^2 - p^2) = M$$
$$I_z\dot{r} + I_{xz}\dot{p} + (I_y - I_x)qp - I_{xz}qr = N \qquad (10.17)$$

其中：m 为飞行器的质量；$[U, V, W]$为质心速度的机体轴线分矢量；

$$\beta = \arctan\left(\frac{V}{U}\right)$$

$[U_0, V_0, W_0]$为参考速度；$[p, q, r]$为飞行器角速度的机体轴线分矢量；$[X, Y, Z]$为关于质心的机体轴线空气动力；$[L, M, N]$为关于质心的机体轴线空气动力扭矩；g_0 为单位质量的重力；I_i 为轴体惯量；(θ, φ)为飞行器机体的欧拉俯仰角和滚转角；V_{ref}为参考飞行速度；T 为推进力的合力；κ 为推进力与机体 x 轴的夹角。

对上述方程组的线性化可按如下步骤进行：在稳态的垂直、水平以及匀速飞行的条件下，$\dot{U}=\dot{V}=\dot{W}=\dot{p}=\dot{q}=\dot{r}=0$。此外，假定在任意的轴向上无转动以便使得 $p_0=q_0=r_0=0$，并且当机翼保持水平时，$\varphi=0$。然而，为了给机翼提供抵消飞行器重力的升力，系统将存在一个攻角，因此，$\theta_0\neq 0$ 且 $W_0\neq 0$，其中，

729 ~ 730

$$U = U_0 + u$$
$$V = V_0 + v \qquad (10.18)$$
$$W = W_0 + w$$

稳态速度机体轴线分矢量为

$$U_0 = V_{\text{ref}}\cos\theta_0$$
$$V_0 = 0(\beta_0 = 0) \qquad (10.19)$$
$$W_0 = V_{\text{ref}}\sin\theta_0$$

正如图 10.31 所示。根据这些条件，求得平衡(见第 9 章)方程为

$$0 = X_0 - mg_0\sin\theta_0 + \kappa T\cos\theta_0$$
$$0 = Y_0$$
$$0 = Z_0 + mg_0\cos\theta_0 - \kappa T\sin\theta_0$$
$$0 = L_0$$
$$0 = M_0$$
$$0 = N_0 \qquad (10.20)$$

图 10.31　稳态飞行条件

根据假设(布顿森，1994 年)

$$(v^2, w^2) \ll u^2$$
$$(\varphi^2, \theta^2) \ll 1$$
$$(p^2, q^2, r^2) \ll \frac{u^2}{b^2} \qquad (10.21)$$

其中：b 代表翼展。方程组式(10.16)和式(10.17)中许多非线性项都可以被忽略。将式(10.20)代入非线性运动方程中，能够得到一组在定速、垂直、水平飞行状态下描述微小偏差的线性扰动方程。那么，运动方程就可以分成互不相关的两部分：纵向运动方程和横向运动方程。

对于线性化的纵向运动，其结果为

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{w}\\ \dot{q}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_0 & -g_0\cos\theta_0 \\ Z_u & Z_w & U_0 & -g_0\sin\theta_0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ w\\ q\\ \theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}X_{\delta_e}\\ Z_{\delta_e}\\ M_{\delta_e}\\ 0\end{bmatrix}\delta_e \qquad (10.22)$$

其中：u 为飞行器 x 轴方向的前向速度摄动(见图 10.30)；w 为在 z 轴方向上的速度扰动

(也与攻角方向的扰动成正比，即 $\alpha=\frac{w}{U_0}$)；q 为 y 轴正向的角速度或俯仰速度；θ 为来自参考值 θ_0 的俯仰角扰动；X_{u,w,δ_e} 为 x 轴方向上的空气动力对摄动量 u、w 和 δ_e 的偏微分[㊀]；$Z_{u,w,\delta e}$ 为 z 轴方向上的空气动力对摄动量 u、w 和 δ_e 的偏微分；M_{u,w,q,δ_e} 为空气动力(俯仰)力矩对摄动量 u、w、q 和 δ_e 的偏微分；δ_e 为俯仰控制可移动尾部或“升降舵”的角。

731～732

方程中的 W_{0q}，U_{0q} 项是由机体固定(旋转)参考机架的角速度产生的，并且可直接从式(10.16)左侧获得。.

为了确定高度的变化，我们需要在纵向运动方程中增加如下等式：

$$\dot{h}=V_{\mathrm{ref}}\sin\theta-w\cos\theta \tag{10.23}$$

该等式将会衍生出一个线性化的高度方程：

$$\dot{h}=V_{\mathrm{ref}}\theta-w \tag{10.24}$$

将其增加到等式(10.22)中，可以得到一个增广的运动方程。

对于线性化的横向运动，结果如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_v & -U_0 & V_0 & g_0\cos\theta_0\\ N_v & N_r & N_p & 0\\ L_v & L_r & L_p & 0\\ 0 & \tan\theta_0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \varphi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}Y_{\delta_r} & Y_{\delta_a}\\ N_{\delta_r} & N_{\delta_a}\\ L_{\delta_r} & L_{\delta_a}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_r\\ \delta_a\end{bmatrix} \tag{10.25}$$

其中：β 为侧偏角，可定义为$\frac{v}{U_0}$；r 为偏航速度；p 为滚转速度；φ 为滚转角；Y_{v,δ_r,δ_a} 为 Y 轴方向上的空气动力对摄动量 β、δ_r、和 δ_a 的偏微分；$N_{v,r,p,\delta_r,\delta_a}$ 为空气动力(偏航)力矩常微分；$L_{v,r,p,\delta_r,\delta_a}$ 为空气动力(滚转)力矩常微分；δ_r 为舵偏转；δ_a 为副翼偏转。

下面将讨论横向动态增稳系统设计，即所谓的偏航阻尼器，以及影响纵向运动的自动驾驶仪。

△10.3.1　偏航阻尼器

步骤 1　理解控制过程及其性能指标。具有后掠翼的飞行器在横向运动模态下会存在一种轻微阻尼的自然倾向。在典型的商务飞行器巡航速度和高度控制中，其相应的动态模型是非常难控制的，这就导致几乎每一个具有后掠翼的飞行器都有一个反馈系统来辅助飞行员控制其飞行。因此，我们的系统控制目标就是修正飞行器固有的动态性能，以便飞行员能够控制其飞行[㊁]。研究表明，飞行员喜欢驾驶自然频率为 $\omega_n\leqslant 0.5$，阻尼比 $\zeta\geqslant 0.5$ 范围的飞行器。若飞行器的动态性能指标不符合上述要求，则通常认为是不宜飞行或者说是不可接受的。飞行员作为闭环系统的重要组成部分，我们希望使他(她)的工作尽可能的简单。综上所述，系统的技术指标就是在满足这些约束条件下实现横向动态性能。

733

步骤 2　选择传感器。飞行器运行时最易测量的是角速度。飞行器的侧偏角可通过风向标装置进行测量，但是对系统的镇定性而言，其所测量的信号包含了更多的噪声，更不可靠。在横向运动中，涉及了旋转角速度和偏航角速度。欠阻尼横向模态的研究表明偏航角速度起着主导作用，所以测量偏航角速度是系统设计的逻辑出发点。直到 20 世纪 80 年代早期，偏航角速度的测量还是由一个带有高速旋转小转子的陀螺仪完成的，该陀螺仪能输出一个与飞行器偏航角速度成正比的电信号。而从 20 世纪 80 年代早期之后，大多数新型的飞行器系统都依赖于一个激光装置(称为环形激光陀螺仪)来对偏航角速度进行测量。在该装置中，两束激光沿着相反的方向穿过一个闭合回路(通常为一个三角形装置)。由于

㊀ X，Z 和 M 是常微分，并由风道试验和飞行试验确定。

㊁ 这种模型是很难用手动来控制的，如果偏航阻尼器在巡航过程中出现故障，那么飞行员应该根据指示降低飞机的高度，减慢飞行的速度，以便使得模型更容易控制。

这个三角形装置旋转，测得的两束激光前后便存在频移，从而可根据测量频移来测量旋转速度。该装置与各种各样的旋转转子陀螺仪相比，它的移动部件更少、费用更低，并且可靠性更高。

步骤 3　选择执行器。方向舵和副翼这两个空气动力学表面会影响飞行器的横向运动(见图 10.30)。偏航阻尼器的作用可使之稳定，欠阻尼偏航模态最受方向舵的影响。因此，本设计的逻辑出发点是应用单一控制输入，并且最好选用方向舵作为执行器。液压装置被普遍应用到太空飞行器中，以便为其提供推动空气动力学表面的动力。目前还没有研究出同时具备高耐力、高速度以及重量小的装置来满足控制空气动力学表面的驱动器。另一方面，在飞行器着陆前缓慢展开的低速襟翼是典型的由带有陀螺齿轮的电动机驱动的。而对于没有自动驾驶仪的小型飞行器而言，根本不需要执行器；飞行器的操作杆通过电缆直接与空气动力学表面相连，从而所有促使翼面移动的力都是由飞行员来控制的。

步骤 4　建立线性模型。假设波音 747 在 40 000ft 的高空以 $U_0=774\text{ft/s}$[㊀](0.8 马赫[㊁])的额定速度航行(Heffley and Jewell，1972 年)，根据步骤 3，选择方向舵作为执行器，则飞行器横向扰动方程为

734

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0558 & -0.9968 & 0.0802 & 0.0415\\ 0.598 & -0.115 & -0.0318 & 0\\ -3.05 & 0.388 & -0.4650 & 0\\ 0 & 0.0805 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \varphi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.00729\\ -0.475\\ 0.153\\ 0\end{bmatrix}\delta_r$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \varphi\end{bmatrix}$$

其中：β 和 φ 以 rad 为单位；r 和 p 以 rad/s 为单位。用 Matlab 的 ss2tf 函数可以得到传递函数如下：

$$G(s)=\frac{r(s)}{\delta_r(s)}=\frac{-0.475(s+0.498)(s+0.012\pm 0.488j)}{(s+0.0073)(s+0.563)(s+0.033\pm 0.947j)} \tag{10.26}$$

根据系统传递函数可知，系统存在两个稳定的实极点和一对稳定的复数极点。首先需要注意的是，系统低频增益为负，这与一个简单的物理事实相对应，即正向或者顺时针转动方向舵能够引起负向或者逆时针的偏航速度。换句话说，左转方向舵(顺时针)，飞行器的机头将会向左旋转(逆时针)。相应于复数极点的自然运动称为荷兰滚；这个名字来源于一个在荷兰冰冻运河上滑冰的人的动作。相应于稳定实极点的运动称为**螺旋模式**($s_1=-0.0073$)和**滚动模态**($s_2=-0.563$)。从系统的极点可以看出，为了使飞行器易于操控，需要修正的不良模态是荷兰滚，其对应的极点是 $s=-0.033\pm 0.95j$。此时根轨迹存在一个可以接受的频率，但是其阻尼比 $\zeta\approx 0.03$，远小于要求的 $\zeta\approx 0.5$。

步骤 5　尝试超前滞后或 PID 设计。作为设计过程中的首次尝试，我们将考虑偏航角速度对方向舵产生的比例反馈。以反馈增益为参数的根轨迹如图 10.32所示，其频率响应如图 10.33 所示。从图中可以发现，$\zeta\approx 0.45$ 是可以实现的，并且可以计算出其所对应的增益约为 3.0。

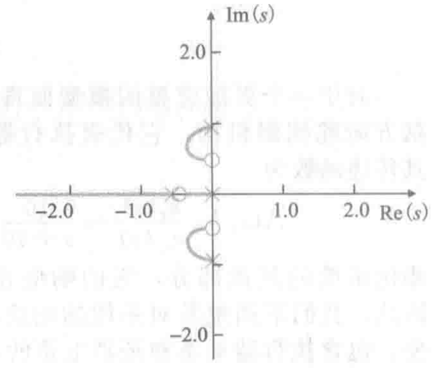
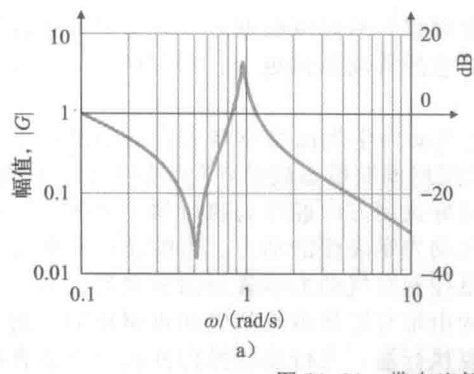


图 10.32　带有比例反馈的偏航阻尼器的根轨迹

㊀ 1ft/s=0.3048m/s。

㊁ 马赫是表示速度的量词，又叫马赫数，1 马赫即 1 倍音速。



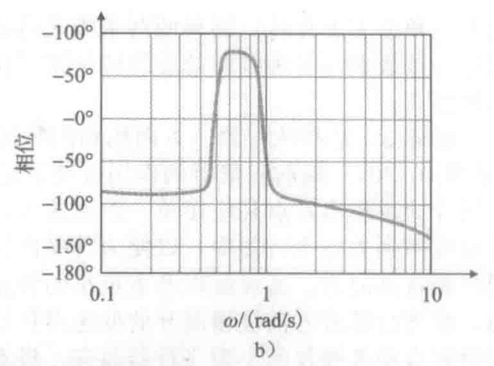


图 10.33 带有比例反馈的偏航阻尼器的伯德图

然而，当偏航角速度为常值时，这个反馈会在平稳转向期间产生一个不利的情况：为了获得相同的偏航角速度，系统必须引入一个相比于开环系统中更大的稳态输入，这是因为该反馈产生了一个与偏航角速度方向相反且稳定的方向舵输入。这个难题可以通过削弱直流反馈来解决(也就是"抵消"反馈)。可以通过在反馈中插入

$$H(s)=\frac{s}{s+1/\tau}$$

来实现，当频率高于 $1/\tau$ 时，传递偏航角速度反馈，而在直流时不提供任何反馈。因此，在稳定转向期间，阻尼器将不会提供任何校正。图 10.34 给出了带有抵消电路的偏航阻尼器的框图。

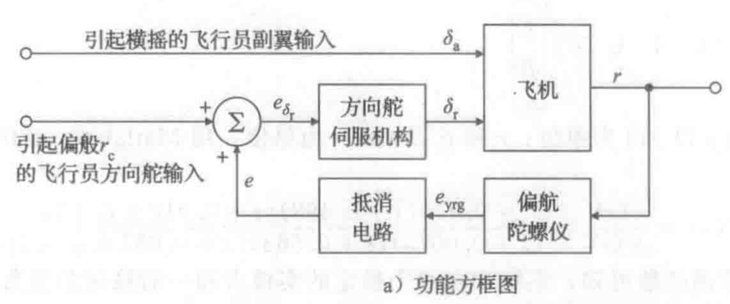


图 10.34 偏航阻尼器

对于一个更加完整的模型而言，还应该包括方向舵伺服机构，它代表执行器动态性能，其传递函数为

$$A(s)=\frac{\delta_r(s)}{e_{\delta_r}(s)}=\frac{10}{s+10}$$

相比系统的其他部分，它的响应速度快得多，因此，我们不期望其对系统的响应有太大的改变。包含执行器动态和抵消电路的系统在 $\tau=3$ 时的根轨迹如图 10.35 所示。从根轨迹中可以看出，偏航角速度反馈的引入(包含抵消电路)

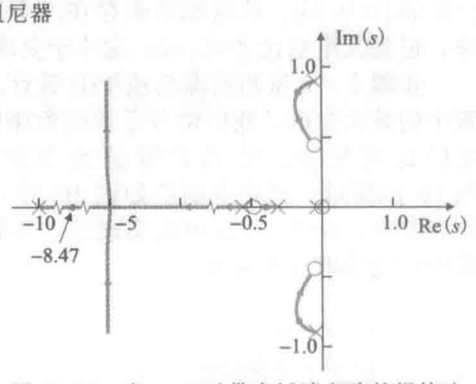


图 10.35 在 $\tau=3$ 时带有抵消电路的根轨迹

使得系统的阻尼比从0.03增加到了0.35左右。对应的系统频率响应如图10.36所示。在初始条件$\beta_0=1^\circ$，根轨迹增益为2.6时，闭环系统的响应如图10.37所示。为了参考比较，我们也给出了不带任何反馈的偏航角速度响应曲线。尽管通过带有抵消电路的偏航角速度反馈会明显改善最初的飞行器控制，但是其响应并不像初始指标要求那样好。为了进一步提高系统的性能，可以使用其他的增益值或者引入更为复杂的补偿环节，这里不再赘述。



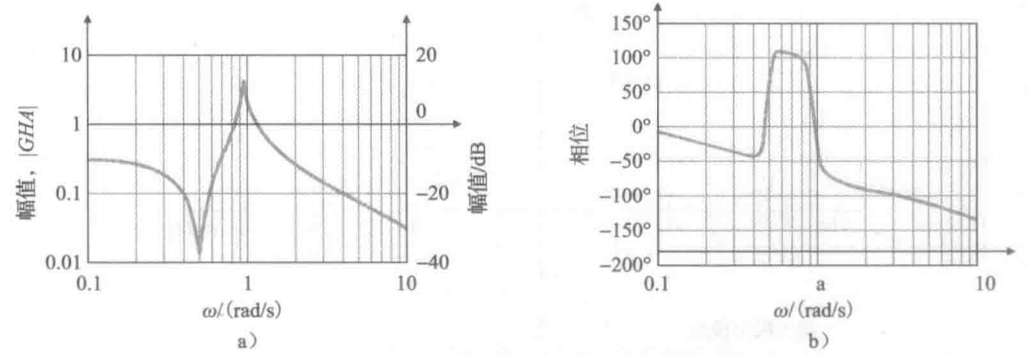


图10.36　包含抵消电路和执行器的偏航阻尼器的伯德图

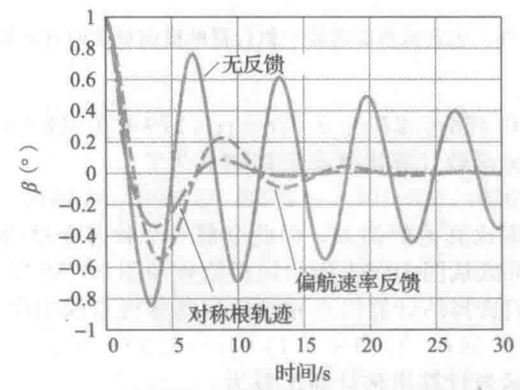


图10.37　在$\beta_0=1^\circ$时，偏航阻尼器和抵消电路的初始条件响应及对称根轨迹设计

步骤6　评估/修正被控对象。解决的方法是应用可以产生大阻力补偿的非后掠型机翼。　738

步骤7　尝试使用极点配置进行最优设计。如果我们通过增加执行器与抵消电路来扩展系统动态模型，那么可以得到相应的状态变量形式如下：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\varphi}\\ \dot{x}_{u0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.0729 & -0.0558 & -0.997 & 0.0802 & 0.0415 & 0\\ -4.75 & 0.598 & -0.1150 & -0.0318 & 0 & 0\\ 1.53 & -3.05 & 0.388 & -0.465 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.0805 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.333\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_A\\ \beta\\ r\\ p\\ \varphi\\ x_{u0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}e_{\delta_r}$$

$$e=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_A\\ \beta\\ r\\ p\\ \varphi\\ x_{u0}\end{bmatrix}$$

其中：e_{δ_r} 是执行器的输入；e 是抵消电路的输出。扩展后系统的对称根轨迹如图 10.38 所示。如果从对称根轨迹中选择状态反馈极点使得复数根有最大的阻尼比($\zeta=0.4$)，那么我们有

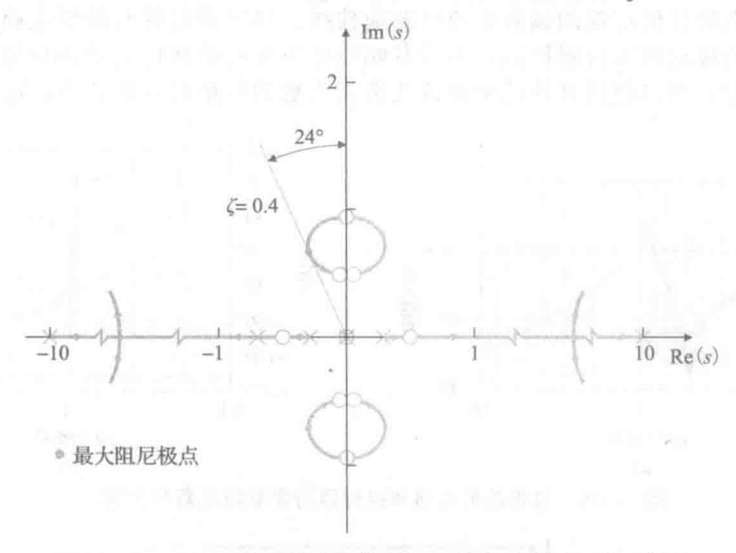


图 10.38　包含抵消滤波器和执行器的横向动态的对称根轨迹

pc = [−0.0051; −0.468; 0.279 + 0.628 * j; 0.279 − 0.628 * j; −1.106; −9.89]

然后，用 Matlab 的 place 函数计算出状态反馈增益为

$$\boldsymbol{K} = [1.059 \quad -0.191 \quad -2.32 \quad 0.0992 \quad 0.0370 \quad 0.486]$$

注意矩阵 $\boldsymbol{K}$ 中第三个元素比其他的都大，因此全部 6 个状态变量的反馈本质上与 r 的比例反馈是一样的。这一点可以从图 10.31 所示的根轨迹和图 10.38 所示的对称根轨迹的相似性明显地看出。如果我们选择估计器极点相应比控制器极点的响应快 5 倍，那么

pe = [−0.0253; −2.34; −1.39 + 3.14 * j; −1.39 − 3.14 * j; −5.53; −49.5]

再次用 Matlab 的 place 函数计算出估计器增益为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 25.0 \\ -2044 \\ -5158 \\ -24\,843 \\ -40\,113 \\ -15\,624 \end{bmatrix}$$

从式(7.177)可知，补偿装置的传递函数为

$$D_c(s) = \frac{-844(s+10.0)(s-1.04)(s+0.974\pm 0.559j)(s+0.0230)}{(s+0.0272)(s+0.837\pm 0.671j)(s+4.07\pm 10.1j)(s+51.3)} \tag{10.27}$$

图 10.37 也给出了初始条件为 $\beta_0=1°$ 时偏航角速度的响应。从根轨迹中可以清楚地看到，对称根轨迹方法可以改善系统的阻尼，这一点已被系统暂态响应中减少的振荡行为所证实。但是，系统性能改善的同时也要付出相应的代价。注意到补偿装置的阶数从最初设计的一阶升至六阶(见图 10.33)，同时设计过程中的抵消电路是通过使用控制器-估计器-对称根轨迹方法获得的。

如今在飞行器中所使用的偏航阻尼器普遍是通过抵消电路或是对设计进行较小修改来向方向舵提供偏航角速度比例反馈的。在不考虑系统复杂性的情况下，可以通过全状态反馈及状态估计的最优设计方法实现系统的性能改善。

也许，对于改善设计而言，一个更富有成效的方法是在方向舵的基础上，将副翼表面

也作为控制变量。

步骤 8 和步骤 9　验证设计。只要飞行器运动小到执行器和翼面没有达到饱和状态，那么飞行器运动的线性模型便是准确无误的。为了处理大的暂态现象，执行器的尺寸要从安全的角度选择，这将会使得执行器饱和现象极少出现。因此，基于线性分析的设计是相当精确的，所以不需要进行非线性的仿真和进一步地设计验证。然而，飞行器制造商在拿到联邦航空管理(FAA)许可证可以载客之前，必须在各种可能的飞行条件下对飞行器进行广泛的非线性仿真和飞行试验。

739～740

△10.3.2　定高度自动驾驶仪

步骤 1　理解控制过程及其性能指标。飞行员的众多任务之一便是保持一个指定的飞行高度。为了避免飞行器之间的相互碰撞，规定向东飞行的飞行器高度为 1000ft 的奇数倍，而向西飞行的飞行器高度为 1000ft 的偶数倍。因此，飞行员必须将飞行器的飞行高度的误差控制在 100ft 范围内变化。一个训练有素、细心的飞行员可以轻松地通过手动操作将飞行器高度控制在正负 50ft 的波动范围内，并且空中交通管制员也希望飞行员保持这种裕度。然而，由于这项任务需要耗费飞行员大量的精力，所以先进的飞行器通常装有定高度自动驾驶仪来减轻飞行员的工作负担。这个系统本质上不同于偏航阻尼器，这是因为它的作用是在一定的时期内代替飞行员，而偏航阻尼器的作用却是辅助飞行员操控飞行器飞行。因此，动态性能指标并不要求飞行员喜欢飞机的“触觉”（飞机如何响应飞行员的控制操作）；相反，这种设计将为飞行员和乘客提供一种令他们都喜欢的飞行。系统的阻尼比仍需保持在 0.5 左右，但是为了保证平稳飞行，自然频率应远小于 $\omega_n=1\text{rad/s}$。

步骤 2　选择传感器。显而易见，系统需要某种装置去测量高度，这项任务最容易通过测量大气压强而完成。几乎从怀特(Wright)兄弟第一次飞行起，这个基本思想就被应用在所谓气压高度测量仪的设备中。这个装置由膜盒组成，位于自动驾驶仪之前，该膜盒的自由末端与一个指针相连，这个指针可以直接在表盘上显示高度。相同的膜盒概念被应用到目前的高度显示中，但是为了使信号能被自动驾驶仪所使用，需利用传感器将气压信号转化为电信号。

因为从控制升降舵的输入到高度控制的传递函数包含了 5 个极点[见式(10.30)]，所以反馈回路的稳定不可能通过简单的比例反馈来实现。因此，俯仰角速度 q 也将作为一个稳定反馈被使用；俯仰角速度可通过陀螺仪或环形激光陀螺仪测得，其与在偏航角速度测量中的使用方法一样。为了进一步地提高系统的稳定性，使用俯仰角反馈也是有帮助的。俯仰角可通过基于环形激光陀螺仪的惯性参考系统获得，或者通过速率积分陀螺仪获得。后一种装置与速度陀螺仪相似，但是由于结构不同，导致它的输出与飞行器的俯仰角 θ 和滚转角 φ 成正比。

步骤 3　选择执行器。在大多数飞行器的俯仰控制中，被典型使用的唯一空气动力学表面是升降舵 δ_e。升降舵被放置在水平尾翼上，这不仅使其很好地远离了飞行器的重力中心，而且也使得它的推力产生了一个俯仰角速度，因此就会有一个俯仰角，该俯仰角的作用是改变机翼的升降。在一些高性能的飞行器中，直接升力控制装置被安装在机翼上或者小型鸭翼面上(主翼前面的小翼)，其对飞行器产生的垂直力量速度远远快于翼尾的升降舵所产生的垂直力量速度。但是，基于保持一定高度的目的，我们只需考虑翼尾有升降舵表面的典型情况。

741

对于方向舵而言，液压执行器是移动升降舵表面的首选装置，这主要是因为它有着良好的推力/重量比。

步骤 4　建立线性模型。当质量为 637 000lb[1]的波音 747 飞机在 20 000ft[2]的高空以额定速度 $U_o=830\text{ft/s}$(0.8 马赫)水平飞行时，它的纵向摄动运动方程为

---

[1] 1lb＝0.453 592 37kg。

[2] 1ft＝0.3048m。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\delta_e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 820 & 0 & 0 \\ -0.000222 & -0.00153 & -0.668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -32.7 \\ -2.08 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e \tag{10.28}$$

其中：定高度自动驾驶仪的期望输出为

$$h = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} \tag{10.29}$$

并且

$$\frac{h(s)}{\delta_e(s)} = \frac{32.7(s+0.0045)(s+5.645)(s-5.61)}{s(s+0.003 \pm 0.0098\mathrm{j})(s+0.6463 \pm 1.1211\mathrm{j})} \tag{10.30}$$

该系统具有两对稳定的复极点和一个 $s=0$ 的极点。用 Matlab 的 eig 命令计算出的一对复极点 $-0.003 \pm 0.0098\mathrm{j}$ 称为**振荡模态**[⊖]，另一对复极点 $-0.6463 \pm 1.1211\mathrm{j}$ 称为**短周期模态**。

步骤 5 尝试超前滞后或 PID 控制器设计。设计的第一步，通常使用一个内环反馈将俯仰角速度 q 反馈给 δ_e，从而提高飞行器在短周期模态下的阻尼(见图 10.39)。用 Matlab 的 ss2tf 函数可获得从 δ_e 到 q 的传递函数为

742

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = -\frac{2.08s(s+0.0105)(s+0.596)}{(s+0.003 \pm 0.0098\mathrm{j})(s+0.646 \pm 1.21\mathrm{j})} \tag{10.31}$$

由等式(10.31)可知，q 反馈的内环根轨迹如图 10.40 所示。考虑到 k_q 是根轨迹参数，因此系统矩阵[式(10.28)]可修改为

$$\boldsymbol{A}_q = \boldsymbol{A} + k_q \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_q \tag{10.32}$$

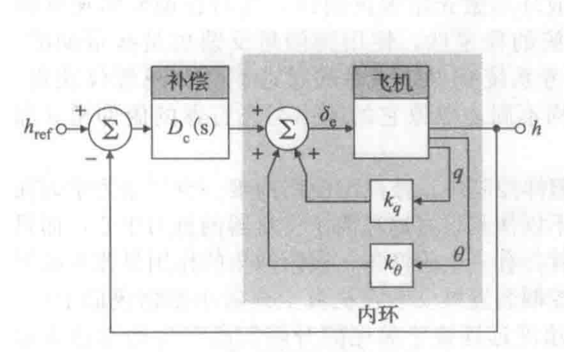


图 10.39 定高度反馈系统

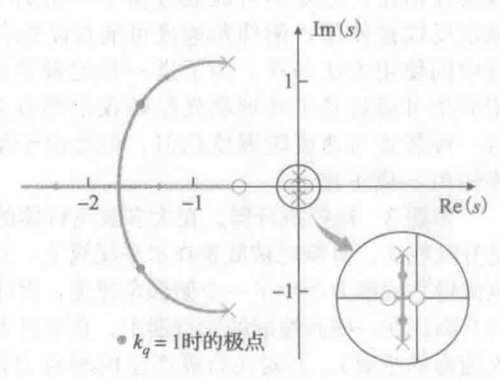


图 10.40 带有 q 反馈的定高度动态系统的内环根轨迹

其中：$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在式(10.28)中已定义；$\boldsymbol{C}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。选择一个适当的增益 k_q 的过程是一个迭代的过程。其选择步骤与第 5 章中讨论过的一样(回顾 5.6.2 小节中测速计反馈的例子)。如果我们选择 $k_q=1$，那么闭环极点将位于根轨迹的 $-0.0039 \pm 0.0067\mathrm{j}$

⊖ 这个名字由 F. W. Lanchester(1908 年)首次采用，他是第一个解析地去研究飞行器动态稳定性的人。很明显，这是一个不正确的希腊单词。

和 $-1.683\pm0.277\mathrm{j}$ 处，并且

$$\boldsymbol{A}_q=\begin{bmatrix}-0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0\\ -0.0941 & -0.624 & 783.3 & 0 & 0\\ -0.000222 & -0.00153 & -2.75 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0\end{bmatrix}\tag{10.33}$$

743

注意到，$\boldsymbol{A}_q$ 中只有第三列不同于 $\boldsymbol{A}$。为了进一步提高系统阻尼，我们发现反馈飞行器的俯仰角是很有用的。通过试验和分析误差，我们选择

$$\boldsymbol{K}_{\theta q}=[0\quad 0\quad -0.8\quad -6\quad 0]$$

为了反馈 θ 和 q，系统矩阵可写成如下形式：

$$\boldsymbol{A}_{\theta q}=\boldsymbol{A}_q-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_{\theta q}=\begin{bmatrix}-0.0064 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0\\ -0.0941 & -0.624 & 761 & -196.2 & 0\\ -0.0002 & -0.0015 & -4.41 & -12.48 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0\end{bmatrix}$$

其中：极点为 $s=0$，$-2.25\pm2.99\mathrm{j}$，-0.531，-0.0105。

至此，飞行器的内环已经非常稳定了。在水平飞行的过程中，不施加控制的飞行器也能自然地返回到平衡态，这已通过左半平面的开环根轨迹验证。为了实现 h，$\dot{h}$ 的外环反馈，内环稳定是必要的；此外，当飞行员希望通过输入命令直接控制 θ 时，在自动驾驶仪的姿态保持模态下，θ 和 q 的反馈可以被它们自己所使用。当 θ 为 2°(0.035rad) 大小的阶跃输入时，其相应的内环响应曲线如图 10.41 所示。在合适的位置加入内环后，系统以升降舵角为输入，以高度为输出的传递函数为

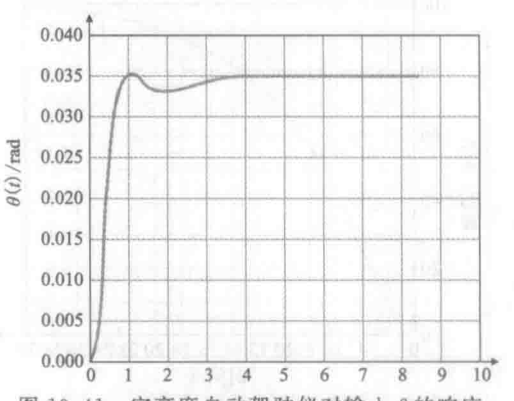


图 10.41　定高度自动驾驶仪对输入 θ 的响应

$$\frac{h(s)}{\delta_e(s)}=\frac{32.7(s+0.0045)(s+5.645)(s-5.61)}{s(s+2.25\pm2.99\mathrm{j})(s+0.0105)(s+0.0531)}\tag{10.34}$$

744

图 10.42 给出了系统的根轨迹，从图中可以看出，只通过自身的高度比例反馈不可能得到一个令人满意的设计。为了使系统稳定，可以使用 PD 控制器引入高度变化率的反馈。带有 h，$\dot{h}$ 反馈的系统根轨迹如图 10.43 所示。经过反复试验后，我们发现最好的 h，$\dot{h}$ 增益比例为 10∶1，也就是说，

$$D_{ce}(s)=K_h(s+0.1)$$

最终的设计是在 q，θ，$\dot{h}$ 和 h 反馈增益之间反复迭代的结果，显然是个漫长的过程。虽然这个试验设计成功了，但也需要通过对称根轨迹方法加快迭代过程。

步骤 6　评估/修正被控对象。在这不适用。

步骤 7　进行最优设计。系统的对称根轨迹如图 10.43 所示。如果，我们选择闭环极点为

$$\mathrm{pc}=[-0.0045;-0.145;-0.513;-2.25-2.98\mathrm{j};-2.25+2.98\mathrm{j}]$$

那么用 Matlab 的 place 函数，可以获得需要的反馈增益为

$$\boldsymbol{K}=[-0.0009\quad 0.0016\quad -1.883\quad -7.603\quad -0.001]$$

系统对输入 $h=100\mathrm{ft}$ 的阶跃响应如图 10.44 所示，相关的控制效果如图 10.45 所示。

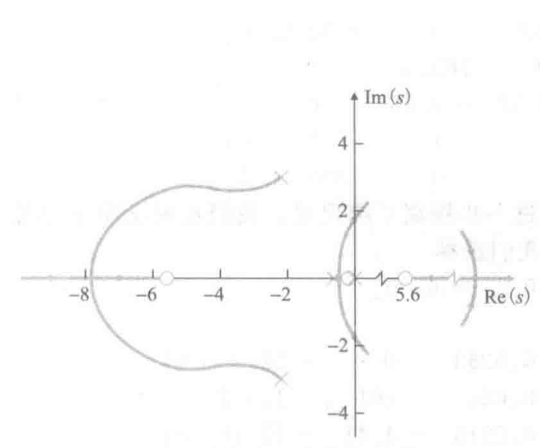


图 10.42 仅带有 h 反馈的 0°根轨迹

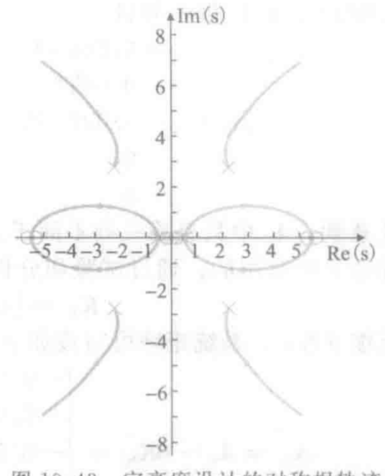


图 10.43 定高度设计的对称根轨迹

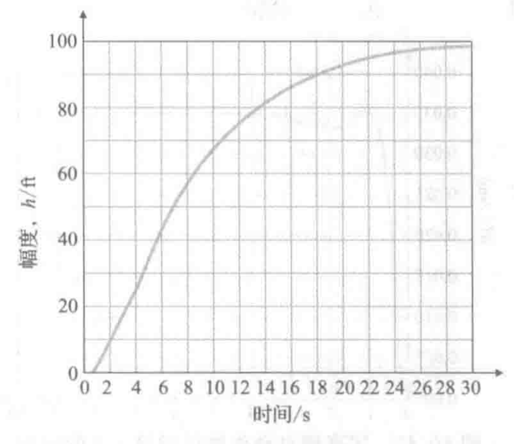


图 10.44 定高度自动驾驶仪对输入为 100ft 的阶跃响应

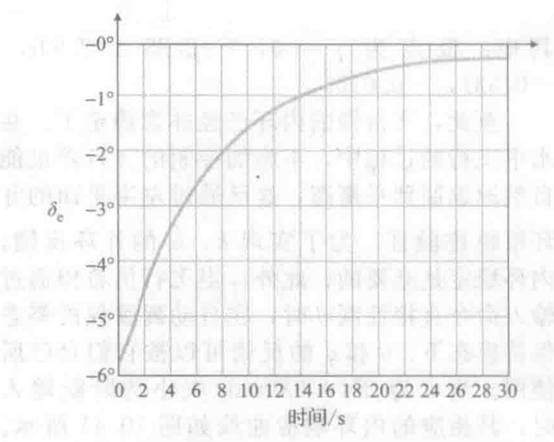


图 10.45 高度为 100ft 的阶跃输入控制效果

745 ~ 746

该设计是在考虑高度变化时线性模型是有效的假设下实施的。我们需要进行仿真来验证这点或者确定线性模型的有效范围。

步骤 8 和步骤 9 验证设计。参见 10.3.1 小节的步骤 7 与步骤 8。

对现今所生产的小型飞机自动驾驶仪来说，正如第 5 章所描述的那样，很有趣地注意到，对于内环而言，有些制造商仅使用 θ 反馈，而其他的制造商使用 q 反馈。θ 反馈使得系统的响应更快，而 q 反馈成本更低。当然，为了实现 h 反馈，两者都需要使用高度测量仪。

10.4 汽车发动机的空燃比控制

直到 20 世纪 80 年代，大多数的汽车发动机仍然用汽化器来检测燃油量，以使得汽油质量流量与空气质量流量之比，或说成空燃比(F/A)，保持在 1∶15 附近。汽化器利用空气流经文氏管时产生的压降来测量燃油量。该装置能够保持发动机以令人满意的状态运行，但是它在过去却允许 F/A 偏移量达到 20%。在联邦废气污染法规实施后，不允许排放过量的碳氢化合物(HCs)和过量的一氧化碳(CO)，因此 F/A 级别标准的不确定程度是不能被接受的。在 20 世纪 70 年代期间，汽车生产厂商改进了汽化器的设计和制造工艺，以使得它们的测量更精确，从而将 F/A 偏移量控制在 3%～5%。通过综合各种因素，这种提高 F/A 精度的措施有助于降低废气污染水平。然而，因为系统并没有测量进入到发动机中的混合气体F/A并进而将它反馈给汽化器，所以汽化器仍然是开环装置。在 20 世

纪 80 年代期间，为了大幅度提高 F/A 的精度，几乎所有的汽车制造商都转向反馈控制系统，这是为了降低废气污染程度而采取的一项必要措施。实际上，现阶段(2014 年)也使用相同的方案，以便安装在排气系统中的催化式排气净化器可以清除掉废气污染并且达到联邦政府制定的标准。

现在我们将再次使用 10.1 节所描述的循序渐进的设计方法，来为发动机控制设计一个典型的反馈系统。

步骤 1　理解控制过程以及其性能。为了达到废气污染指标，我们所选择的方法是使用催化式排气净化器，该装置能同时氧化过量的一氧化碳(CO)和未燃烧的 HC 以及减少过量的氮氧化合物含量(NO 和 NO_2 以及 NOx)。由于这种装置对三种污染物都有影响，因此通常称为三元催化器。当 F/A 与 1∶14.7 的化学计量配比相差较大时，该催化器就会失效；因此，需要一个反馈控制系统来维持 F/A 在期望值的正负 1% 内变化。F/A 反馈控制系统如图 10.46 所示。

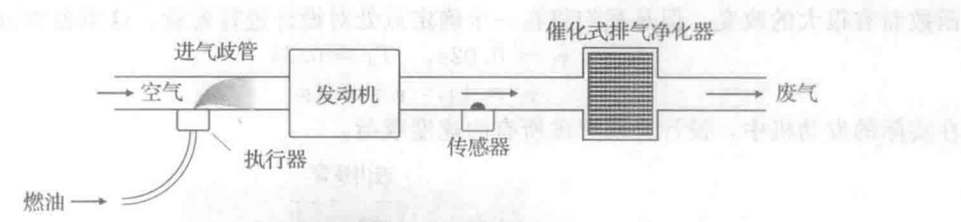


图 10.46　F/A 反馈控制系统

影响从废气中检测的 F/A 输出和在进气歧管中燃油/计量输入之间关系的动态因素有：(1)引入的燃油和空气混合物数量，(2)由于发动机中活塞行程所引起的周期延时，(3)废气从发动机运动到传感器所需的时间。以上因素很大程度上依赖发动机的转速和载荷。例如：发动机转速从 600r/min 变到 6000r/min。这些变化的结果是，依赖于操作环境，影响反馈系统行为的延时也会至少以 10∶1 的比例变化。由于司机需要通过加速踏板的变化来获得或多或少的动力(该变化会持续几分之一秒)，因此系统会经历一个暂态过程。理想条件下，反馈控制系统应该能够跟随上这些暂态变化。

步骤 2　选择传感器。废气传感器的出现与发展是一个关键的技术步骤，它使得通过反馈控制实现废气减排的这种想法成为可能。装置中的活性元素、锆氧化物放置在废气流中，在那里能产生一个电压，该电压是废气中氧含量的单调函数。F/A 值与氧气量有特定的关系。传感器的输出电压与 F/A 之间存在严重的非线性(见图 10.47)；几乎所有的电压变化都恰巧发生在 F/A 值处，并且在 F/A 值处，为了实现催化器的有效性能，反馈系统必然会运转。因此，当 F/A 在期望点(1∶14.7)时，传感器的增益将是非常高的，反之亦然。

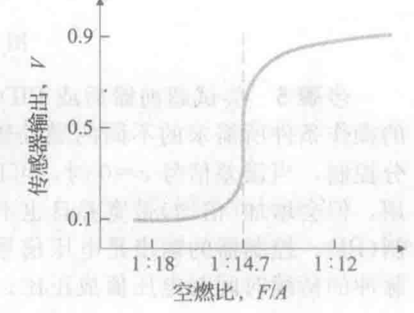


图 10.47　废气传感器的输出

尽管用于 F/A 反馈控制的其他类型传感器已经处于研发阶段，但迄今为止还没有找到性价比高并且具有很好的工作性能的传感器。目前所有的汽车制造商在汽车发动机的反馈控制系统中都是用锆氧化合物类型的传感器。

747
~
748

步骤 3　选择执行器。可通过汽化器或者燃油注入实现燃油计量。为实现 F/A 反馈系统，需要用电信号来调整燃油计量，这是因为传感器输出的是电信号。最初，为了提供这种能力，所设计的汽化器包含了一个可以调整大小的通气口，这个通气口可根据电信号误差大小来调整初始燃油的流量。但是，现如今汽车制造商通过燃油注入便可完成燃油量的测量。燃油注入系统天生就是典型的电控装置，因此只要其能够利用传感器的反馈信号，

就能轻易地通过 F/A 反馈进行燃油调节。如今，每一个气缸的入口都放有一个燃油注入器(称为多点注入)；而在过去，所有的气缸入口处共用一个大的燃油注入器(称为单点或者节流阀注入)。多点注入提供了更好的性能，这是因为燃油可以与发动机充分接触，并且对气缸分配更加合理。燃油与发动机更接近可以减少延时，因此能够产生更好的电动机响应，使得废气污染更低。

步骤 4　建立线性模型。从图 10.47 可以看出，传感器具有非常严重的非线性，因此基于线性化模型的设计工作需要额外小心。图 10.48 给出了系统的框图，其中传感器的增益为 K_s。进气歧管动态模型中的时间常数 τ_1 与 τ_2 分别代表了燃油呈气体或小滴状态时的快速流动和在歧管壁上呈液体薄膜状态时的慢速流动。时延是两部分之和：(1)活塞经历四个冲程，即从进气过程到排气过程，所需的时间；(2)废气从发动机移动到 1ft 外的传感器所需的时间。为了解决发生在排气歧管中的气体混合现象，这个过程也需要含有一个带有滞后时间常数为 τ 的传感器。尽管时间常数和延迟时间会因为其是发动机载荷和转速的函数而有很大的改变，但是我们将在一个确定点处对设计进行检验，这里各参数分别取为

$$\tau_1 = 0.02\text{s}, \quad T_d = 0.2\text{s}$$
$$\tau_2 = 1\text{s}, \quad \tau = 0.1\text{s}$$

在实际的发动机中，设计必须考虑所有的速度载荷。

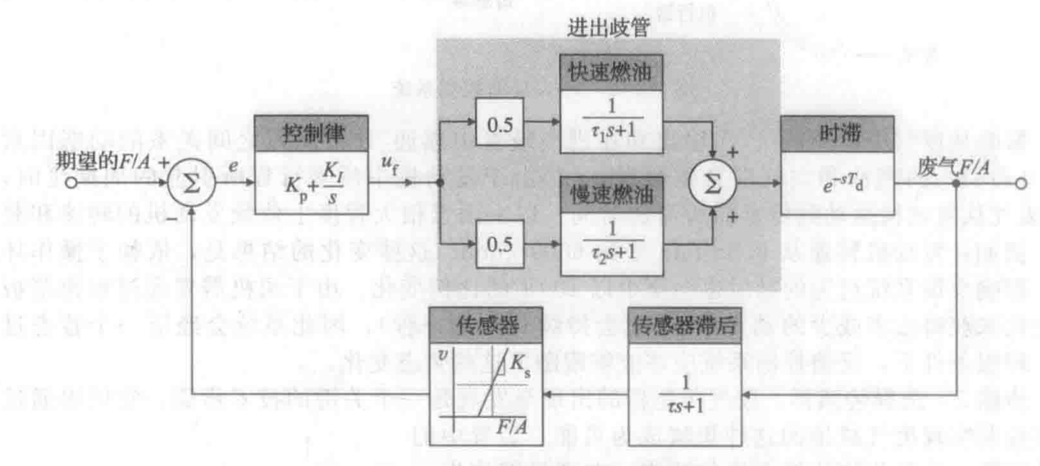


图 10.48　F/A 控制系统的框图

步骤 5　尝试超前滞后或 PID 控制器设计。由于给定了严格的误差指标和发动机变化的操作条件所需求的不同的燃油输入量 U_f，引入一个积分控制项是必不可少的。通过积分控制，当误差信号 $e=0$ 时，可以提供任何需求的稳态 U_f。附带的比例环节，尽管不常用，但会增加(倍增)带宽并且也不会降低稳态特性。在这个例子中，我们采用比例积分控制(PI)。控制器的输出是电压信号，它可以驱动注入器的脉冲发生器产生一个燃油脉冲，脉冲的持续时间与电压值成正比。该控制器的传递函数可以写成

$$D_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = \frac{K_p}{s}(s+z) \tag{10.35}$$

其中：

$$z = \frac{K_I}{K_p}$$

且 z 可以根据需要选择。

首先，我们假设传感器是线性的，且可以用增益 K_s 来表示。然后，选择使得系统具有良好稳定性与良好响应的 z 值。图 10.49 给出了 $K_sK_p=1.0$、$z=0.3$ 时系统的频率响应，而图 10.50 给出了 $z=0.3$ 时以 K_sK_p 为参数的系统根轨迹。两种分析方式均表明当

K_sK_p 约为 2.8 时，系统是不稳定的。从图 10.49 可以发现，为了得到大约 60°的相位裕度，K_sK_p 应该在 2.2 左右。从图 10.49 中我们还可以发现其相应的穿越频率为 6rad/s(约为 1Hz)。从图 10.50 的根轨迹中可以证实这种备选方案将获得一个可被接受的阻尼比值($\zeta\approx0.5$)。

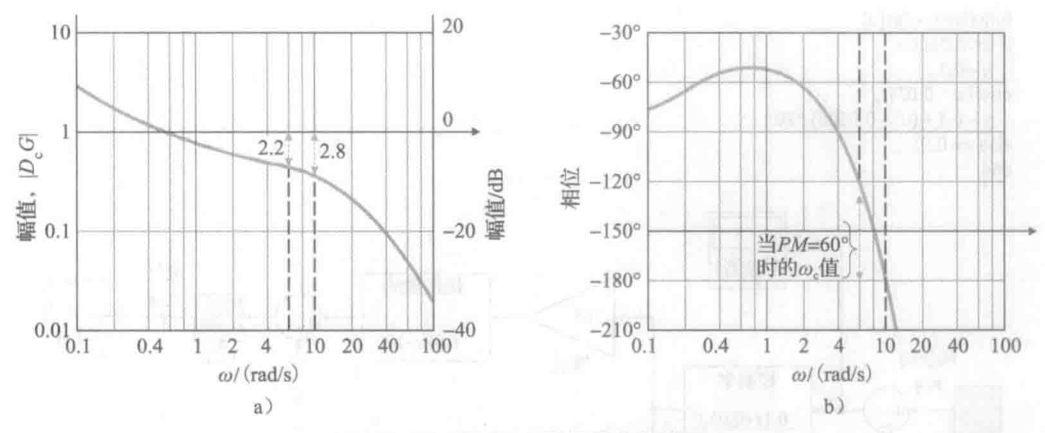


图 10.49　PI F/A 控制器的伯德图

虽然这种线性分析表明，在合适的带宽(大约 1Hz)下，使用 PI 控制器能够得到可以接受的稳定性，但由非线性传感器的特性(见图 10.47)可知，这是不可能实现的。值得注意的是，传感器的输出斜率在期望设定点附近是非常大的，因此将会产生一个非常大的 K_s 值。所以，当系统包含了高增益传感器的影响时，需要选用较小的控制器增益 K_p 来使得 K_sK_p 的值保持为 2.2。另一方面，一个在 $F/A=1:14.7(=0.068)$处产生使系统稳定的充分小的 K_p 值将对大幅度偏离设定点的暂态误差产生一个非常迟钝的响应，这是因为有效的传感器增益将会大幅降低。因此，为了使系统在任何情况下(除了仅在设定点处有微小干扰)都能获得令人满意的响应特性，我们必须解决传感器的非线性问题。对传感器初步的近似如图 10.51 所示。由于在设置点处实际的传感器增益与其近似值仍然有很大的差异，所以这种近似会产生一些与设定点处稳定性相关的错误结论；但是，在仿真过程中，这种近似对于确定初始条件的响应是有用的。

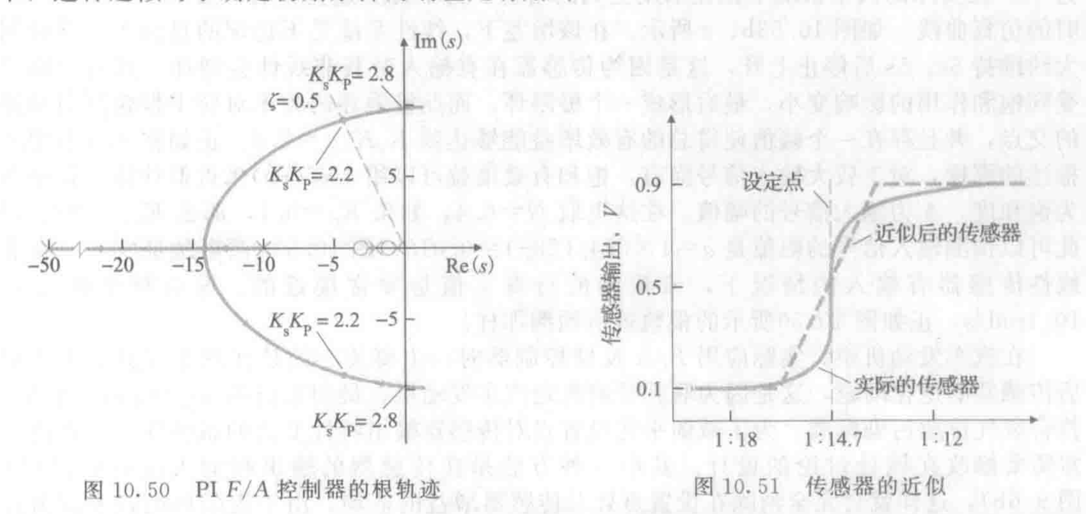


图 10.50　PI F/A 控制器的根轨迹　　图 10.51　传感器的近似

步骤 6　评估/修正被控对象。非线性传感器不是我们所期望的，但是我们还没有找到合适的线性传感器。

步骤 7　尝试最优控制器设计。系统的响应由传感器的非线性决定，且控制过程中的

任意微调都必须考虑该性质。此外，这个系统的动态模型相对来讲是比较简单的，而且也不见得最优设计方法会对 PI 控制器有任何的改进。因此我们将省略这一步。

步骤 8 仿真具有非线性的设计。在 Simulink 中实现的系统非线性闭环仿真如图 10.52 所示。用 Matlab 的 fas 函数表示图 10.52 所示的近似的非线性传感器特性。

```
function y = fas(u)
if u < 0.0606,
   y = 0.1 ;
elseif u < 0.0741,
   y = 0.1 + (u − 0.0606) *20;
else y = 0.9;
end
```

图 10.52 在 Simulink 中实现的闭环非线性仿真

如果采用如图 10.51 所示的近似传感器，并且令 $K_pK_s=2.0$，那么系统的误差曲线如图 10.53a 所示。误差信号在饱和状态大约持续 12.5s，一旦到达线性区时，其时间常数约为 5s。在实际的汽车系统中往往采用更大的增益。为了说明这些影响，给出了 $K_pK_s=6.0$ 时的仿真曲线，如图 10.53b、c 所示。在该增益下，线性系统是不稳定的且信号上升时间大约维持 5s。5s 后停止上升，这是因为传感器在有输入时其非线性会增加，其有效增益受到饱和作用的影响变小，最后形成一个极限环。而此极限环的频率对应于根轨迹与虚轴的交点，并且存在一个幅值使得总的有效增益能够达到 $K_pK_{s,eq}=2.8$。正如在 9.3 节中所描述的那样，对于较大输入信号而言，饱和有效增益可以用 $4N/(\pi a)$来近似计算，其中 N 为饱和度，A 为输入信号的幅值。在这里取 $N=0.4$，如果 $K_p=0.1$，那么 $K_{s,eq}=28$。因此可以预测输入信号的幅值是 $a=4\times0.4/(28\pi)=0.018$。图 10.53c 清晰地证实了，在非线性传感器有输入的情况下，该预测值与真实值是非常接近的。振荡频率也约为 10.1rad/s，正如图 10.50所示的根轨迹所预测那样。

在汽车发动机中，实际应用 F/A 反馈控制器时，主要关心的是在汽车行驶数千英里后传感器的退化问题，这是因为联邦政府规定汽车发动机在最初运行的 50 000mile 内必须符合废气排放污染标准。为了减弱平均设置点对传感器输出特性变化的敏感性，生产商常常需要修改在该处讨论的设计。其中一种方法是在传感器的输出端加入继电函数（见图 9.6b），这样就会完全消除在设置点处对传感器增益的依赖。由于极限环的频率仅由控制器的常数和发动机特性所决定，因此，稳态时的 F/A 平均精度也提高了。此外，F/A 的振荡也是可以接受的，这是因为它对汽车的影响微乎其微。实际上，在降低排放污染过程中，F/A 偏移对相关的催化操作是有益的。

749 ~ 753

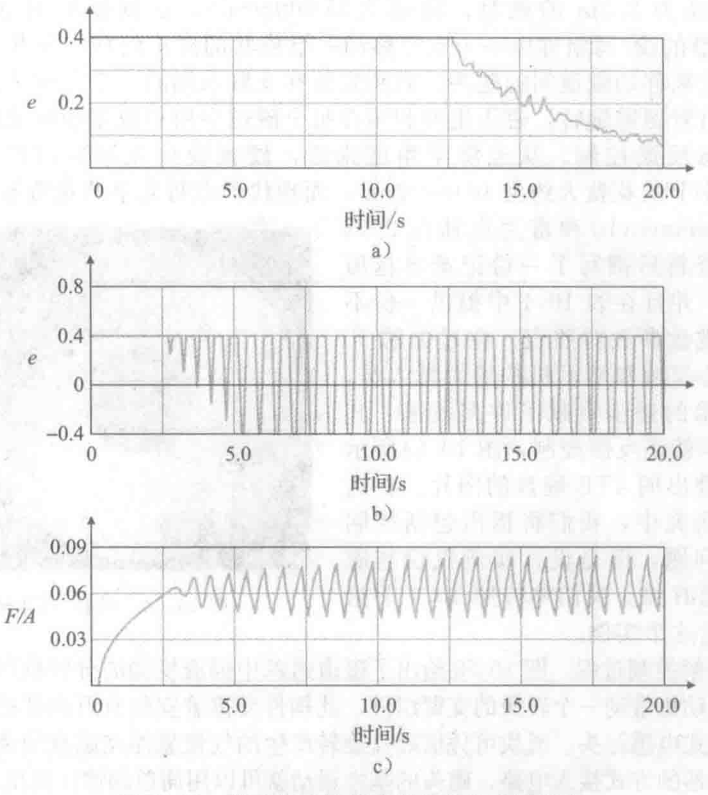


图 10.53　带有非线性传感器近似的系统响应

现代，在汽车的许多其他领域，反馈系统也得到了广泛应用。汽车内部的期望温度由乘客自行设置，并且该温度由一个反馈系统进行控制与保持。巡航控制系统已应用在汽车雷达系统中，它可将车距反馈给巡航系统，从而使得前后车辆保持一定的距离。人们正在研究一种方向操作系统，该系统通过车道标线传感器将采集到的信息反馈给汽车的转向系统，从而保持汽车在正确的车道上行驶。增稳系统采用基于加速器测量的差动制动使汽车在失控的状态下保持直行。这样的例子不胜枚举，在 Ulsoy、Peng 和 Cakmakci(2012 年)编写的书中有相关例子的描述。为了未来增加高速公路的运力，我们可能需要严格地控制高速公路上行驶的多排汽车之间的最小距离。这样的方案将是反馈控制的胜利，但是如果发生严重的交通事故，其必将对我们的法律系统提出严峻的考验。 754

10.5　硬盘读/写磁头组件控制

基于在硬盘上记录数据的第一代大容量存储设备是 IBM 公司在 1956 年推出的 350 RAMAC㊀模型，它由 50 个直径为 24in 的一堆铝制磁盘组成，并且用一种电磁材料封装。数据以 100B/in 存储到每英寸 20 条的同心轨道上。硬盘的转速为 1200r/min。有一个单一的读/写磁头组件安装在支臂上，它既可以在磁盘之间垂直移动，还可以在选定的磁盘上水平移动来达到需求的数据磁道。磁头借助空气轴承使其悬浮在磁盘的表面，它是从其固定装置上面的小孔里吹出的气流而形成的。磁头组件可通过升降机构固定在某一特定磁盘上，再通过支臂机构固定在某一特定磁道上。整个磁头组件由一台电动机驱动。硬盘拥有 5MB 的数据存储容量，但还必须考虑 36in 的宽度以保证最后的设备能通过。在硬盘设计领域技术领先的是，2000 年由希捷公司推出的一款专为笔记本电脑设计的磁介质硬盘，

㊀ RAMAC 是 Random Access Method of Accounting and Control 的缩写。

它拥有 3 个直径为 2.5in 的磁盘，转速为15 000r/min。这款硬盘的数据存储容量为18 350MB。硬盘的读/写组件由一个支臂移动一组梳状的磁头组成，梳状机构在每一面以旋转运动的方式来移动磁道间的磁头。磁头安装在支臂末端的一个万向节上并且悬浮于磁盘表面。为了沿着磁道旋转，磁头组件利用在每个磁道中用户数据扇区之间记录的样本位置数据进行动态反馈控制。从经济学角度来看，硬盘设计领域取得的进步是巨大的，RAMAC 每兆字节的花费大约为10 000 美元，而现代磁盘每兆字节花费不到1美分。阿布拉莫维奇(Abramovitch)和富兰克林在 2002 年参考了许多资料后撰写了一份记录卓越历史的简短概要，并且在表 10.1 中提供一份不同年代的一些磁盘参数对照表。在过去的 50 年中，来自工业领域和学术机构的大批人员，为硬盘存储技术的进步贡献了许多技术，其中一项授权技术就是反馈控制。图 10.54所示的为希捷公司推出的 4TB 硬盘的图片。在这个简短的实例研究中，我们将指出包括控制在内的一系列问题，但是设计实例仅仅与磁道跟踪这个问题有关。我们将按照 10.1 节给出的步骤来讨论这个实例。

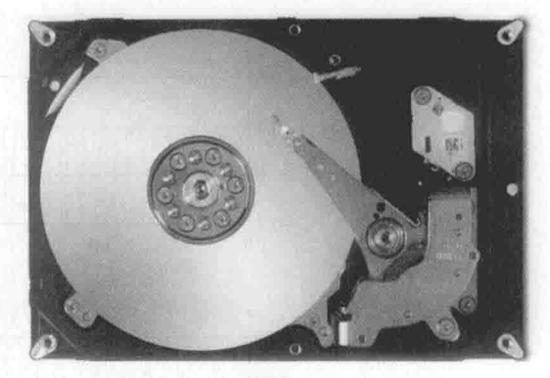


图 10.54 希捷 4TB 硬盘驱动器

步骤 1 理解控制过程。图 10.55 给出了磁道追踪中伺服机构的分解框图。该机构包括一个旋转的音圈电动机带动一个轻质的支臂组件，此构件支撑着安装有万向架的滑动器，它包括磁阻读头和薄膜式电感写头。滑块可凭借磁盘旋转产生的气流悬浮在磁盘的表面。功率放大器通常以电流放大器的方式接入电路，磁头的基本运动就可以用简单的惯性模型来表示：

755

$$G_0(s)=\frac{A}{Js^2} \tag{10.36}$$

其中：J 是总惯量；A 包括电动机力矩常数和放大器增益。整个结构十分灵巧方便，但是细节动作因为伴随着许多低阻尼模式而变得十分烦琐。该结构也会受到气流以及外壳振动所带来的影响。为便于控制设计，如下模型包含了一个简单的谐振模式：

$$G(s)=\frac{A}{Js^2}\frac{\left(2\zeta\frac{s}{\omega_1}+1\right)}{\left(\frac{s^2}{\omega_1}+2\zeta\frac{s}{\omega_1}+1\right)} \tag{10.37}$$

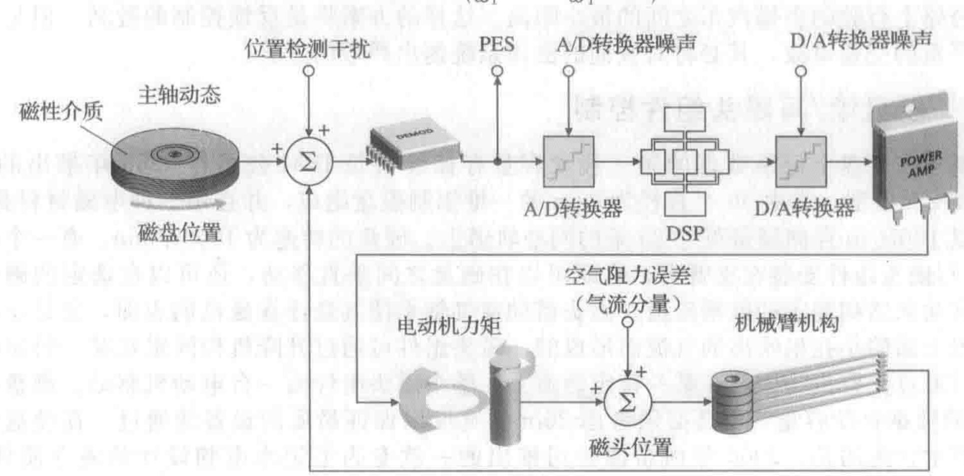


图 10.55 磁道跟踪模型的总体视图

表 10.3 硬盘驱动器参数

编号	年份	型号	容量	大小 (N/d)	每英寸磁道数	每英寸字节数 /(B/in)	每分钟转数 /(r/min)	旋转高度	磁头类型	传感器类型	执行器类型	寻道时间	附注
1	1956	IBM RAMAC	5MB	50/24″	20	100	1200	20μm	Air bearing	Detent	dc motor		The first hard disk
2	1962	IBM 1301	28MB	25/24″	50	520	1800		Flying head	Detent	Hydraulic piston	165ms	
3	1971	IBM 3330	100MB	11/14″	192	4040		1.2μm	Ferrite,	Dedicated surface	Linear voice coil flying	30ms	The first feedback
4	1973	3340 Winchester	70MB	4/14″	270	5600		0.5μm	Ferrite, flying	Dedicated surface	Linear voice coil		Low-mass heads
5	1979	IBM 3370	571MB	7/14″	635	12 134	2964	0.324μm	Thin film	Dedicated surface	Linear voice coil		
6	1979	IBM 3310	64.5MB	6/8″	450	8530				Hybrid, sector servo	Rotary voice coil	27ms	
7	1980	SeagateST506	5MB	4/5.25″	255	7690				Open loop	Stepper motor	170ms	5.25″ disk for PCs
8	1983	MaxtorXT1140	126MB	8/5.25″						Sector servo	Rotary voice coil		In-hub spindle motor
9	1991	IBM Corsair	1GB	8/3.5″	2238	58 874			MR head	Sector servo	Rotary voice coil		
10	1993	Seagate12 550	2.19GB	10/3.5″			7200			Sector servo	Rotary voice coil		
11	1997	IBMTravelstar	4GB	3/2.5″	12 500	211 000				Sector servo	Rotary voice coil		
12	2000	Seagate ST318451	18.3GB	5/2.5″	21.5k	343k	15 000		Thin-film/GMR	Sector servo	Rotary voice coil	3.9(r), 4.5(w)	First 15 000 RPM disk drive
13	2003	Seagate ST3300007	300GB	4/3.3″	105k	658k	10 000		Thin-film/GMR	Sector servo	Micro-actuator	4.9(r), 5.4(w)	First micro-actuators
14	2006	Seagate ST3300655	300GB	4/2.75″	125k	890k	15 000		Thin-film/GMR	Sector servo	Rotary voice coil	3.5(r), 4.0(w)	First perpendicular recording drive
15	2014	Seagate Barracuda	4000GB	4/3.75″	150k	1090k	7 200		Thin-film/TMR	Sector servo	Rotary voice coil	7.4(r), 8.5(w)	First SAS drive

GMR＝巨磁组磁头；TMR＝磁道磁组磁头。

其中：ω_1 为振荡频率，ζ 为阻尼比，在一定范围内可知。

磁头组件的运动控制有两种模式：一是寻道运动，即磁头在磁道与磁道之间运动；二是磁道追踪运动，即保持磁头悬浮在选定磁道的中心位置。在寻道模式下，控制性能的衡量标准是寻道的最小时间，理论上需要用“开关”或者“继电式”进行控制。[㊀]不同的单元有不同的最大可用力矩及其他一些严格规定的参数，为了能够使用相同的控制器对各单元进行控制，硬盘驱动采用的是继电式曲线跟踪技术，该技术可以使磁头组件在满力矩的状态下一直加速，直到速度达到力矩翻转曲线为止，该曲线与磁头到目标磁道的距离有关，并且在反馈控制下磁头按照这个曲线减速，最终达到目标磁道时速度为零。当曲线逼近理想的最小时间时，力矩开始减小，而曲线也发生转变，以使得电动机在最小的反转力矩下能追踪曲线。当达到目标磁道时，切换为磁道跟踪方式。在接近目标磁道时，为避免模式间的突然切换，伺服系统应平滑过渡到轨道跟踪模式，采用一种称为近似时间最优伺服(PTOS)的控制方法(详见第 9 章)。[㊁]

这些年来，作为一项成熟的技术，控制问题的属性已受到诸多发展趋势的影响。如表 10.3所示，磁盘变得越来越小，并且越来越坚硬和光滑。随着支臂组件的变小，组件惯量也变小，所以像磁头在一个或两个磁道间移动这样的微小运动，摩擦力的影响要比惯量大得多。对于最新的驱动器，其磁道宽度只有 0.2μm，这个值与现代集成电路芯片的特征尺寸相当！与这种趋势相对应的是，研究人员正尝试在支臂或者万向架之间加上第二个执行器，从而使得机器人在机械手臂的末端上具有细微的手腕运动。由于低阻尼状态下装置控制的适应性有一定难度，应考虑将支臂封装以增加主振动模式下的阻尼。其他的建议包括，在支臂上添加传感器，以增加额外的反馈来控制装置的适应性，在这种情况下，我们不妨采用单音圈执行器，并假定其适应性由式(10.37)描述，其中 $\omega_1 \geqslant 2\pi \times 2.500$rad/s，$\zeta \geqslant 0.05$。因为实际谐振细节并不完全知晓，所以谐振需要增益镇定。

756 ~ 758

步骤 2 选择传感器。早期的驱动器采用的是开环控制方法，一个机械定位器将磁头组件固定在磁盘上，另一个定位器将磁头固定在磁道上。反馈控制技术在 1971 年才开始应用，利用存储在特定磁盘表面的位置信息获得伺服数据。整个梳状磁头通过伺服机构表面信息定位。如果梳状机构发生弯曲或者彼此错位，将更难以读取数据。这样的问题可能限制了磁盘数和磁道密度。现代磁盘中，磁道的位置信息记录在每个磁道上用户数据扇区之间形成的间隙中。基于位置信息的控制方式称为扇区伺服控制方式，并且数据的采样是必需的。要满足大容量数据存储的需求，必然要求更少并且更大的扇区，但要满足控制方面高采样率的要求，则需要更小的扇区，这二者之间存在着矛盾。所以每一种设计都需为此进行折中。由于位置数据是采样的，控制器是数字装置，可以最大限度利用这些位置数据。通过多速率控制实现每个读传感器的多控制纠错理论研究已经开始，但还没找到一个卓有成效的方法。在本例研究中，我们将设计一个模拟控制器。

从磁盘记录的数据中提取的位置信息会受到误差的影响，误差是磁道偏离所引起的，这就意味着磁道半径不是常值。通常，每一次沿磁道的运行都有一个重复组件，这一部分能够测量的一般为谐波，并且用一个信号作为电动机的前馈将其消除。位置误差信号(PES)还包含由多种因素所引起的随机噪声。这些噪声包括气流对滑动机构的冲击，外界对硬盘的摇动与振动，对位置信息信号进行解码处理的元件噪声，为电动机提供力矩的功率放大器噪声，以及处理过程中所需的 A/D 转换器带来的误差等。

步骤 3 选择执行器。RAMAC 采用直流电动机作为执行器，后来采用液压执行器。1980 年希捷公司推出 5.25in 的驱动器时，用步进电动机作为执行器。上述的几种执行器都用于开环系统。1971 年推出的 IBM3330，是最早使用磁头位置反馈控制的磁盘驱动器，

㊀ 控制时前后半段处于相反饱和极性控制状态的一般用语。

㊁ Workman(1987 年)，Franklin et al.(1998 年)。

其执行器是线性运动的音圈电动机。1979 年旋转式音圈电动机问世，如今几乎所有的硬盘驱动器都采用旋转电动机作为执行器。通常功率放大器以电流放大器的方式接入电路从而可以简化动力学方程。从电感电阻到放大器的反馈构成的“力矩回路”，可进行单独并且周密的设计，因此在大多数的情况下考虑磁道跟踪的外环位置控制时，可以忽略电动机的动力学特性。

步骤 4　建立线性模型。正如被控的过程讨论所提到的，线性模型有一个标准模式，即

$$G(s)=\frac{1}{s^2}\frac{(2\zeta s/\omega_1+1)}{\left(\frac{s^2}{\omega_1}+2\zeta\frac{s}{\omega_1}+1\right)} \tag{10.38}$$

759

其中：$\zeta=0.05$；$\omega_1=2.5$。所对应的测量时间是 ms 而不是 s。补偿器的增益包含增益 A 和惯量 J。一个谐振总会在分母上产生一个小阻尼的二项式。每个谐振模式可能会有一个或者两个零点，这取决于结构性质以及执行器和传感器的位置，如例 2.2 和例 2.4 所示。假设功率放大器为理想的电流放大器。我们也只考虑磁道跟踪模式而不考虑寻道模式。

步骤 5　尝试 PID 或者超前滞后设计。由于额定模型过于简单，所以首先要进行一个超前补偿的设计，以获得最大可能的带宽来保证 50°的相位裕度，这样得到一个至少为 4 的增益裕度，进而使谐振稳定。奥斯瓦德(R. K. Oswald，1974 年)已经出版过有关该方法的书。这里我们将尝试两种设计比较它们的带宽以及阶跃响应的特性。第一种设计，我们用一个简单的超前补偿环节，它能提供 50°的相位裕度和增益裕度为 4 的因式。为了得到期望的相位裕度，超前补偿环节中 α 为 0.1，尽可能提高穿越频率从而保证谐振时的增益裕度为 4，这时曲线按照因式 $1/(2\zeta)=10$ 上升，并且高于伯德图的渐近线。因此，穿越定位必须使渐近线在 $\omega_1=5\pi\text{rad/s}$ 处低于 1/40。超前传递函数为

$$D_c(s)=0.617\frac{(2.22s+1)}{(0.222s+1)} \tag{10.39}$$

并且超前设计的伯德图绘制如 10.56 所示。

该设计中的增益穿越频率为 $\omega_c=1.39\text{rad/ms}$，磁盘驱动控制的阶跃响应曲线如图 10.57所示。图中表明，上升时间约为 $t_r=0.8\text{ms}$，超调量约为 25%。我们前面提到 50°的相位裕度相当于阻尼比为 0.5 和大约 17%的超调量。然而，由于超前补偿环节的零点处于前向通道上，超调量会因为这个零点的存在而增加。

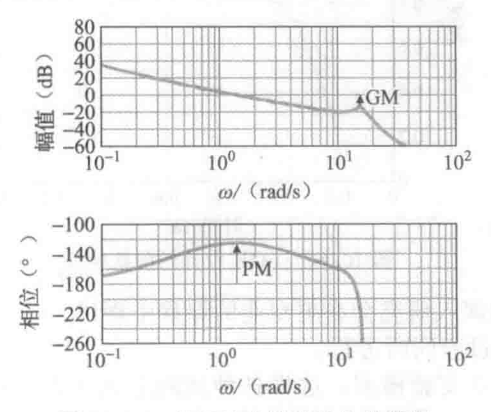


图 10.56　单超前补偿设计的伯德图

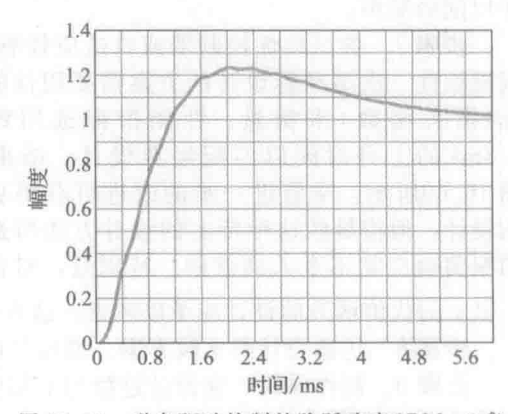


图 10.57　磁盘驱动控制的阶跃响应($PM=50°$)

第二种设计，加入了一个衰减滤波器来消除谐振波峰，从而提高响应速度和带宽。其设计思想是，使得滤波器的截止频率处于穿越频率与谐振频率之间，使阻尼比足够低，但又不会使相位裕度降低太多，以避免影响增益裕度。经过试验设计如下：

$$D_c(s)=1.44\frac{(1.48s+1)}{(0.148s+1)} \tag{10.40}$$

滤波器的传递函数为

$$F(s)=\frac{1}{\frac{s^2}{(10.3)^2}+0.6\frac{s}{10.3}+1} \tag{10.41}$$

该设计的系统伯德图如图 10.58 所示，阶跃响应曲线如图 10.59 所示。

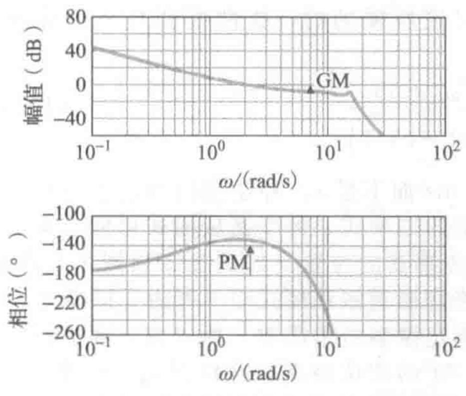


图 10.58 加入衰减滤波器后系统的伯德图

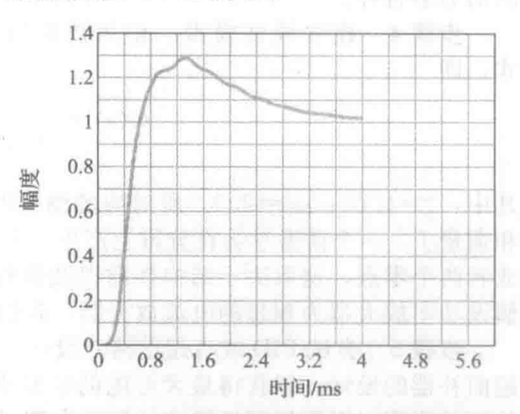


图 10.59 加入衰减滤波器后系统的阶跃响应

在该设计方法中，系统的穿越频率为 2.13rad/s，提高了 35%，上升时间为 0.3ms，比没有衰减滤波器时降低了 60%。这种情况下超调量有点高。虽然这里我们没有提到，对于控制补偿器，更有可能包括一个陷波滤波器，而不是这里设计的低通滤波器。陷波滤波器能更好地抑制谐波并且能增加带宽。这主要取决于对谐波及其周围环境不确定性的理解程度。在某些情况下，可以通过相位稳定来消除谐振，同时提高穿越频率使其超过谐振频率。

步骤 6 评估/修正被控对象。在以上步骤 1 中已经提到了过程的可能变化涉及主设计的变化。一旦选定设计的主要参数，那么所进行的修正包括在制造工艺上增强支臂的刚度以提高振动频率，以及为支臂添加阻尼封装以增加阻尼比，其他的改进方法还包括 PES 解码算法以削弱噪声。

步骤 7 尝试最优控制器或自适应控制器。根据线性二次型指标设计的方案需要用性能指标(损失函数)来衡量。性能指标选用约为 0.3ms 的上升时间以匹配经典设计。结果如图 10.60所示。尽管进一步的改进可获得更好的设计，但很显然这种特定的设计方法所造成的振荡响应是不令人满意的。特别是，对包括 $\dot{y}$ 和 y 的代价函数的设计应予以考虑。这方面的深入研究会在更专业的课程中探讨。

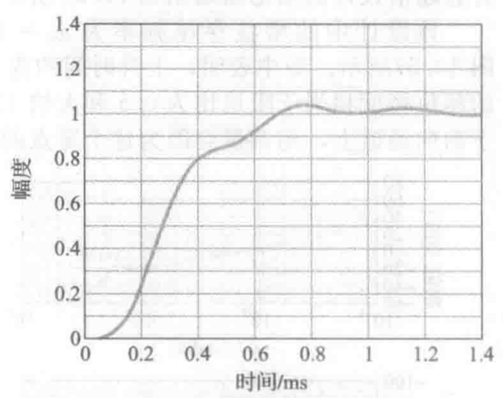


图 10.60 LQR 设计的阶跃响应

步骤 8 仿真设计与比较方案。通常与设计过程同时进行。

步骤 9 制作样机。在设计过程的早期应建立实验模型，这样各种试验方案可以在硬件设计上进行测试。

关于数字控制系统的设计以及磁盘驱动器伺服系统的应用，读者可参阅富兰克林等人(1998 年)的著作。

10.6 半导体晶片生产中快速热处理系统的控制

图 10.61 所示的为超大规模集成电路(ULSI)制造过程的主要步骤，如微处理器以及

相关控制。该过程中所描述的许多步骤，比如化学气体的沉淀或蚀刻，需要在精密的控制以及一定的温度序列下进行(塞(Sze)，1988 年)。许多年来标准的做法是，同时对一批晶片(包含许多芯片的硅磁盘)实施这些步骤，从而可以在同一时间段内制造出大量完全相同的芯片。为满足芯片上器件的关键尺寸更小的需求，并使生产的芯片种类及数量有更大的灵活性，集成电路的制造商要求在热处理的过程中能够对温度和时间曲线提供越来越精确的控制。为达到上述要求，主要方法是，在一间冰室内用称为快速热处理(RTP)系统的可变热源对一个晶片连续地实施热处理，该系统如图 10.62 所示。

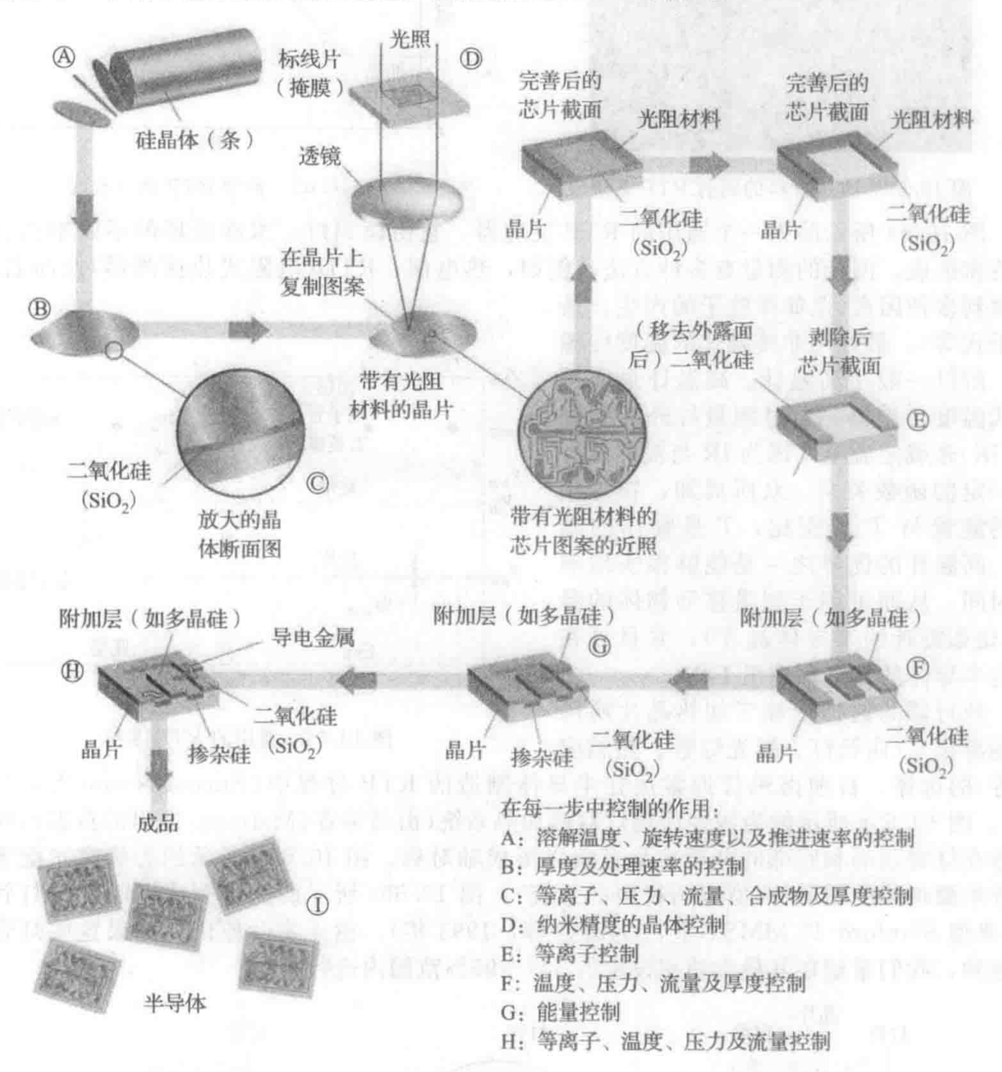


图 10.61　集成电路的制造过程

RTP 系统要求晶片温度如图 10.63 所示曲线那样快速上升或者下降，其中斜坡上升速度为 25～150℃/s，吸收温度的变化范围为 600～1100℃，该阶段持续时间从几秒到 120s。温度的变化率过大，会造成晶体结构的破坏，因此需要限制温度的斜坡上升速度。因为 RTP 系统具备快速改变温度的能力，能够快速且准确地停止诸如沉淀或蚀刻这样的化学处理过程，所以芯片制造的临界长度可达到非常小。温度的均匀性控制也是一个需重点考虑的性能。在实际控制过程中系统是多变量的，但在这里我们将其简化为单输入单输出的系统进行研究。

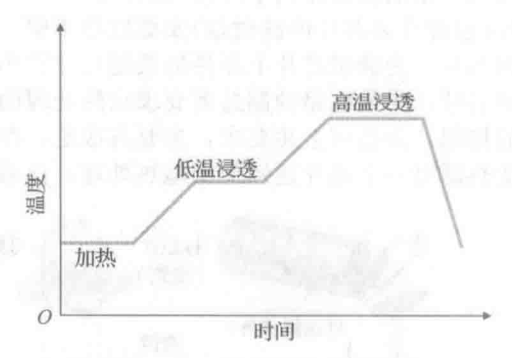


图 10.62　应用材料的辐射 RTP 系统　　　　图 10.63　典型 RTP 温度轨线

图 10.64 所示的为一个通用的 RTP 反应器，它由卤钨灯、水冷处理的不锈钢内壁和石英窗组成。温度的测量有多种方法，例如，热电偶、RTD(电阻式热探测器)及高温计。考虑到多种因素(比如微粒子的产生、最小干扰等)，最好用非接触式的温度传感器，所以一般用高温计。高温计是非接触式温度传感器，通过测量红外线的辐射(IR)来确定温度，因为 IR 与被测温度有一定的函数关系。众所周知，物体辐射的能量与 T^4 成正比，T 是物体的温度。高温计的优势之一是能够很快地响应时间，从而可用于测量移动物体的温度(比如旋转的半导体晶片)，并且可在制造半导体的真空环境里工作。

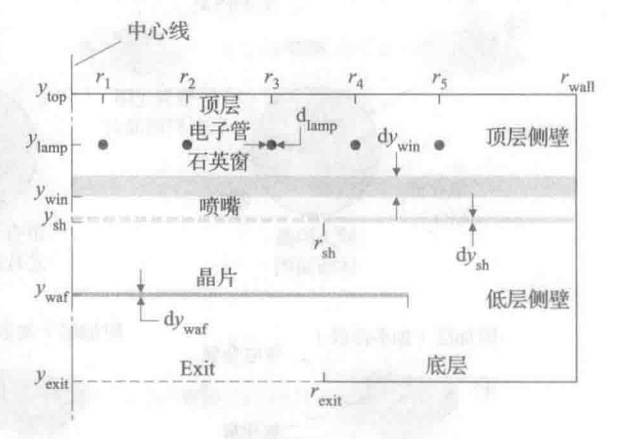


图 10.64　通用的 *RTP* 系统

执行器的选择依赖于加热晶片所用的能源技术(卤钨灯、弧光灯管、热感应器等)的选择。目前卤钨灯通常用在半导体制造的 RTP 过程中(Emami-Naeini 等，2003 年)。图 10.65a 所示的为线性卤钨灯双面加热系统(由马特森(Mattson)提出的典型系统)。照射在灯管顶部和底部的电子束呈直角以形成轴对称。图 10.65b 所示的为蜂窝状配置的灯管单面加热的图示(典型应用材料的系统)。图 10.65c 所示的为排列成同心环的灯管配置(典型 Stanford-TI MMST 室，Gyugyi 等，1993 年)。由于实际原因，如果这些灯管达到饱和，我们希望在其最大功率设定的 5%～95%范围内进行操作。

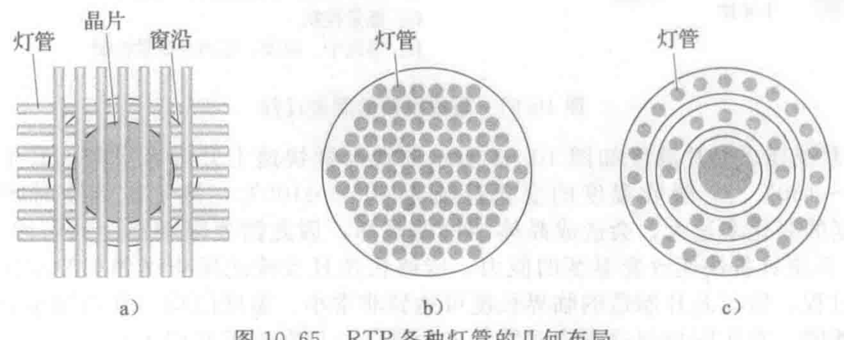


图 10.65　RTP 各种灯管的几何布局

为了说明 RTP 系统的设计，我们提出在 SC 应对措施下进行特殊设计的结果作为实验

模型，它是为研究与RTP设计和操作相关问题而建立的(Emami-Naeini等，2003年)。实验模型如图10.66所示，它由铝制材料制成，包括三个标准的35W，12V的卤钨灯，用来加热一个模拟晶片的矩形金属板。金属板的尺寸是4in×1 $\frac{3}{4}$in，它被漆成黑色来增加对辐射的吸收量。金属板的安装与灯管平行，灯管安装在灯罩中。灯管组件安装在栏杆上，以保证灯管到金属板的距离是可调节的。当灯管向外移动时，系统的增益会减小，但辐射干扰(热偶)会增加。另一方面，当灯管向金属板靠近时，系统增益增加并且热偶减小。从灯管到金属板的距离通常为1in，但也可调节至几英寸。灯管通过一个脉宽调制(PWM)放大器来驱动，它具有一个独立的供电单元，侧面有三个为开环系统和手动操作系统设计的标度盘。金属板背面是14个垂直安装的电阻式温度探测器(RTD)，12个在板面之上，2个分别在金属板两侧的支脚上。模型有一个噪声源滤波器产生1.5Hz周期性的传感器噪声，从而模拟实际RTP系统中的噪声。所有的电子元件(传感器信号处理器和PWM放大器)被封装在系统单元的底部，由于部分器件暴露在外部，因此周围环境仍然会对其产生干扰。

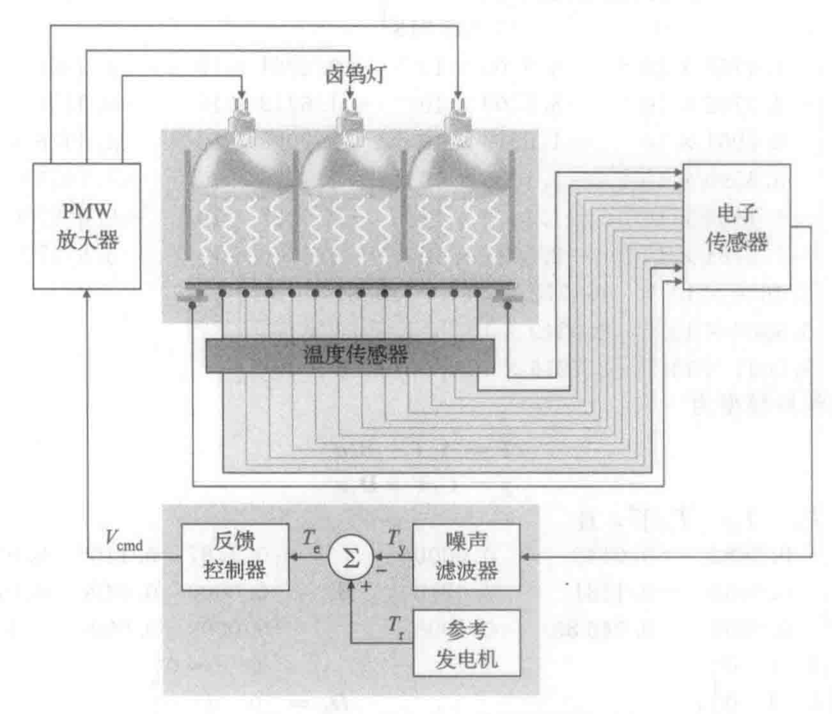


图10.66 RTP实验模型的框图

步骤1 理解控制过程及其性能指标。RTP是一个固有动态的非线性过程。该系统令人关注的性能包括多样的时间尺度(灯管、晶片、发射头、石英窗的时间常数都不同)、非线性(主导的辐射)特性、非线性灯管、电源效应、传感器的数量及位置、灯管的数量、位置及组合、温度的大幅变化等。由于在辐射损失中非线性的增加，因此系统的直流增益会随着温度的升高(δ温度/δ功率)而减小。我们需要考虑多种类型的物理模型。这是由于装置的设计需要详尽的物理模型，但是几何形状变化的快速评估，方法改进及反馈控制的设计，都需要降阶模型。同时还需要手动控制和自动控制之间的平滑过渡。

760 ≀ 767

步骤2 选择传感器。前面已经讨论过。对于实验模型而言，传感器是一组14个RTD的器件，但只有3个(分别位于板中央和两边的支脚上)用于反馈，其余的用于温度监控。本例中，我们仅选中心温度用于反馈控制(另一个方法是将3个温度值相加作为一个信号来控制平均温度)。

步骤3 选择执行器。前面也已经讨论过。对于实验模型而言，执行器由3个前文所

描述的标准的卤钨灯组成。本例中，我们将这 3 个灯管组成一个单执行器，并对每一个灯管使用相同的输入量。

步骤 4 建立线性模型。实验模型已经建立(详见步骤 9)。非线性系统方程包括传导项(见第 2 章)及辐射项(Emami-Naeini 等，2003)。非线性系统辨识方法可用于得到系统模型。特别地，这 3 个灯管的电压逐步升高，然后保持不变，随后逐步降低，记录下 3 个输出温度。通过系统辨识[⊖]方法得到系统非线性模型，其中包含辐射项和传导项(分别为 $\boldsymbol{A}_r$ 和 $\boldsymbol{A}_{con}$)：

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}_r\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\ T_\infty\end{bmatrix}^4 + \boldsymbol{A}_{con}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\\ T_\infty\end{bmatrix} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{10.42}$$

其中：$\boldsymbol{T}=[T_1 \quad T_2 \quad T_3]^T$ 表示温度；T_∞ 为不变环境温度($\dot{T}_\infty=0$)；$\boldsymbol{u}=[v_{cmd1} \quad v_{cmd2} \quad v_{cmd3}]^T$ 是控制电压值。其系统矩阵为

$$\boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.000\,040 & 0 & 0 \\ 0 & 5.557\,443 & 0 \\ 0 & 0 & 13.638\,218 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_r = \begin{bmatrix} 5.4762\times10^{-2} & -8.5706\times10^{-3} & -8.2961\times10^{-4} & -4.5361\times10^{-2} \\ -8.5706\times10^{-3} & 8.5709\times10^{-3} & -1.6213\times10^{-7} & -8.9134\times10^{-8} \\ -8.2961\times10^{-4} & -1.6213\times10^{-7} & 8.2998\times10^{-4} & 2.0976\times10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{con} = \begin{bmatrix} 3.5599\times10^{-7} & -1.1136\times10^{-7} & -1.1976\times10^{-7} & -4.7011\times10^{-8} \\ -1.1136\times10^{-7} & 1.1602\times10^{-2} & -2.5027\times10^{-3} & -9.0992\times10^{-3} \\ -1.9761\times10^{-7} & -2.5027\times10^{-3} & 6.3736\times10^{-3} & -3.8707\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3.4600\times10^{-1} & 1.1772\times10^{-1} & 2.8380\times10^{-2} \\ 3.8803\times10^{-11} & 8.0249\times10^{-2} & 1.8072\times10^{-2} \\ 8.0041\times10^{-9} & 2.7216\times10^{-3} & 3.1713\times10^{-2} \end{bmatrix}$$

768

导出系统的线性模型为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{T} + \boldsymbol{B}_3\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{T} + \boldsymbol{D}_3\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{10.43}$$

其中：$\boldsymbol{y}=[T_{y1} \quad T_{y2} \quad T_{y3}]^T$，且

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} -0.0682 & 0.0149 & 0.0000 \\ 0.0458 & -0.1181 & 0.0218 \\ 0.0000 & 0.046\,83 & -0.1008 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 0.3787 & 0.1105 & 0.0229 \\ 0.0000 & 0.4490 & 0.0735 \\ 0.0000 & 0.0007 & 0.4177 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通过 Matlab 得到 3 个开环极点，分别位于−0.0527、−0.0863 和−0.1482 处。

本例中，因为我们将 3 个灯管绑定为一个执行器，并且只将中央温度作为反馈信号，则系统线性模型为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.0682 & 0.0149 & 0.0000 \\ 0.0458 & -0.1181 & 0.0218 \\ 0.0000 & 0.046\,83 & -0.1008 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.5122 \\ 0.5226 \\ 0.4185 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [0 \quad 1 \quad 0], \qquad \boldsymbol{D} = [0]$$

因此传递函数为

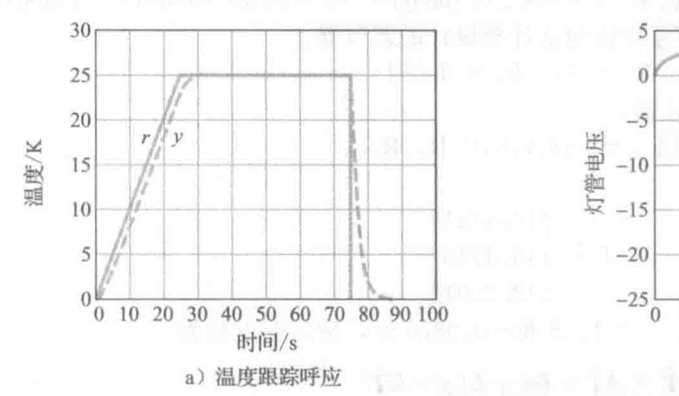
$$G(s) = \frac{T_{y2}(s)}{V_{cmd}(s)} = \frac{0.5226(s+0.0876)(s+0.1438)}{(s+0.1482)(s+0.0527)(s+0.0863)}$$

⊖ 由 G. van der Linden 博士推导出。

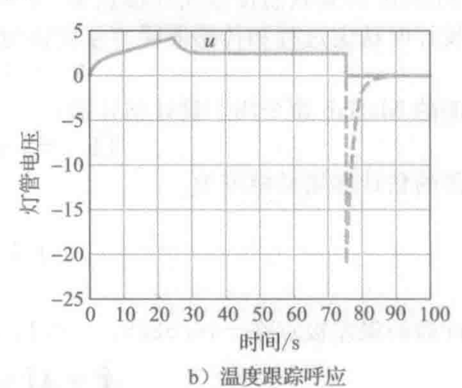
步骤 5　尝试超前滞后或 PID 控制器。使用如下形式的简单 PI 控制器：

$$D_c(s) = \frac{(s+0.0527)}{s}$$

以消除其中一个较慢极点的影响。线性闭环响应如图 10.67a 所示，而相关的控制效果如图 10.67b所示。系统响应跟随着控制轨迹，伴有大约 2s 的延时并且没有超调。灯管直到 75s 时才有正常的响应，并且极性变负(虚线所示)，以跟踪控制温度的突然下降。系统不会出现这种情况，因为没有实时冷却系统并且灯管处于低温饱和状态。注意，在这种方式下我们并没有详述的方法可以控制温度的不均匀性。



a）温度跟踪呼应



b）温度跟踪呼应

图 10.67　PI 控制器的线性闭环 RTP 响应

步骤 6　评估/修正被控对象。在执行器及传感器选择时已经讨论过。

步骤 7　尝试最优设计。我们使用包含积分控制的误差空间法和第 7 章介绍的线性二次高斯(Gauss)法进行设计。误差系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{e}\\ \dot{\xi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e\\ \xi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}D\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\mu \tag{10.44}$$

其中：

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix}D\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

$e=y-r$，$\boldsymbol{\xi}=\dot{\boldsymbol{T}}$ 并且 $\mu=\dot{u}$。对状态反馈的设计，利用第 7 章的 LQR 公式得

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty}\{z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}z + \rho\mu^2\}\mathrm{d}t$$

其中：$z=[e\quad \xi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。注意，$\mathcal{J}$的选择是为了处理轨迹误差 e、控制信号 u 和 3 个温度的差值。因此，性能指数应该为以下形式：

$$10\{(\dot{T}_1-\dot{T}_2)^2+(\dot{T}_1-\dot{T}_3)^2+(\dot{T}_2-\dot{T}_3)^2\}$$

这样就可以减小温度的不均匀性。因子 10 作为误差状态与对象状态之间相对加权值，由反复实验来确定。状态矩阵及控制加权矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 R 分别为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 20 & -10 & -10\\ 0 & -10 & 20 & -10\\ 0 & -10 & -10 & 20\end{bmatrix},\quad R=\rho=1$$

利用下面的 Matlab 命令来设计反馈增益：

[K] = lqr(As,Bs,Q,R)

由 Matlab 计算的反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K} = [K_1 \vdots \boldsymbol{K}_0]$$

769 ~ 770

其中：

$$K_1 = 1,\quad \boldsymbol{K}_0 = [0.1221 \quad 2.0788 \quad -0.2140]$$

由此得出的内部模型控制器的形式为：

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= B_c e\\ u &= C_c x_c - \boldsymbol{K}_0 \boldsymbol{T}\end{aligned} \tag{10.45}$$

其中：x_c 表示控制器状态，且

$$B_c = -K_1 = -1,\quad C_c = 1$$

由 Matlab 得到状态反馈闭环极点为-0.5574 ± 0.4584j；-0.1442 和-0.0877。全阶估计器设计时选定过程和传感器噪声强度作为估计器设计的调节器：

$$R_w = 1,\quad R_v = 0.001$$

下面的 Matlab 命令用于设计估计器：

$$[\mathrm{L}] = \mathrm{lqe}(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{R_w},\mathrm{R_v})$$

所得的估计器增益矩阵为

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix}16.1461\\16.4710\\13.2001\end{bmatrix}$$

估计器的误差极点在-16.5268，-0.1438 和-0.0876 处，估计器方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{T}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}(y - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{T}}) \tag{10.46}$$

利用估计器，系统内部模型控制器的方程可修正为

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= B_c e\\ u &= C_c x_c - \boldsymbol{K}_0 \hat{\boldsymbol{T}}\end{aligned} \tag{10.47}$$

闭环系统方程由下式给出：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_{cl} &= \boldsymbol{A}_{cl}\boldsymbol{x}_{cl} + \boldsymbol{B}_{cl} r\\ y &= \boldsymbol{C}_{cl}\boldsymbol{x}_{cl} + D_{cl} r\end{aligned} \tag{10.48}$$

其中：r 是参考输入温度轨线；闭环状态矢量为 $\boldsymbol{x}_{cl} = [\boldsymbol{T}^T \quad x_c^T \quad \hat{\boldsymbol{T}}^T]^T$。系统矩阵为

$$\boldsymbol{A}_{cl} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}C_c & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_0\\ B_c\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}C_c & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_0 - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{cl} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ -B_c\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{cl} = [\boldsymbol{C} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}],\quad D_{cl} = [0]$$

771

闭环极点（由 Matlab 计算所得）位于-0.5574 ± 0.4584j，-0.1442，-0.0877，-16.5268，-0.1438 和-0.0876 处，同预期的一致。闭环控制系统的结构如图 10.68 所示。

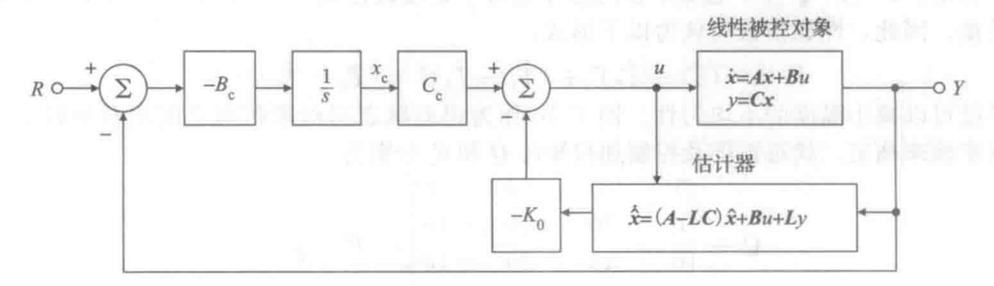


图 10.68 闭环控制的结构框图

闭环控制系统结构如图 10.69 所示。线性闭环响应如图 10.70a 所示，相应的控制效果如图 10.70b所示。受控温度轨线 r，在 0～25℃范围内是斜率为 1℃/s 的斜线，之后为 50s 的吸收时间，然后降为 0℃（注意到此处的坡度比较平缓，这是因为这里对于 RTP 实

验模型我们仅使用 3 个灯管，而实际的 RTP 系统需要上百个灯管，并且会像前面提到有更快的斜坡速度)。系统可有效的跟踪受控温度轨线，即使在斜坡处有大约 2s 的延时和最大为 0.089℃的超调。像预期的一样，系统可跟踪稳态输入并渐近地达到零稳态误差。考虑到跟踪斜坡输入，灯管的控制信号如预期那样增加，并在 25s 时达到最大值，然后在大约 35s 时降低为稳态值。标准的灯管响应在 0～75s 内，随后几秒是相应的快速冷却产生的负控制电压。又由于系统中没有实时冷却系统，所以负控制电压(如图中的虚线所示)事实上是不可实现的。因此，在非线性仿真中，受控的灯管电压源必须限制为严格非负(详见步骤 8)。需要注意的是从 75～100s 的响应是系统的(负)阶跃响应。

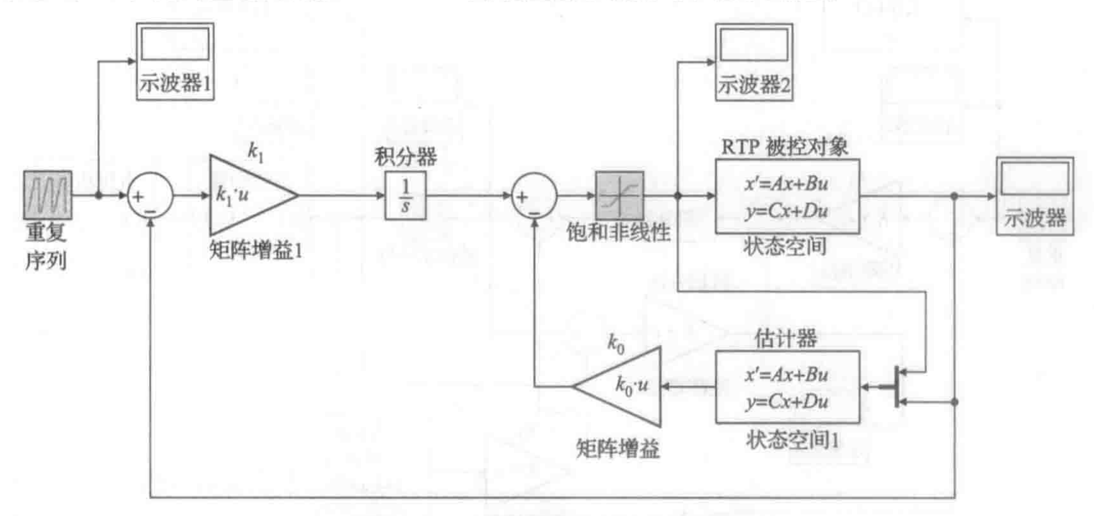


图 10.69 RTP 闭环控制的仿真框图

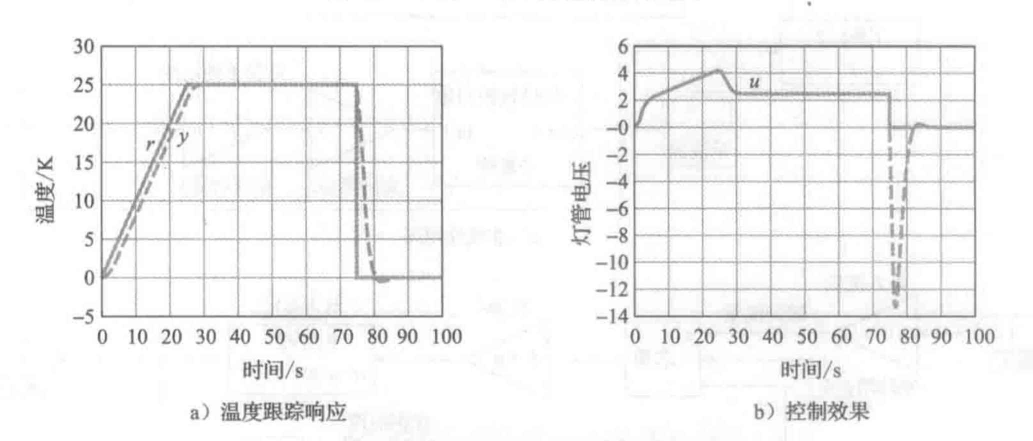


图 10.70 鲁棒伺服机构控制器的线性闭环 RTP 响应

步骤 8 仿真具有非线性的设计。如图 10.71 所示，非线性闭环系统可运用 Simulink 进行仿真。模型的温度单位是 K，环境温度是 301K ⊖。非线性装置的模型是式(10.42)的具体实现。沿参考温度轨线的前置滤波器(为平滑尖锐的拐点)，其传递函数为

$$G_{pf}(s)=\frac{0.2}{s+0.2} \tag{10.49}$$

注意电压转化为功率的公式为

$$P=V^{1.6} \tag{10.50}$$

⊖ $\{T\}_K=\{t\}_{℃}+273$。

772 ~ 773

据此可将其视为仿真图表上的非线性框图（称为 VtoPower）如图 10.72。静态非线性灯管的模型的逆也作为一个方框包含其中（称为 InvLamp）：

$$V = P^{0.625} \tag{10.51}$$

该模块是为了消除灯阻非线性而设的。从图表中我们可以发现，对系统进行操作时，电压在 1~4V 范围内变化。灯管包含一个饱和非线性单元，和积分器的反卷逻辑模块一样，用来处理灯管的饱和。非线性动态响应如图 10.73a 所示，其控制效果如图 10.73b 所示。注意非线性响应与线性响应大致相同。

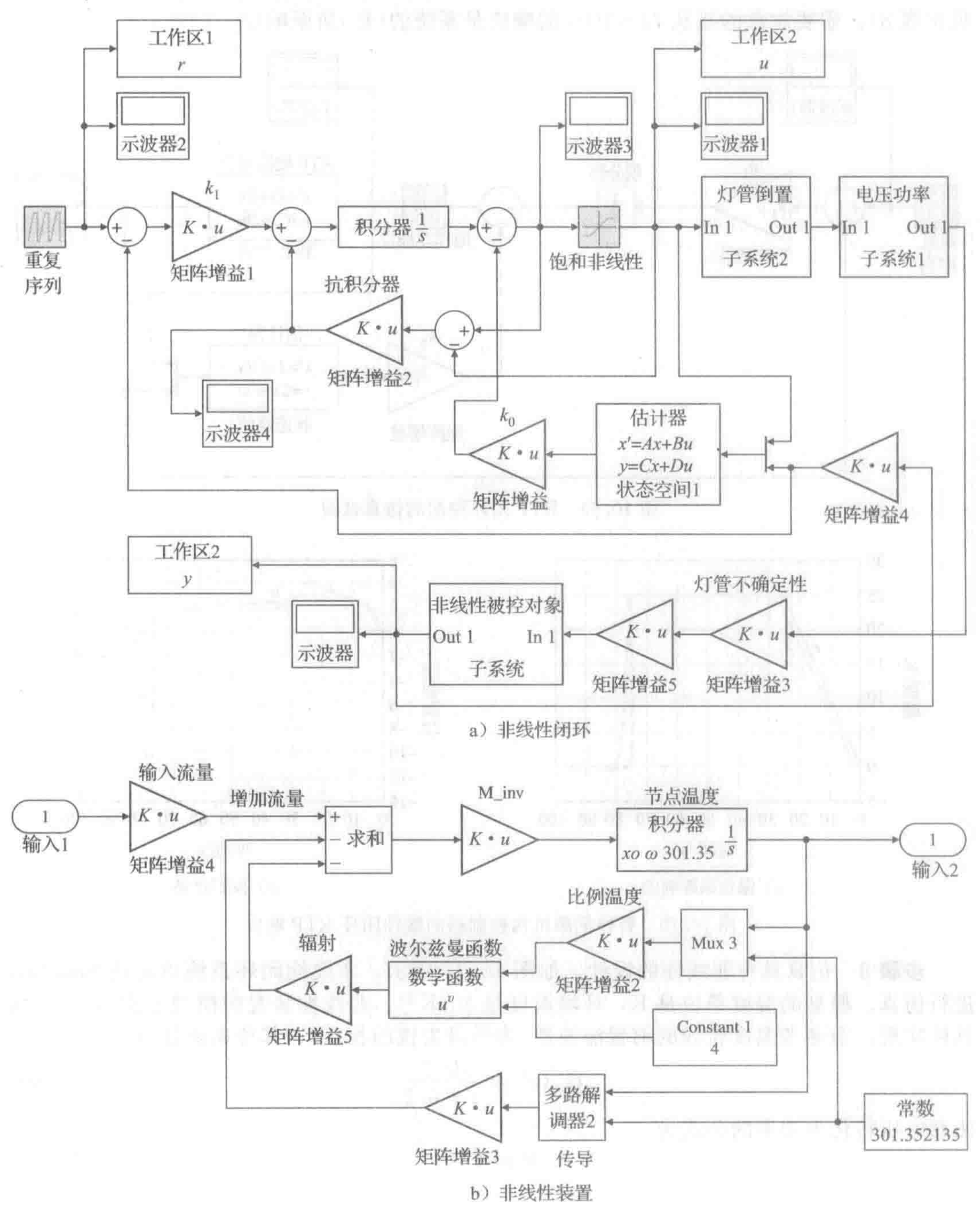
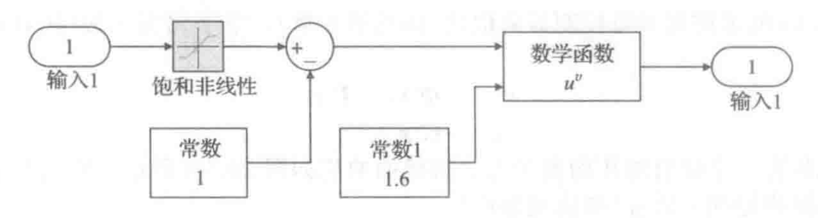
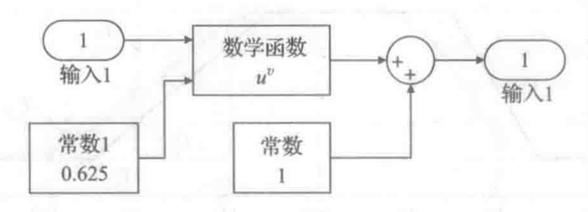


图 10.71　非线性 RTP 闭环系统的仿真框图

774

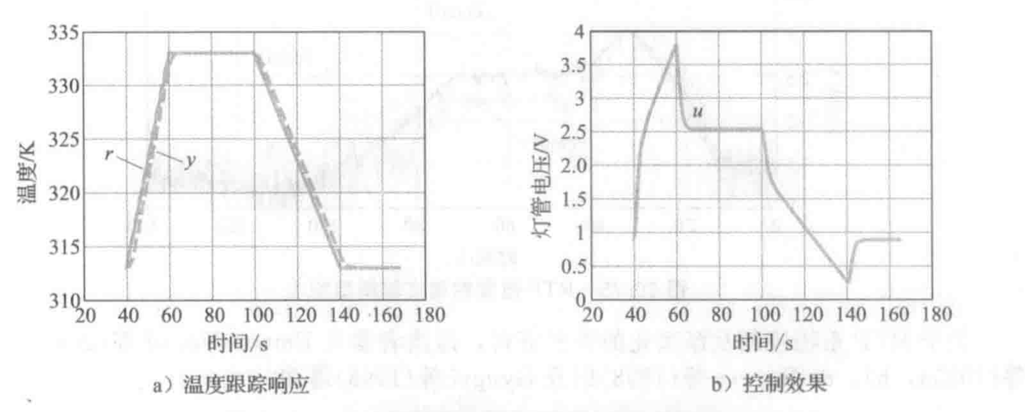


a）电压功率转换子系统



b）灯管模型子系统

图 10.72　非线性 RTP 闭环系统的仿真框图



a）温度跟踪响应　　b）控制效果

图 10.73　鲁棒伺服机构控制器的非线性闭环响应

1998 年在科罗拉多的 Vail 举行的 SEMATECH AEC/APC 会议，设计、建立[⊖]并阐述了 RTP 实验模型的原型。该操作系统如图 10.74所示，其本质上是一个多变量系统。原型系统使用三输入三输出多变量控制器，采用与步骤 7 相同的设计方法，在一个使用实时操作系统的嵌入式控制平台中得以实现。

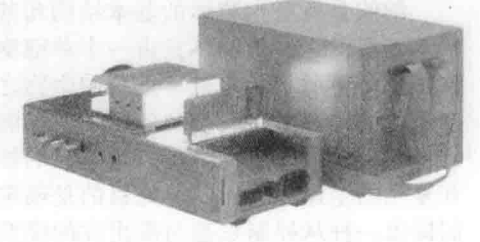


图 10.74　RTP 温度控制实验模型
（图片来源：Abbas Emami-Naeimi）

连续控制器（即组合式内部模型控制器和估计器）的形式为

$$\dot{x}^c = A^c x^c + B^c e$$
$$u = C^c x^c \qquad (10.52)$$

其中：$x^c = [x_c^T \quad \hat{T}^T]^T$，

$$A^c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ BC_c & A - BK_0 - LC \end{bmatrix}, \quad B^c = \begin{bmatrix} B_c \\ L \end{bmatrix}$$
$$C^c = [C_c \quad -K_0] \qquad (10.53)$$

⊖ 由 J. L. Ebert 博士建立。

使用 $T_s=0.1\text{s}$ 的采样时间将控制器离散化(详见第 8 章)，数字化实现为(用合适的抗饱和逻辑)：

$$x_{k+1}^c = \Phi^c x_k^c + \Gamma^c e_k$$
$$u_k = C^c x_k^c \tag{10.54}$$

实际系统对带有三个灯管电压的参考温度轨线的响应如图 10.75 所示。它与系统的非线性闭环仿真保持很好的一致性(考虑到噪声)。

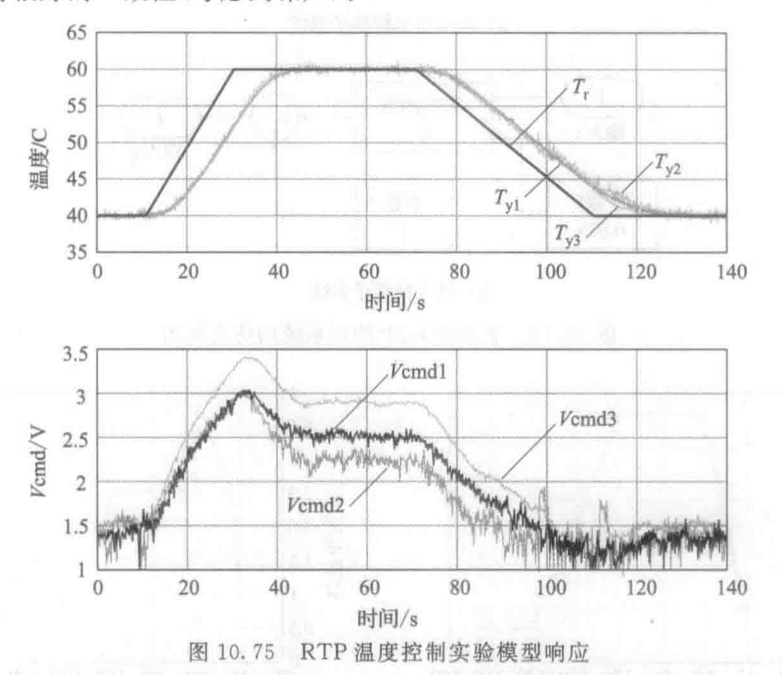


图 10.75　RTP 温度控制实验模型响应

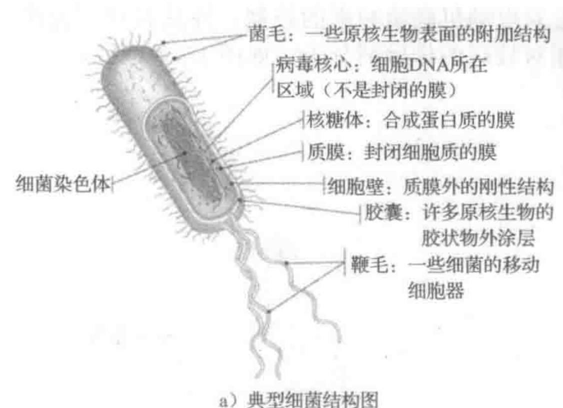
关于 RTP 系统控制及模型化的更多资料，请读者参见 Emami-Naeini 等(2003)、Ebrt 等(1995a，b)、de Roover 等(1998)以及 Gyugyi 等(1993)著作。

10.7　大肠杆菌的趋药性以及如何远离困境

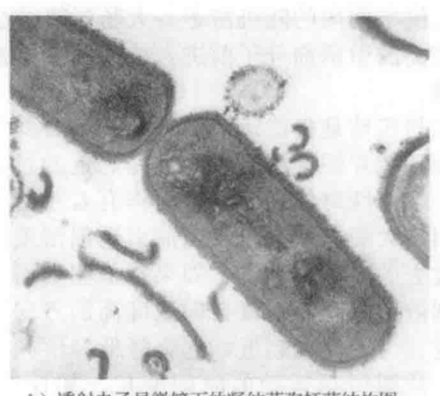
背景

细胞是所有生物体的基本结构和基本生理子系统，也是生命体大部分生化反应必要的活动场所。一些生物体只由一个单细胞组成，例如，图 10.76 所示的细菌。大肠杆菌形态如图 10.77 所示，它是单细胞的生物之一而且已经被广泛研究，在本实例中，我们将用高度简化的语言对大肠杆菌的运动及控制方式进行描述。这项研究的技术成果来自于系统生物学领域。系统生物学是一个新兴的领域，目标是通过建立动态模型来描述生物系统中极其复杂的生命过程。其研究目的是确定某部分的转移变量是如何影响系统整体的。在此我们提出一种从控制思想角度出发的模型来解决这个问题。在下文所描述的研究过程中，我们将尽量减少使用生物领域的技术术语，但会对有用和必要的概念定义清楚。通过这个简单的实例介绍，希望能够激发控制工程师对这一重要领域的引导研究。首先，我们来介绍一些背景知识。

大肠杆菌是于 1885 年一位德国儿科医师兼细菌学家 Theodor Escherich 发现的。这种细菌是一个圆柱形并带有半球形末端的生物体，其结构如图 10.77 所示。它的直径大约 $1\mu\text{m}$，长度大约 $2\mu\text{m}$，重量约 1pg。大肠杆菌存在于包括人类在内的恒温动物(宿主)的大肠中。这种细菌能在肠道中帮助维持健康的肠道菌群(即微生物的数目)的平衡，也可以合成有利于宿主的维生素。因为大肠杆菌具有基因组规模小以及在实验室中容易生长的特性，从而被遗传学家进行了广泛的研究。大肠杆菌成熟之后，通过二分裂的方式生成两个



a）典型细菌结构图



b）透射电子显微镜下的凝结芽孢杆菌结构图

图　10.76

（图片来源：a）Campbell 和 Reece，第98页，2008，b）2014 stanley C. Holt/Biological Photo Service）

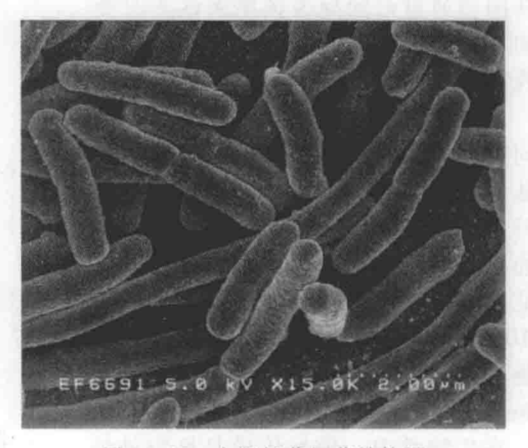


图10.77　大肠杆菌细菌结构图

（图片来源：美国国家卫生院卫生与社会福利部门）

基因完全相同的子细菌。在最佳的营养和环境条件下，大肠杆菌的数量每20min可以增加1倍。尽管大多数大肠杆菌菌株或其衍生物都是无害的，不过存在一个特殊的菌株(大肠杆菌O157：H7)，如果被人类摄取就会引起食物中毒。对于不同大肠杆菌菌株记录遗传基因信息的整个基因组，或者称为“图书馆”，进行测序：例如，实验菌株大肠杆菌K12 MG1655包含大约464万个腺苷胸腺嘧啶(A-T)和胞嘧啶鸟嘌呤(C-G)基因对，并且由4466个DNA的预测基因所排列。这些基因对特定蛋白质的合成发挥指令作用。蛋白质是细胞用来进行生物化学和生物物理过程的最基本的工具。蛋白质之间相互作用(PPI)的高度调节网为细胞的存活发出高阶命令函数，其中包括大肠杆菌的运动。在2003年，研究人员已证明，大肠杆菌细胞通过正趋药性呈现出“群体感应”，这意味着大肠杆菌被相似的细胞所吸引从而完成需要多个大肠杆菌共同配合的任务，这就如同形成了一个“生物膜”。

每个大肠杆菌有6到10个旋转电动机，每个电动机通过一个短小灵活的接近钩状的万向节来驱动一个大约10μm的薄螺旋状的细丝，这个整体称为鞭毛(Berg，2004)。如果观察者在细胞的外界对大肠杆菌进行俯视观察的话，会发现旋转电动机既可以顺时针(CW)也可以逆时针(CCW)转动。当所有的电动机逆时针旋转时，大肠杆菌的鞭毛则会捆绑在一起，此时细胞稳步前行，如图10.78所示。当一个或几个电动机顺时针旋转的时候，相应的鞭毛则会松绑散开，通过“转动”的方式产生一个小的位移从而重新定位，如图10.79所示。两种运动模式交替进行，当所处环境达到平衡状态时，大肠杆菌在两种运动模式之下交替稳步前行约1s，转动约为0.1s，从而实现大肠杆菌

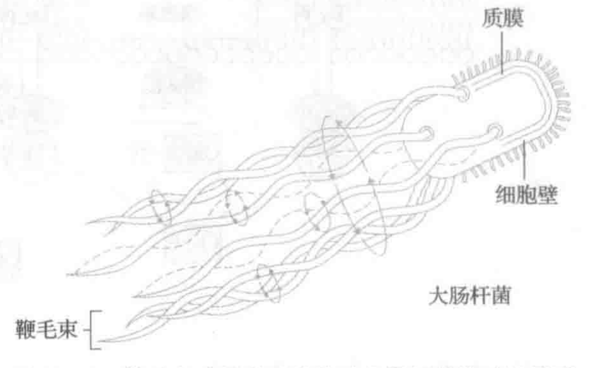


图10.78　鞭毛电动机逆时针转动大肠杆菌游动效果图

在三维空间内的随机游走。大肠杆菌通过对电动机翻滚频率的控制，使其自身朝着浓度相对较高的引诱剂分子前进，或远离浓度相对较高的排斥剂分子，如图 10.80 所示。

问题

趋药性是指能运动的细菌感知自身所处环境并朝着更适宜的环境趋近的过程。趋药性对细胞的正常运作有着重要作用。大肠杆菌会比较当前引诱剂浓度与过去的引诱剂浓度。如果它检测到引诱剂浓度增高，它就会向浓度高的方向趋近。为了实现趋近，它会降低翻滚频率，从而使得运动的时间变长。相反，如果它检测到排斥剂的浓度有所增加，大肠杆菌会趋向相反的方向；因此，大肠杆菌会通过增加翻滚频率来试图改变方向，远离排斥剂。这种趋药性动力学是我们研究的重点。

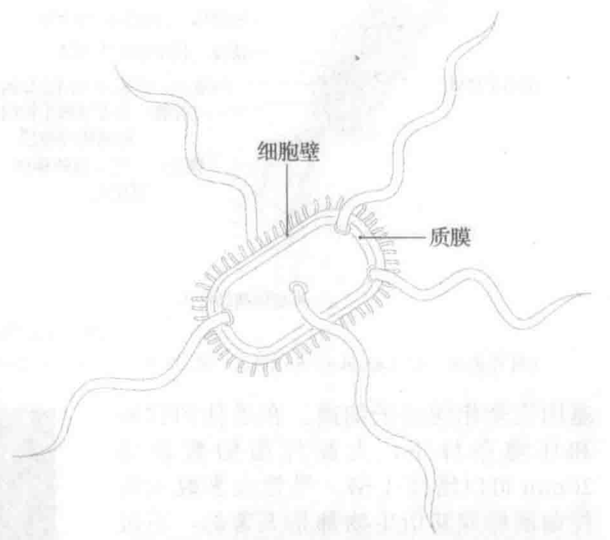


图 10.79　鞭毛电动机顺时针转动大肠杆菌翻滚效果图

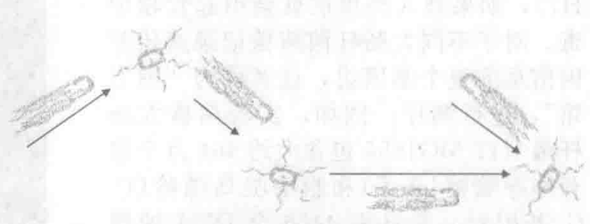


图 10.80　大肠杆菌有趋药性的随机游走运动

系统生物学的研究人员已经对几种不同类型细菌的趋药性进行了研究。我们基于其中的两种(Barkai & Libler, 1997 年；Yi 等人，2000)，对不同蛋白质的趋药反应进行了很细致的研究，并且它们之间相互影响的细节特征如图 10.81所示。生物学家给参与趋药性的蛋白质进行了命名，由英文字母“Che”作为前缀(例如，Che A，Che B)。在生物学中，信号传导是细胞外的分子刺激物与细胞膜上的受体蛋白质进行反应的过程，反过来又刺激细胞内的“第二信使”蛋白质，从而使得细胞完成某些工作(例如基因表达，蛋白质合成)。细菌的表面是一类受体蛋白称为 MCP，或叫甲基受体趋化性蛋白质。MCP 包括胞外、跨膜和胞内的区

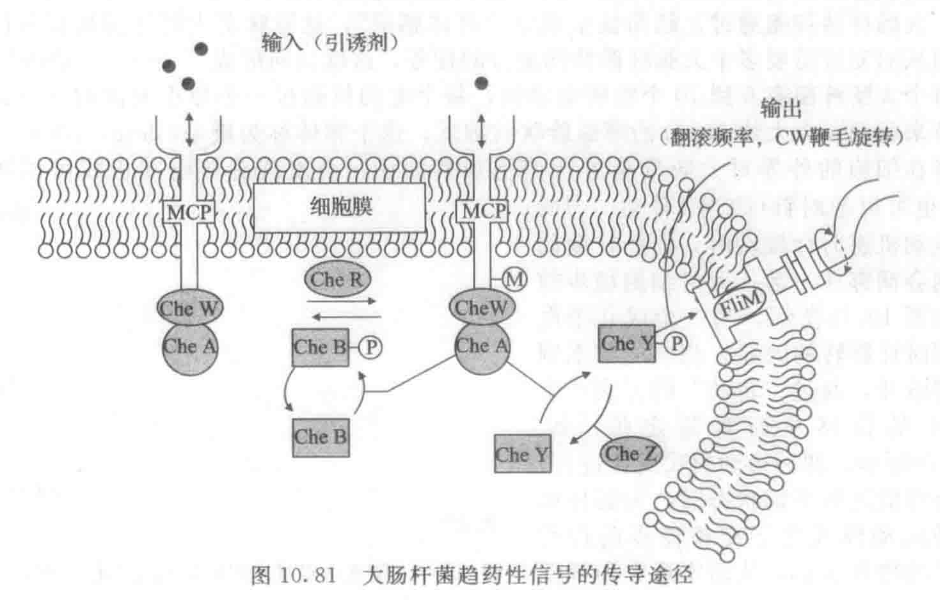


图 10.81　大肠杆菌趋药性信号的传导途径

域，这意味着它们有可以感知细胞外化学刺激物的子结构，并且随后刺激细胞内的蛋白质。这些化学物质构成对系统的输入，并统称为配体。系统通过控制蛋白质 Che Y 的活性来控制翻滚频率，这种蛋白质直接作用于鞭毛的电动机上。

MCP 在细胞内通过结合蛋白质 Che A 和 Che W 形成一种复杂的受体结构，该受体通过反馈调节，保持对大范围内的配体引诱剂变化的敏感性。在这里，我们对输入和输出条件、PPI 以及包括监管过程在内的生物化学转换都进行了介绍。受体要么是活跃的，同时等待配体；要么是不活跃的，不接受任何配体。在生物化学领域，为了诱导蛋白质的结构和生化属性发生转变，可以对它进行磷酸化或向它转移一个带负电荷的磷酸根原子团(-PO_4^{3-})，这是一种激活蛋白质的常用方法。在趋药性中，引诱剂的减少导致 Che A(来自 Che A-P)蛋白质磷酸化增加，而引诱剂的增加导致 Che A 蛋白质磷酸化的减少。带有 Che A-P 蛋白质的受体处于活跃状态(更高的翻转频率)，而脱磷酸化的 Che A 蛋白质则处于非活跃状态(更高频率的游动)。生物体运动性转换后的机制是对 Che Y 蛋白质的磷酸化：Che A-P 蛋白质通过转移其磷酸根原子团到 Che Y 蛋白质上，产生了 Che Y-P 蛋白质。Che Y-P 蛋白质结合在鞭毛基本结构中的 FLIM 蛋白，从而产生更高翻转频率的运动。

775～781

作为趋药动力学稳态的一部分，Che R(甲基化作用)甲基原子团(－CH3)通常会被添加到 MCP 上，同样也可通过 Che B(脱甲基作用)将其移除。由于 Che A-P 也会使 Che B 和 Che B-P 磷酸化，从而频繁地使 MCP 脱甲基，这一平衡在配体和一个活跃的受体复合物结合时被破坏。如果配体是一种引诱剂，Che A 的活性降低(减少 Che A-P)，MCP 中 Che B 脱甲基作用会减小(减少 Che B-P)，那么更多的受体表现为活跃状态，Che A 会缓慢地从活跃状态变为稳定状态，这就是趋药性的反馈回路。与此同时，Che A 降低了活跃状态下的 Che Y 的比例(减少 Che Y-P)，这将导致翻滚频率随之降低。其结果是，细菌游动增多而且朝向引诱剂浓度集中的方向游动。现在，如果配体是一种防护剂，那么 Che A 的活性会增加，这会导致 Che Y 活动率和翻滚频率增加。细菌为了远离排斥剂的集中区域并且寻找一个新的方向，它的游动会减少。同时在反馈环路中，Che B 较为活跃，而受体可能处于非活跃的状态，Che A 的活动和翻滚频率将恢复到其稳定状态值。事实上，这种活动和翻滚频率在配体浓度发生改变后恢复到一个固定的值的卓越性能，被系统生物学家定义为精确适应。正如我们所见，对于控制工程师而言，这是一个非常普通的控制方法。趋药性的试验结果如图 10.82所示。

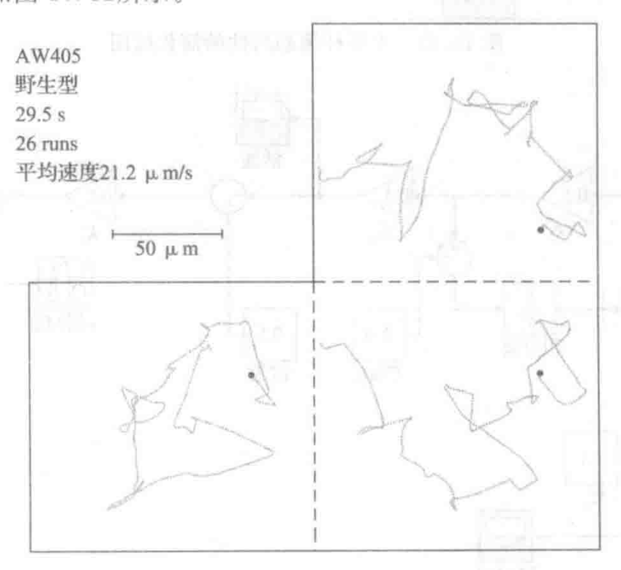


图 10.82　大肠杆菌趋药性的试验数据(Bergand Brown 1972)。大肠杆菌三维运动的平面投影图

模型

我们需要考虑的问题就是如何建立一个模型作为控制系统框图，从而描述在这种趋药性环境下大肠杆菌的平均运动。我们用平均值代表在鞭毛中只有一个和蛋白质相互作用的受体复合物。研究表明，系统方程是复杂和高度非线性的。此外，细菌表面包含数百个受体复合物，并且它们之间的相互作用已经在图 10.81 中显示出来。就我们的研究而言，框图中变量均选为线性小信号的平均偏差，其偏差值与均衡值不同。输入为配体的浓度，引诱剂是正值且排斥剂是负值。系统的输出是 Che A-P 的活性和在 x 轴方向的移动情况。对模型进行参数匹配得到的曲线与图 10(Mello 等，2004)中给出的响应曲线一致。在一维运动下的力学模型是假设黏性摩擦在运动中占主导地位，因此动力部分是一个简单的积分环节。该模型是基于以下事实建立的。

- 通过观察可知，当一个配体结合一个具有活性的受体时，Che A-P 浓度的改变，产生 Che B-P 和 Che Y-P 几乎是瞬间完成的。
- Che B 的磷酸化只改变脱甲基作用的比例，本身并未改变脱甲基作用的程度。甲基化水平变化程度要远远慢于翻滚率的变化。
- 注入引诱剂后，通过 Che A-P 浓度衡量的"活性"迅速下降，然后缓慢恢复到与稳态完全相同的水平。这个性质称为"活性"的适应性。

根据上述事实现象包括适应性，系统的控制框图如图 10.83 所示。如图 10.83 所示，适应性的结果通过标准的积分控制方案实现。Simulink 原理图如图 10.84 所示，图 10.85～图 10.87给出了 Che R 为固定浓度时的响应曲线。如果 Che R 的值发生改变，"活性"的稳态浓度会发生变化，甲基化作用的时间常数也会随之变化。如图 10.85 所示，如果 $t=$20s 时添加引诱剂，翻滚活性下降，但是在大约 5s 内恢复到它的初值。图 10.86 给出了相应甲基化水平的变化曲线，而图 10.87 给出了趋药性模型的运动响应曲线。

782～783

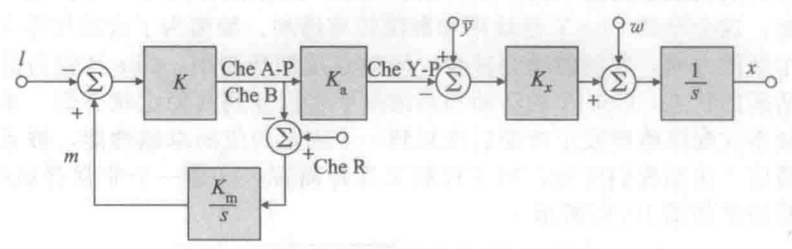


图 10.83　大肠杆菌趋药性的简化框图

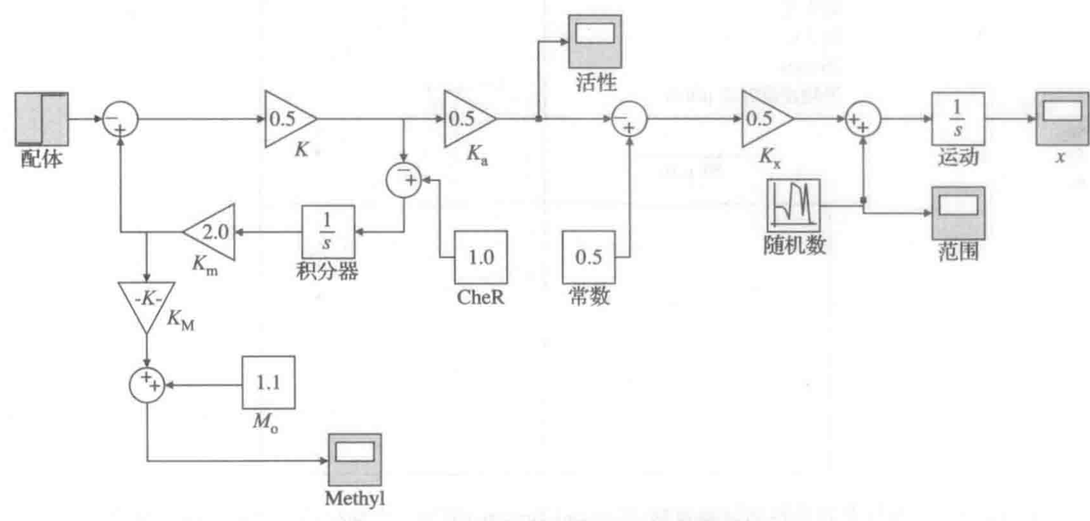


图 10.84　大肠杆菌趋药性的仿真原理图

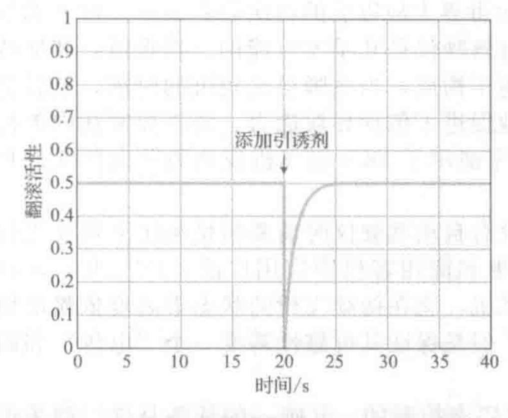


图 10.85　大肠杆菌趋药性模型在 $t=20$s 加入引诱剂时细菌翻滚频率仿真图

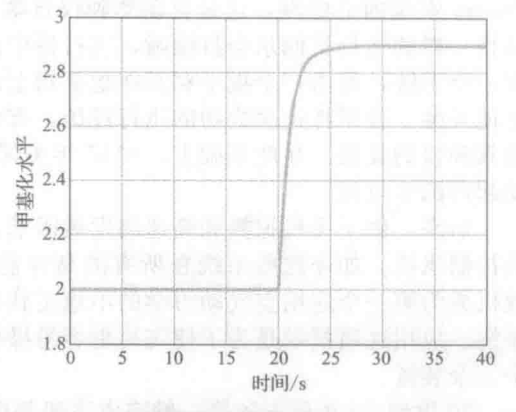


图 10.86　大肠杆菌趋药性模型在 $t=20$s 加入引诱剂时甲基化的仿真图

其中：l 代表配体；m 代表甲基化；Che R 为稳态状态下的甲基化率；$\bar{y}$ 为稳态状态下的活性值；w 为稳态状态下的随机游走运动。

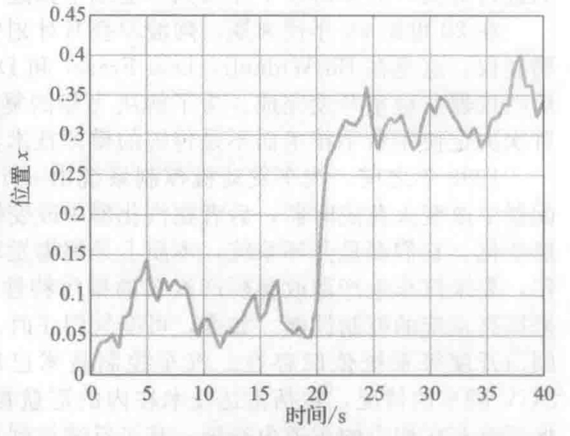


图 10.87　大肠杆菌趋药性模型在 $t=20$s 加入引诱剂时的运动响应

最后，我们通过这一实例研究产生了更多的疑问。例如，可以从基础化学和物理方程角度通过小信号分析的方法推导模型。又如，可以对现有的模型进行修改，从而解释 Che R 浓度的改变情况。最后，如何将现有模型扩展到可以描述三维运动情况的模型，我们希望能够通过这本书受到启发，找到答案。

总结和回顾

多年来，生物学家们一直致力于对生物体各部分的研究。最近，研究的焦点已经转为将整个生物体的行为，作为一个系统相互关联的部分进行研究。自 20 世纪 70 年代以来，已通过实验证明了许多生物系统以一种自适应的方式来适应环境。近年来，分析模型已用于解释在本实例中所研究的这种现象。这种新型的分析模型可以解释生物系统固有的特性，比如受积分控制的受体敏感性的鲁棒自适应。控制理论方法有助于提高我们对生物系统的行为和特性的认知程度。我们希望通过这个简单的例子，激发人们对这个领域的兴趣。

784~785

10.8　历史展望

1912 年，即怀特(Wright)兄弟首次飞行的 9 年后，第一个自动驾驶仪在 Curtis 号飞行船上做了测试。它由 Elmer Sperry 设计，包括一个用来测量飞机姿态的陀螺仪和用来灵活控制翼面的伺服电动机。其目的是有意将飞机设计得轻微不稳定，从而使飞行员更好地控制它，这在某种程度上说，也是怀特兄弟设计的一个结果。1914 年，飞行员 Lawrence Sperry 双手举在空中并且站在驾驶舱里，便可通过机械控制使飞机在接近地面的位置沿着机翼的方向前后飞行，这个自动驾驶仪在法国获奖而且由此获得声望[⊖]。

1915 年，由于第一次世界大战的军事安全问题，自动驾驶仪的研究转入地下进行。1933 年，威利·波斯特(Wiley Post)驾驶 “Winnie Mae” 号飞行器通过环球飞行测试了

⊖ 从操作杆到控制面之间没有机械连接。

Sperry 系统的适应性，这是自动驾驶仪自第一次世界大战以后的再次公众展示。由于像波斯特一样的飞行员偶尔会打瞌睡，飞行器中没有驾驶仪是几乎不可能的。据报道，波斯特有一个系统，是由一个扳手和系在他手指上的绳子构成，当他睡得比较沉的时候，装置会把他弄醒。波斯特这次成功的飞行经历，有效地促进了包括导航能力、姿态控制在内的自动驾驶仪的发展。在此基础上，1947 年美国空军演示了 DC3 型飞机成功飞跃大西洋的自动起落的全过程。

后来，由于飞机掠翼和高速的发展需求，没有自动驾驶仪时需要增稳系统来帮助飞行员控制飞机。如今这些系统在所有的高性能军事和商用客机中应用广泛。1974 年，F-16 战机成为第一个应用空气动力学的不稳定状态飞机，它在持续飞行的状态下高度依赖增稳系统。应用这项技术是为了使飞机更容易操作，但是保证其可靠性需要一个“电传”和四个冗余装置。

20 世纪 50 年代末的第一艘宇宙飞船是没有姿态控制的，其唯一的任务是进行测量信息并传播回地球。然而，在随后 20 世纪 60 年代初发射的 Corona 号宇宙飞船，其任务是获得地球的照片，这就需要相机有着精确的指向性和稳定性。那时，这些任务为了军事目的进行分类，后来解密了才得到一些细节描述[⊖]。

786

在 20 世纪 60 年代末期，阿波罗登月计划中的登月舱和驾驶舱应用了第一个数字自动驾驶仪。这是在 BillWidnall，Don Fraser 和 Dick Battin 的指导下，主要通过麻省理工大学的仪器实验室开发完成。为了解决飞船的复杂性，美国国家航空航天局在合理权衡下，首次决定使用数字技术而不是传统的模拟技术实现自动驾驶。

1980 年之前，汽车发动机控制系统由一个机械装置和一个流体系统组成，前者在分配器中改变火花定时器，后者在汽化器中改变燃油量应对气流速度或者油门踏板位置的突然变化。它们都是开环系统，本质上是根据发动机的运行条件规划合适的控制设置。1980 年，要求汽车生产商改善所产汽车的排污特性，所以有必要用 10.4 节中描述的反馈方式来提高系统的控制性能。如今，可变气门正时、可变燃油注入正时、特定高压灌注、可变阀门开度等系统依旧存在。汽车控制技术已取得了较大的进步：增稳系统大幅减少了 SUV 翻车的情况，包括雷达技术在内的巡航控制使汽车与前车保持合适的距离，传感器保证汽车在相应的车道内行驶，基于反馈控制系统的驾驶汽车技术也正在成为现实(例如，谷歌汽车)。

磁盘驱动的伺服系统应用一直以来是令人满意的控制应用之一。从 20 世纪 50 年代早期的初代产品到如今的大容量商用驱动器，访问磁盘中数据的问题引起了很多有待解决的控制挑战。磁盘驱动伺服系统的基本的控制方式目前是不会改变的，有两种控制方式，分别是寻道模式和磁道跟踪模式，它们分别有自己的控制系统。1995 年开发的嵌入式伺服系统中的数据和如今的数据仍相同，说明控制系统本质上是由真实的数据进行采样的。1985 年推出的提高机械响应特性的旋转执行器，以及 1989 年推出的基本平面线圈执行器如今仍在使用。双(两阶)执行器的硬盘驱动器现在也在使用，磁道追踪的精确性和振动抑制是当前控制系统设计中的关键问题。磁学是通过使用 3D 软件对扭矩系数进行优化设计，目的是减小磁盘的声音(除了在服务器上使用的设备)和成本。可以增加访问时间并且在更光滑的剖面上寻道从而减小声音。最新的存储器设计趋势是使用固态闪存驱动器(SSD)，但是它们速度缓慢并且易挥发。所以出现了一个综合性的解决方案：磁盘驱动器的前部为固态闪存驱动器的缓冲区，这两种技术是互补的并会在可预见的未来共存。几十年来，一直预言硬盘会消失，这仅仅是因为它的存储容量和成本低(2013 年 3TB 的硬盘驱动器的零售价约为 129 美元)。

787

将控制思想应用于半导体晶片生产自动化中已成为发展趋势。许多重要的过程步骤例

⊖ Taubman(2003).

如快速热处理、化学机械平面化和平版印刷都使用先进的实时控制器。据预测，在未来十年内，会有更多的带有新型传感器的半导体制造设备采用复杂的现场反馈控制。半导体工业采用先进的闭环控制系统，特别是即将到来的 450mm 直径的晶片，这些对于控制系统工程师来说代表了新的机遇与挑战。用核磁共振显微镜来观察材料成像的原子结构(deRoover 等，2008)也应用了控制的思想，这可以使生物子系统成像并且从根本上改变我们对原子结构的认识。

系统生物学的新兴领域标志着生命科学时代的到来。研究单个部分的传统方法正被一种注重整个生物系统行为的新方法所取代。理解生物系统的行为、发现疾病例如癌症的治疗方法、以及开发新药、生产抗生素、生产疫苗都是控制领域中令人可期的目标。

如今，控制理论得到了广泛的应用。人们已将反馈控制思想应用于生物系统、网络拥塞控制，以及正在形成的新航空航天等领域。同时也将其应用于刚刚起步的基因组研究中，其将人体看作一个动态系统。互联网也已吸引了许多控制系统研究者的关注，他们希望了解互联网技术的成功之处，并找到如何更好完善它们的方法。网络设计和控制包括网络建模、拥塞路由的开发与控制也正在研究中。许多同行也热衷于将控制理论的思想应用于金融领域，但是到目前为止，他们没有获得满意的结果。

小结

本章给出了控制系统设计的一个概要，并且在六个典型实例中进行了应用。设计大纲有着明确的步骤。

(1) 建立系统模型并明确系统相应的性能指标。这一步的目的是用来解决：系统是什么，它是用来做什么的？

(2) 选择传感器。实现系统控制的基本原则是如果你不能观察它，就不能控制它。下列是选择传感器时需要考虑的因素。

①传感器的数量及位置。

②需要应用的技术。

③传感器的性能，如精度。

④物理尺寸与重量。

⑤传感器的质量，如使用寿命，对外界环境改变的鲁棒性等。

⑥价格。

(3) 选择执行器。执行器必须能驱动系统从而使得系统能满足所需的性能指标。对于执行器的选择标准，选择传感器时所考虑的标准对其同样适用。

(4) 建立线性模型。所有的设计方案都是基于线性模型的。对于小信号扰动模型和反馈线性化法都适用。

(5) 设计简单的 PID 控制器。使用 PID 控制器或者与之相近的超前滞后补偿器，都可以满足要求；任何情况下，这种尝试将体现控制问题的本质。

(6) 评估/修正被控对象。评估被控对象是否能有效地提高系统的闭环性能，如果可以，则回到步骤 1 或步骤 4。

(7) 尝试最优设计。对控制规则的选取及基于状态方程的观测器设计，通过对称根轨迹方法可有效保证控制系统的稳定性，还可以在减小误差和控制效果之间做一个权衡。而另一个设计方法是强制极点配置，该方法能使设计者对系统的动态响应进行直接控制。对称根轨迹法和极点配置法都会导致系统在参数变化时鲁棒性降低。

(8) 系统仿真及性能检验。这里要使用所有的分析工具，包括根轨迹、频率响应、*GM* 和 *PM* 测量、瞬态响应等。也可以通过在仿真中改变模型的参数以及观察在使用数字控制时用离散模型近似补偿器的效果来检验设计的性能。

(9) 制造样机及测量其对典型输入信号的性能。事实胜于雄辩，没有经过测试的控制设计是不会被接受的。任何一个模型都不可能具备物理设备的所有特征，因此在时间和预算允许的情况下确定最终设计之前的最后一步是利用样机做试验。

- 对于卫星的实例研究是为了说明陷波补偿对于欠阻尼振荡系统的作用，也说明合体执行器和传感器系统比单体系统要易于控制。
- 对波音 747 侧向稳定性的研究是为了说明内环设计的作用，它用来辅助飞行员飞行，而飞行员提供基本的外环控制。
- 波音 747 的高度控制说明如何将内环反馈和外环补偿结合起来，从而设计一个完整的控制系统。
- 汽车的空燃比控制说明了如何用伯德图设计一个有时间延迟的系统。对带有非线性传感器的设计仿真，验证用根轨迹等量增益的概念对极限周期进行的启发性分析。
- 硬盘驱动的例子说明带宽对不确定环境下的控制是十分重要的。

- 快速热处理例子阐述了对于非线性热处理系统的建模和控制。
- 大肠杆菌趋药性的研究阐述了一个将控制理论的思想应用于新兴的系统生物学领域的简单例子。
- 在所有的例子中，设计者应该会使用包括根轨迹、频率响应、状态反馈的极点配置以及对时域响应进行仿真在内的多种工具，从而获得一个良好的设计。在文章的开头，我们就希望读者能理解这些工具的使用方法，现在相信你已经可以实践控制工程的这门艺术。

复习题

10.1 为什么对于像机器人手臂这样的欠阻尼结构，将执行器和传感器进行组合配置要比分别单独的设置更易于设计？

10.2 为什么控制工程师要考虑受控过程的设计要求？

10.3 对以下控制问题的执行器和传感器举例。

(a) 地球同步通信卫星的姿态控制。

(b) 波音 747 的俯仰控制。

(c) CD 播放器的磁道跟踪控制。

(d) 点火式汽车发动机的空燃比控制。

(e) 给汽车喷漆的机械手臂的位置控制。

(f) 轮船的航迹控制。

(g) 直升机的姿态控制。

习题

10.1 在三种 PID 控制(比例、积分、微分)中，哪一种对于减小由不变干扰所引起的误差最有效果？请解释。

10.2 对机械结构而言，当反馈控制系统中传感器不与执行器合体时，是不是具有很大的不稳定性？请解释。

10.3 对于被控对象 $G(s)=1/s^3$，试问是否可以通过下面的超前补偿器使其稳定。

$$D_c(s)=K\frac{s+a}{s+b},\quad a<b$$

(a) 反馈系统的最大相位裕度是多少？

(b) 包括此被控对象，和一定数量的超前补偿器的系统可以非条件稳定吗？请解释可以或不可以的原因。

10.4 考虑如图 10.88 所示的闭环系统。

(a) 当 $K=70\,000$ 系统的相位裕度是多少？

(b) 当 $K=70\,000$ 系统的增益裕度是多少？

(c) 系统产生 70°相位裕度的 K 值是多少？

(d) 系统产生 0°相位裕度的 K 值是多少？

(e) 绘制系统以 K 为变量的根轨迹，并确定使系统处于临界稳定的 K 值。

(f) 如果扰动量 w 为常量并且 $K=10\,000$，$y(+\infty)<0.1$，此时 w 的最大值为多少？(假设 $r=0$)

(g) 若要求得到比(f)问中 w 值更大的 w，但保持同样的误差限制条件 $[|y(+\infty)|<0.1]$，讨论用哪些步骤？

10.5 考虑如图 10.89 所示的系统代表某型号飞机的姿态变化率控制。

(a) 设计一个补偿器使其主导极点在 $-2\pm 2j$ 处。

(b) 绘制所设计系统的伯德图，选择补偿器，使其分隔频率最少为 $2\sqrt{2}$rad/s 且 PM≥50°。

(c) 绘制所设计系统的根轨迹，并求出当 $\omega_n>2\sqrt{2}$rad/s，$\zeta\geqslant 0.5$ 时的速度常数。

10.6 如图 10.90 所示的伺服机构框图。下面这

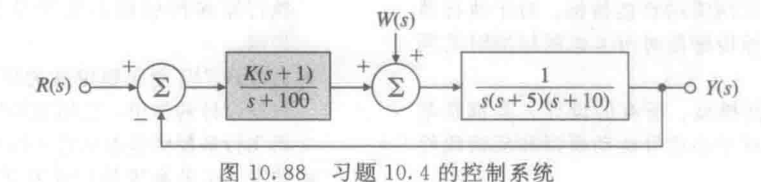


图 10.88 习题 10.4 的控制系统

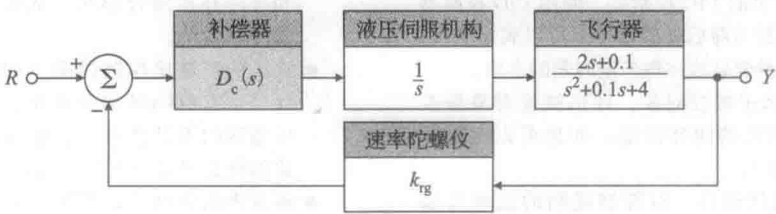


图 10.89 飞行器姿态速率控制框图

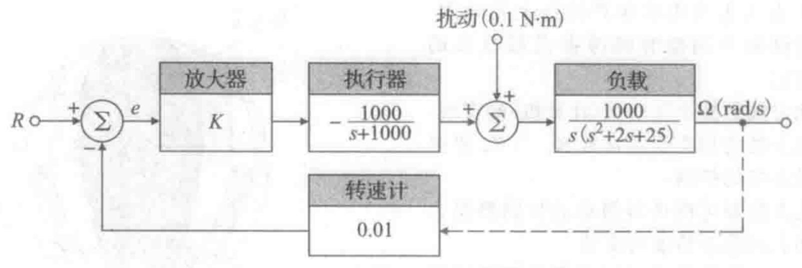


图 10.90 习题 10.6 的伺服机构

些说法哪些是正确的？

(a) 在评估稳定控制系统的最大有效增益时，必须包含执行器的动态性能分析(极点位于 1000rad/s)。

(b) 稳定系统中增益 K 必须是负值。

(c) 存在一个 K 值，使控制系统在频率为 4rad/s 和 6rad/s 之间振荡。

(d) 如果 $|K|>10$，系统不稳定。

(e) 若稳定时 K 为负值，控制系统不能抵消正干扰。

(f) 正的不变干扰会增大负载，因而使 e 的终值为负。

(g) 如果只有一个正的不变控制输入 r，误差信号 e 的终值必定大于零。

(h) 当 $K=-1$ 时闭环系统稳定，由扰动所引起的速度误差稳定幅值小于 5rad/s。

10.7 图 10.91 所示的为平衡控制杆及其相应的控制框图。控制量是作用在支点上的力矩。

(a) 利用根轨迹分析方法，设计一个补偿器 $D(s)$，使得系统主导极点在 $s=-5\pm 5j$ 处（相当于 $\omega_n=7$rad/s，$\zeta=0.707$）。

(b) 利用伯德图法设计一个补偿器 $D(s)$，使其满足下列要求：

- 对于恒定的输入力矩 $T_d=1$，位移 θ 稳态值小于 0.001。
- 相位裕度≥50°。
- 闭环带宽≈7rad/s。

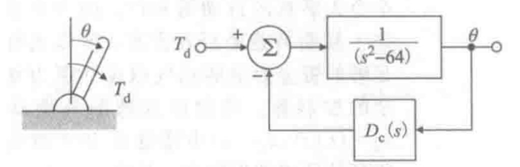


图 10.91 习题 10.7 的伺服机构

10.8 如图 10.92 所示的为标准的反馈系统图。

(a) 假设：

$$G(s)=\frac{2500K}{s(s+25)}$$

设计一个超前补偿器使得系统的相位裕度大于 45°；斜坡输入的稳态误差应小于或等于 0.01。

(b) 使用(a)问中的传递函数，设计一个超前补偿器使得系统的超调量小于 25%，调整时间在允许误差为 1%时小于 0.1s。

(c) 假设：

$$G(s)=\frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.2s)}$$

并让性能指标 $K_v=100$，$PM\geqslant 40°$，此时超前补偿对系统有影响吗？设计一个滞后补偿器，并绘制补偿后的系统根轨迹。

(d) 利用(c)问中的 $G(s)$，设计一个滞后补偿器使系统的峰值超调量小于 20%，并且 $K_v=100$。

(e) 利用超前滞后补偿器，重复问题(c)问。

(f) 求(e)问部分中补偿后的系统的根轨迹，并将其与(c)问部分中的根轨迹图进行比较。

10.9 考虑图 10.92 所示系统：

$$G(s)=\frac{300}{s(s+0.225)(s+4)(s+180)}$$

设计补偿器 $D_c(s)$ 使得闭环系统满足下面的指标：

- 系统对阶跃输入是无差的。
- PM=55°，GM≥6dB。
- 增益穿越频率不小于未补偿的频率。

(a) 使用何种补偿器，为什么？

(b) 设计一个符合上述性能指标要求的补偿器 $D_c(s)$。

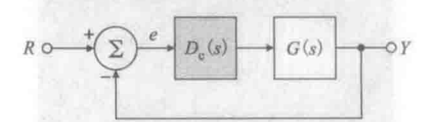


图 10.92 标准反馈控制系统框图

10.10 我们已经讨论了三种设计方法：埃文斯根轨迹法，伯德频率响应法，状态变量极点配置法。解释下面关于这些方法的描述哪一个最好(如果你认为某种方法存在多个描述的话，请指出并说明理由)。

(a) 此方法在用获得的实验数据描述系统时是最常用的一种方法。

(b) 此方法为动态响应特性如上升时间、超调量及调整时间等提供最直接的控制。
(c) 此方法更易于自动化(计算机)的实现。
(d) 此方法为稳态误差常数 K_p 和 K_v 提供最直接的控制。
(e) 此方法最可能使最简单的控制器符合动态和静态精度的要求。
(f) 此方法能使设计者保证最终设计达到无条件稳定。
(g) 此方法对于包含传递滞后项，比如 $G(s)=\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$ 的系统无须修正。

10.11 超前滞后网络是基于频率响应(伯德图)法设计的典型环节。假定一个1型系统，请指出这些补偿网络对于下面每一个性能指标的作用效果。在每一个例子中，说明是“增加”、“不变”、“减少”三种中的哪一种。使用二阶系统 $G(s)=K/[s(s+1)]$ 来阐述你的结论。

(a) K_v；　　(b) 相位裕度；
(c) 闭环带宽；　　(d) 超调量百分比；
(e) 调整时间。

10.12 关于热气球的高度控制的问题：美国热气球驾驶者史蒂夫·福斯特(Steve Fossett)独自驾驶“自由精神”号热气球于2002年7月3日降落在澳大利亚内陆，成为第一个独自完成热气球环球飞行的人(见图10.93)。热气球(见图10.94)垂直运动的线性化垂直平衡方程如下：

$$\delta\dot{T}+\frac{1}{\tau_1}\delta T=\delta q$$

$$\tau_2\ddot{z}+\dot{z}=a\delta T+w$$

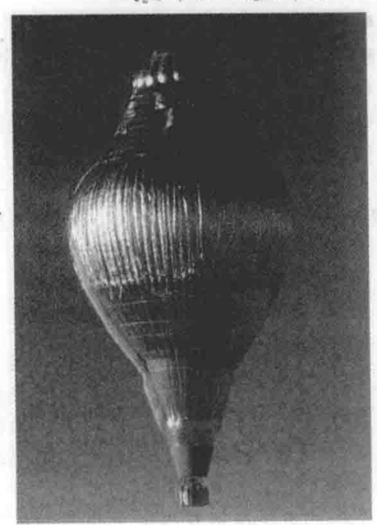


图 10.93 “自由精神”号热气球

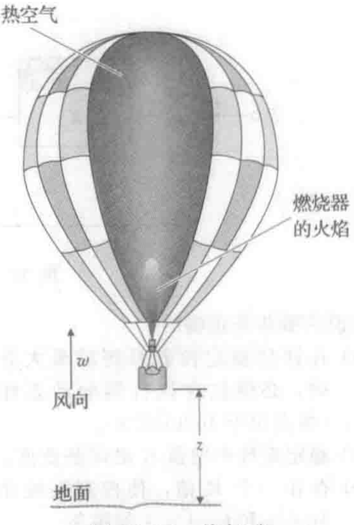


图 10.94 热气球

其中：δT 为热气球温度对平衡温度(热气球浮力等于重力时的温度)偏移量；z 为气球高度；δq 为燃烧器的加热速度对于平衡速度(取决于热空气的热容量)偏移量；w 为风速的垂直分量；τ_1，τ_2，a 为方程的参数。

为气球设计一个定高度自动驾驶仪，气球参数为

$$\tau_1=250\text{s},\quad \tau_2=25\text{s},\quad a=0.3\text{m}/(\text{s}\cdot{}^\circ\text{C})$$

只有高度是可测的，所以使用的控制规则为

$$\delta q(s)=D_c(s)[z_d(s)-z(s)]$$

其中：z_d 是期望的高度(受控高度)。

(a) 以比例反馈控制器 $\delta q=-K(z-z_d)$ 的增益 K 为参量绘制其闭环特征根的根轨迹。利用劳斯判据(或使 $s=j\omega$ 并找出特征多项式的根)，从而确定当系统临界稳定时的增益值和频率。
(b) 利用我们的直觉和(a)问中的结果，并大量利用相应的超前补偿器，设计一个令人满意的自动驾驶仪。因为史蒂夫·福斯特是个百万富翁，所以他有足够的资金为他的热气球设计更为复杂的控制器。绘制以双超前补偿器 $\delta q=D_c(s)(z_d-z)$ 中增益 K 为参数的闭环特征根的根轨迹，其中

$$D_c(s)=K\left(\frac{s+0.03}{s+0.12}\right)^2$$

(c) 分别绘制比例反馈及超前补偿系统的开环传递函数的伯德图的幅值分量(仅直线的渐近线)。
(d) 选择增益 K 使得超前补偿器的分隔频率为0.06rad/s。

(e) 选择增益 K 使得超前补偿器的分隔频率为 0.06rad/s。[⊖]

(f) 如果(e)问中的误差过大，怎样修改补偿器以获得更高的低频增益？（给出定性答案即可）

10.13 在卫星姿态控制系统中，经常使用一个反作用轮以提供角运动。该系统的运动方程为：

$$\text{卫星}: I\ddot{\varphi} = T_c + T_{ex}$$

$$\text{轮}: J\dot{r} = -T_c$$

$$\text{测量}: \dot{Z} = \dot{\varphi} - aZ$$

$$\text{控制}: T_c = -D_c(s)(Z - Z_d)$$

其中：J 为轮的角动量；r 为轮的速度；T_c 为控制力矩；T_{ex} 为扰动力矩；φ 为被控角；Z 为传感器的测量值；Z_d 为参考角；I 为卫星惯量(1000kg/m^2)；a 为传感器常数(1rad/s)；$D_c(s)$为补偿器。

(a) 假定 $D_c(s) = K_0$ 为一个常数。绘制最终闭环系统关于 K_0 的根轨迹。

(b) 闭环系统稳定时，K_0 的变化范围是多少？

(c) 向系统中加入一个极点位于 $s=-1$ 处的超前网络，使得闭环系统的带宽 $\omega_{BW} = 0.04\text{rad/s}$，且阻尼比 $\zeta = 0.5$，补偿环节为

$$D_c(s) = K_1 \frac{s+z}{s+1}$$

超前网络的零点应位于何处？绘制补偿系统的根轨迹，并给出满足性能指标的 K_1 值。

(d) 系统稳定时，K_1 的取值范围是多少？

(e) 系统的稳态误差是多少？（对于(c)问中的设计而言，Z 和参考输入 Z_d 对于常干扰力矩 T_{ex} 是不同的）

(f) 有抗干扰 T_{ex} 的是什么系统？

(g) 调整从(c)问中计算出的增益值 K_1，绘制开环系统的伯德图的渐近线。向系统中加入(c)问中的补偿环节，计算闭环系统的相位裕度。（此时具有抗干扰 T_{ex} 系统的类型是什么？）

(h) 用状态变量 φ，$\dot{\varphi}$，Z 写出开环系统的状态方程。选择状态反馈控制器的增益为 $T_c = -K_\varphi \varphi - K_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}$，使得系统的闭环极点在 $s = -0.02 \pm 0.02\text{j}\sqrt{3}$处。

10.14 图 10.95 所示的为传递函数为 $G(s) = 1/[s(s+1)]$的闭环控制系统的三种设计方案。其中，信号 w 是系统的噪声，可将其当做跃阶信号进行分析；信号 v 是传感器噪声，在包含高频源时需要进行分析。

(a) 计算参数 K_1，a，K_2，K_T，K_3，d，K_D 的值，使每个例子(假定 $w=0$，$v=0$)中有：

$$\frac{Y}{R} = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

注意在Ⅲ型系统中，极点位于 $s=-4$处。

(b) 完成下面的表格。用 A/s^k 的形式书写最后一列，以说明在高频时信号 V 的衰减速度。

系统	K_v	$\left.\frac{y}{w}\right\|_{s=0}$	$\left.\frac{y}{v}\right\|_{s\to+\infty}$
Ⅰ			
Ⅱ			
Ⅲ			

(c) 将三个设计方案按下面的特性评定等级(最好为“1”，最差为“3”)

性能	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
跟踪			
被控对象噪声抑制			
传感器噪声抑制			

10.15 车-杆平衡器包含有手柄角度、手柄角速度、车速三个状态变量，它的运动方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 31.33 & 0 & 0.016 \\ -31.33 & 0 & -0.216 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.649 \\ 8.649 \end{bmatrix} u$$

$$y = [10 \quad 0 \quad 0] x$$

其中以手柄角度为输出，以驱动车轮的电动机电压为控制输入。

(a) 计算从 u 到 y 的传递函数，并确定零点和极点。

(b) 确定反馈增益 K，使系统的极点位于 -2.832 及 $-0.521 \pm 1.068\text{j}$，$\omega_n = 4\text{rad/s}$。

(c) 确定估计器增益 L，从而使 3 个估计器的极点均在-10 处。

(d) 写出估计状态反馈补偿器的传递函数，此补偿器由(b)问、(c)问中所计算出的增益确定。

(e) 假设存在一个极点在-10 处的降阶估计器，则所需的估计器增益为多少？

(f) 利用降阶估计器重新分析(d)问。

(g) 计算两种补偿器的频率响应。

⊖ 原书中习题 10.12(d)与(e)重复。——译者注

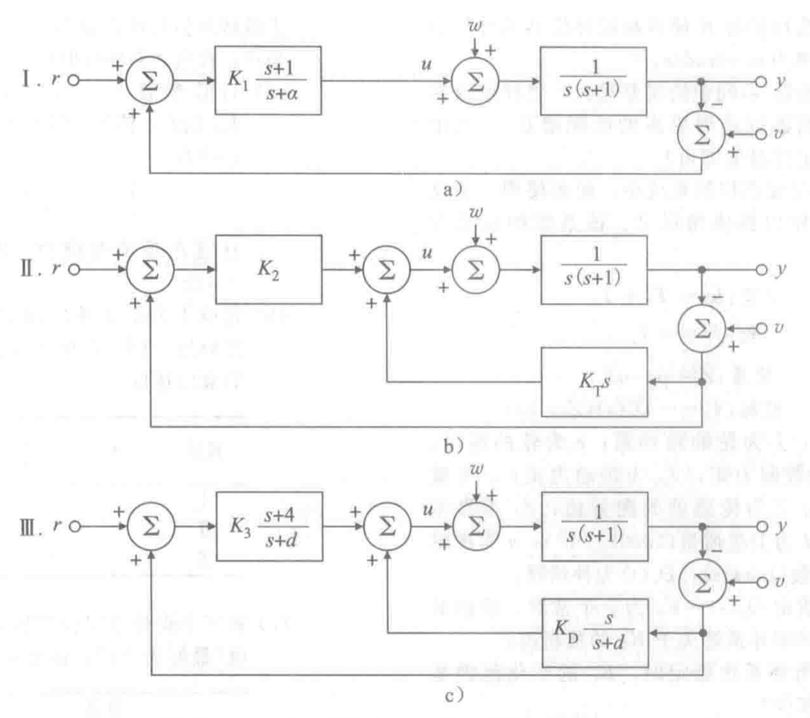


图 10.95 习题 10.14 的可选反馈结构

10.16 一架重 282t 的波音 747 飞机将要在海平面上着陆。在实例分析(10.3 节)中所给出的状态并且假设飞机速度为 221ft/s (0.198 马赫)，则横向扰动方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\\ \dot{p}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0890 & -0.989 & 0.1478 & 0.1441\\ 0.168 & -0.217 & 0.166 & 0\\ -1.33 & 0.327 & -0.975 & 0\\ 0 & 0.149 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \varphi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0148\\ -0.151\\ 0.0636\\ 0\end{bmatrix}\delta_r$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\\ p\\ \varphi\end{bmatrix}$$

相应的传递函数为

$$G(s)=\frac{r(s)}{\delta_r(s)}=\frac{-0.151(s+1.05)(s+0.0328\pm0.414j)}{(s+1.109)(s+0.0425)(s+0.0646\pm0.731j)}$$

(a) 绘制欠补偿系统的根轨迹[对 $1+KG(s)$]及系统的频率响应。系统可以选用哪种典型的控制器？

(b) 通过绘制系统的对称根轨迹，尝试对系统进行状态变量设计。就对称根轨迹而言，选择系统的闭环极点为

$$\alpha_c(s)=(s+1.12)(s+0.165)(s+0.162\pm0.681j)$$

同时选择观测器极点使其比系统闭环极点快 5 倍，即

$$\alpha_e(s)=(s+5.58)(s+0.825)(s+0.812\pm3.40j)$$

(c) 计算对称根轨迹补偿器的传递函数。

(d) 讨论系统对参数变化及非模型化动态的鲁棒性。

(e) 注意本设计与本章开始时为不同飞行条件而改进的设计之间的相似性。这对在整个操作过程中进行连续控制(非线性)有什么意义？

10.17 (L. Swindlehurst 教授提供)图 10.96 所示的反馈控制系统是位置控制系统。由电枢控制的直流电动机是系统的一个重要组成部分。输入电位计产生电压 E_i，该电压与轴的目标位置成比例关系，即 $E_i=K_p\theta_i$。同样，输出电位计产生电压 E_0，该电压与轴的实际位置成比例关系，即 $E_0=K_p\theta_0$。注意，这里我们假设两个电位计有相同的比例系数。利用误差信号 E_i-E_0 驱动补偿器，使其产生一个电枢电压来驱动电动机。电动机的电枢电阻为 R_a，电枢电感为 L_a，反电势常数为 K_e，电动机轴的转动惯量为 J_m，并且摩擦力产生的旋转阻尼为 B_m。最后，齿轮齿数比为 $N:1$，负载的转动惯量为 J_L，

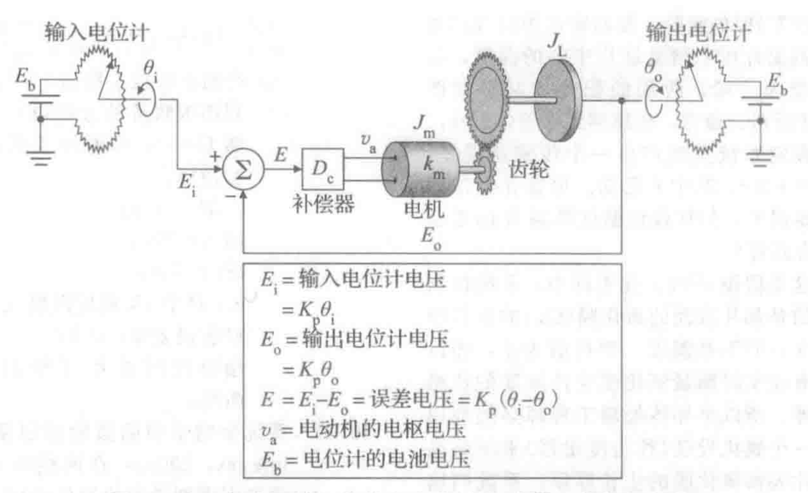


图 10.96 电动机轴上齿轮和电位计传感器上的伺服机构

负载的阻尼为 B_L

(a) 写出描述该反馈系统运行的微分方程。

(b) 写出关于 θ_o，$\theta_i(s)$ 的综合补偿器的传递函数 $D_c(s)$

(c) 以电动机的电枢电压 v_a 作为输入，电位计的电压 E_o 作为输出，得到系统的开环频率响应数据如表 10.4 所示。假设电动机是线性的，且有最小相角。可推断出电动机的传递函数为

$$G(s)=\frac{\theta_m(s)}{V_a(s)}$$

其中：θ_m 为电动机轴的角位置。

表 10.4 习题 10.17 的频率响应数据

频率/(rad/s)	$\left\|\frac{E_o(S)}{V_a(S)}\right\|$/dB
0.1	60.0
0.2	54.0
0.3	50.0
0.5	46.0
0.8	42.0
1.0	40.0
2.0	34.0
3.0	30.5
4.0	27.0
5.0	23.0
7.0	19.5
10.0	14.0
20.0	2.0
40.0	−10.0
60.0	−20.0
65.0	−21.0
80.0	−24.0
100.0	−30.0
200.0	−48.0
300.0	−59.0
500.0	−72.0

(d) 确定一组适合位置控制系统的性能指标，从而获得最佳性能。设计 $D_c(s)$ 以满足这些性能指标。

(e) 利用 Matlab 进行分析与仿真，对设计进行校验。

10.18 设计并构造一个能使小球位于自由摆杆中心的装置。该装置如图 10.97 所示。将线圈缠绕在永磁铁上作为执行器来移动横轴杆，用太阳能电池测量小球的位置，用一个具有霍尔效应的装置来测量横杆的位置。研究其他可行的执行器和传感器。将只用球位置作为反馈量所获得的控制效果与同时使用球和杆的位置作为多环反馈量所获得的控制效果进行比较。

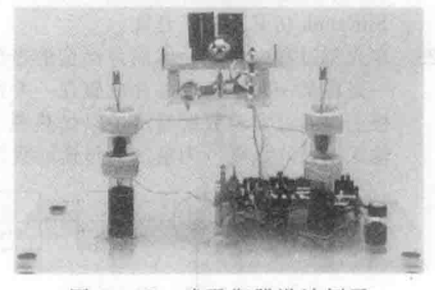


图 10.97 球平衡器设计例子

10.19 设计并构造如图 9.2 所示的磁悬浮装置。在设计过程中不妨用 LEGO 组件进行设计。

10.20 使用 Arduino 板及相关软件设计并构造一个 Sun 追踪器。

10.21 批次控制：考虑如图 10.98 所示的快速热处理(RTP)系统。我们要加热一块半导体晶片，使用卤钨灯精确控制晶片的表面温度。系统的输出温度 T 是关于时间的函数，即 $y=T(t)$。系统的参考输入 R 是要求温

度(700℃)时的跃阶。控制输入为灯管的功率。高温计用来测量晶片中心的温度。系统模型为一阶，所用的积分控制器如图10.98所示。通常，传感器无误差($b=0$)。

(a) 假定系统突然产生一个传感器误差，即$b\neq 0$，其中b已知。尽管存在传感器误差，如何保证温度控制R的零稳态跟踪？

(b) 这里假设$b=0$。在实际中，系统控制的是晶片表面的氧化膜(Ox)的生长厚度，而不是温度。到目前为止，还没有能实时测量氧化膜生产厚度的传感器。所以半导体处理工程师必须利用一个脱机设备(称为度量器)来测量晶片表面氧化膜的生长厚度。系统的输出温度和氧化膜之间存在一个非线性的函数关系，即

$$\text{氧化膜厚度} = \int_0^{tf} p\mathrm{e}^{-\frac{c}{T(t)}}\mathrm{d}t$$

其中：tf为过程的持续时间；p和c是已知的常数。试设计一个方案，通过温度控制器及其输出，将中心晶片表面氧化膜的厚度控制在理想值($Ox=5000\text{Å}(1\text{Å}=10^{-10}\text{m})$)。

10.22 设计一个卤钨灯的非线性模型，并在Simulink上仿真。

10.23 设计一个高温计的非线性模型，说明如何从模型上推断出温度。

10.24 将三个传感器组合在一起从而形成单个信号来控制平均温度，重复RTP实例中的设计。详述线性设计的性能，并在非线性Simulink仿真上验证性能。

10.25 在光刻过程中，半导体晶片制造的步骤之一是在某一时间段将晶片放置在一个加热板上。通过实验数据给出了以加热源u为输入，晶片温度y为输出的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(s)}=G(s)=\frac{0.09}{(s+0.19)(s+0.78)(s+0.00018)}$$

(a) 绘制未补偿系统的180°根轨迹曲线。

(b) 利用根轨迹的方法设计一个动态补偿器$D_c(s)$，从而使系统满足下述的时域指标。

i) $M_p\leqslant 5\%$；

ii) $t_r\leqslant 20\text{s}$；

iii) $t_s\leqslant 60\text{s}$；

iv) 对于1℃的阶跃输入信号，系统的稳态误差要<0.1℃。

绘制此时补偿系统的180°根轨迹曲线。

10.26 系统生物学中的激励抑制模型(Yang and Iglesias，2005)：在网柄菌属细胞中，对化学引诱剂进行检测的关键信号分子的活性可通过下述的三阶线性模型来描述，从外部干扰到输出的传递函数为

$$\frac{y(s)}{w(s)}=S(s)=\frac{(1-\alpha)s}{(s+\alpha)(s+1)(s+\gamma)}$$

其中：w是与化学引诱剂浓度成比例的外部干扰信号；y是活性调节的部分作为输出。下式是该系统的另一种传递函数的表述方式：

$$G(s)=\frac{(1-\alpha)}{s^2+(1+\alpha+\gamma)s+(\alpha+\gamma+\alpha\gamma)}$$

并且“反馈调节”为

$$D_c(s)=\frac{\alpha\gamma}{(1-\alpha)s}$$

我们知道在这个模型中$\alpha\neq 1$。绘制系统反馈框图并标示出系统的干扰输入的位置以及系统的输出。指出系统的这个特定的形式具有什么意义？系统所隐含的特性是否得到了显现？对本系统而言，干扰抑制了系统的鲁棒性吗？假设系统的参数值为$\alpha=0.5$，$\gamma=0.2$，绘制在单位阶跃干扰输入下的系统的抗干扰响应曲线。

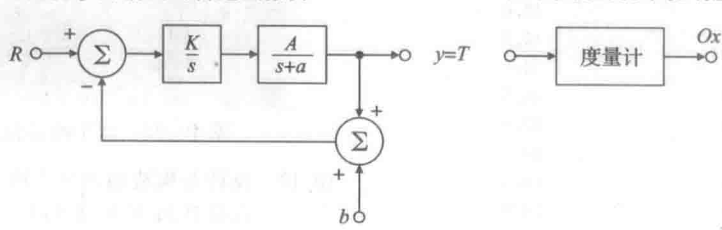


图10.98 RTP系统

788 ~ 803

附录 A 拉普拉斯变换

A.1 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换可用于研究反馈系统的全响应问题，包括暂态响应。它与傅里叶变换相比，傅里叶变换主要考虑的是系统的稳态响应。在许多应用中，定义 $f(t)$的拉普拉斯变换是很有用的，记$\mathscr{L}_{-}\{f(t)\}=F(s)$，作为一个复变量 $s=\sigma_1+\mathrm{j}\omega$，

$$F(s)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}\int_{0^-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{A.1}$$

这里使用 0^-（即恰在 $t=0$ 之前的值）作为积分下限，可认为是单向或单边拉普拉斯变换[㊀]，如果函数 $f(t)$有指数阶拉普拉斯变换，那意味着存在一个实数 σ_1 使得

$$\lim_{t\to\infty}|f(t)\mathrm{e}^{-\sigma_1 t}|=0 \tag{A.2}$$

被积函数中的指数衰减项提供了一个固定的衰减因子。这意味着当 $t\to\infty$时，$f(t)$不趋于零，选择足够大的 σ_1，使得 f 的增长率小于指数项的增长率。例如，$a\mathrm{e}^{bt}$ 是指数序列，而 e^{t^2} 不是指数序列。如果对于 $s_0=\sigma_0+\mathrm{j}\omega_0$，$F(s)$存在，那么对任意满足

$$\mathrm{Re}(s)\geqslant\sigma_0 \tag{A.3}$$

$F(s)$也存在。使 $F(s)$存在的 σ_0 的最小值称为收敛横坐标。恰好使 $\mathrm{Re}(s)\geqslant\sigma_0$ 的定义域称为收敛域。一般来说，双边拉普拉斯变换是在一个特定的区间上存在：

$$\alpha<\mathrm{Re}(s)<\beta \tag{A.4}$$

即此式定义了一个收敛区间。表 A.2 给出了一些拉普拉斯变换对。表中的每一项都是由拉普拉斯变换定理直接得到的[㊁]。

A.1.1 拉普拉斯变换的性质

本节中我们将讨论并证明第 3 章和表 A.1 中讨论的拉普拉斯变换的每一个性质。另外我们将通过例子展示这些性质是如何应用的。

1. 叠加原理

拉普拉斯变换的一个重要性质就是线性性质，其证明如下：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)\}&=\int_0^{+\infty}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_0^{+\infty}f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\beta\int_0^{+\infty}f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)\end{aligned} \tag{A.5}$$

线性的扩展属性是一个特例，即，

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t)\}=\alpha F(s) \tag{A.6}$$

㊀ 双向(或双边)拉普拉斯变换和积分下限为 0^+ 的所谓的$\mathscr{L}_+$变换，也会出现在其他地方。

㊁ 至于单边拉普拉斯变换，精明的读者会想知道在 s 平面其余地方拉普拉斯变换的有效性是怎样的，即区域 $\mathrm{Re}(s)<\sigma_0$。事实上，如果 $F(s)$只在区域 $\mathrm{Re}(s)\geqslant\sigma_0$ 上是有效的，在 s 平面的其他地方不满足，这是非常令人失望的。幸运的是，除了一些坏的情况(在实际中不会产生的)，可以使用复变函数理论中的解析延拓定理这一重要结果，将 $F(s)$的有效应用范围扩展到排除一些局部点的整个 s 平面上。

表 A.1 拉普拉斯变换的性质

编号	拉普拉斯变换	时域函数	备注
—	$F(s)$	$f(t)$	变换对
1	$\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)$	$\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$	叠加性质
2	$F(s)e^{-s\lambda}$	$f(t-\lambda)$	延时性质($\lambda\geqslant 0$)
3	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	比例性质
4	$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	位移性质
5	$s^mF(s)-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}\dot{f}(0)-\cdots-f^{(m-1)}(0)$	$f^{(m)}(t)$	微分性质
6	$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(\zeta)d\zeta$	积分性质
7	$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t)*f_2(t)$	卷积性质
8	$\lim\limits_{s\to+\infty}sF(s)$	$f(0^+)$	初值定理
9	$\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$	$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$	终值定理
10	$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty}F_1(\zeta)F_2(s-\zeta)d\zeta$	$f_1(t)f_2(t)$	时域乘积定理
11	$\frac{1}{2\pi}\int_{-j\infty}^{+j\infty}Y(-j\omega)U(j\omega)d\omega$	$\int_0^{+\infty}y(t)u(t)dt$	巴塞伐尔(Parseval)定理
12	$-\frac{d}{ds}F(s)$	$tf(t)$	时域与时间乘积性质

表 A.2 拉普拉斯变换表

编号	$F(s)$	$f(t),\ t\geqslant 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$1/s$	$1(t)$
3	$1/s^2$	t
4	$2!/s^3$	t^2
5	$3!/s^4$	t^3
6	$m!/s^{m+1}$	t^m
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
9	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2!}t^2e^{-at}$
10	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{-at}$
11	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$
12	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}(at-1+e^{-at})$
13	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$
14	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$
15	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-at}(1+at)$
16	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bt}-ae^{-at}$

（续）

编号	$F(s)$	$f(t),\ t\geqslant 0$
17	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
18	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
19	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$
20	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin(bt)$
21	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-at}\left(\cos(bt)+\frac{a}{b}\sin(bt)\right)$

例 A.1 正弦信号

求 $f(t)=1+2\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换。

解答。$\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

所以，用式(A.5)我们得到

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{2\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s^2+2\omega s+\omega^2}{s^3+\omega^2 s}$$

在 Matlab 中使用如下命令也可以得到相同的结果：

```
syms s t w
laplace(1+2*sin(w*t)).
```

◀

2. 时延性质

假设函数 $f(t)$ 延迟了 $\lambda>0$ 个时间单位。它的拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty}f(t-\lambda)e^{-st}\,dt$$

定义 $t'=t-\lambda$ 那么 $dt'=dt$，因为 λ 是一个常数，并且对于 $t<0$，$f(t)=0$。所以

$$F_1(s)=\int_{-\lambda}^{+\infty}f(t')e^{-s(t'+\lambda)}\,dt'=\int_0^{+\infty}f(t')e^{-s(t'+\lambda)}\,dt'$$

因为 $e^{-s\lambda}$ 不依赖时间，可以将其拿到被积函数之外，所以，

$$F_1(s)=e^{-s\lambda}\int_0^{+\infty}f(t')e^{-st'}\,dt'=e^{-s\lambda}F(s)\tag{A.7}$$

从结果中可以看出时域上时滞 λ 对应于频域上乘以 $e^{-s\lambda}$。

例 A.2 时滞正弦信号

求 $f(t)=A\sin(t-t_d)$ 的拉普拉斯变换。

解答。$\sin(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\sin(t)\}=\frac{1}{s^2+1}$$

所以用式(A.7)我们得到

$$F(s)=\frac{A}{s^2+1}e^{-st_d}$$

◀

3. 尺度变换性质

如果时间 t 乘以 a，那么时间比例信号的拉普拉斯变换为

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}\,dt$$

再次定义 $t'=at$。于是，$dt'=a\,dt$ 并且

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty}f(t')\frac{\mathrm{e}^{-st'/a}}{|a|}\mathrm{d}t'=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{A.8}$$

例 A.3 频率为 ω 的正弦信号

求 $f(t)=A\sin(\omega t)$的拉普拉斯变换。

解答。$\sin(t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\sin(t)\}=\frac{1}{s^2+1}$$

所以，用式(A.8)我们可以得到预期结果

$$F(s)=\frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+1}=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

在 Matlab 中使用如下命令也可以得到相同的结果，

```
syms s t w A
laplace(A*sin(w*t)).
```

◀

4. 复频移性质

在时域中将 $f(t)$乘以指数因子，对应于频率的平移为：

$$F_1(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(s+a)t}\mathrm{d}t=F(s+a) \tag{A.9}$$

例 A.4 指数衰减的正弦曲线

求 $f(t)=A\sin(\omega t)\mathrm{e}^{-at}$ 的拉普拉斯变换。

解答。$\sin(\omega t)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

所以，用式(A.9)我们得到

$$F(s)=\frac{A\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

◀

5. 微分性质

信号的微分的拉普拉斯变换与其自身的拉普拉斯变换和它的初始条件有关，如下：

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right\}=\int_{0^-}^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{+\infty}+s\int_{0^-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{A.10}$$

因为假设 $f(t)$有一个拉普拉斯变换，当 $t\to+\infty$时 $\mathrm{e}^{-st}f(t)\to0$。所以

$$\mathscr{L}[\dot{f}]=-f(0^-)+sF(s) \tag{A.11}$$

再次应用式(A.11)得出

$$\mathscr{L}\{\ddot{f}\}=s^2F(s)-sf(0^-)-\dot{f}(0^-) \tag{A.12}$$

多次应用式(A.11)得

$$\mathscr{L}\{f^m(t)\}=s^mF(s)-s^{m-1}f(0^-)-s^{m-2}\dot{f}(0^-)-\cdots-f^{(m-1)}(0^-) \tag{A.13}$$

这里 $f^m(t)$表示 $f(t)$对时间 t 的 m 阶导数。

例 A.5 余弦信号的导数

求 $g(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$的拉普拉斯变换，其中 $f(t)=\cos(\omega t)$。

解答。$\cos(\omega t)$的拉普拉斯变换是

$$F(s)=\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

用式(A.11)，其中 $f(0^-)=1$，我们得到

$$G(s)=\mathscr{L}\{g(t)\}=s\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}-1=-\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}$$

◀

6. **积分性质**

假设希望求一个时间函数积分的拉普拉斯变换：

$$F_1(s)=\mathscr{L}\{\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi\}=\int_0^{+\infty}[\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

对上式应用分步积分，其中

$$u=\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi \quad 和 \quad \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

我们得到

$$F_1(s)=\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}(\int_0^t f(\xi)\mathrm{d}\xi)\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{s}F(s) \qquad (A.14)$$

例 A.6 正弦信号的时间积分

求 $f(t)=\int_0^t \sin(\omega\tau)\mathrm{d}\tau$ 的拉普拉斯变换。

解答。$\sin(\omega\tau)$的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

所以，应用式(A.14)，那么

$$F(s)=\frac{\omega}{s^3+\omega^2 s}$$

◀

7. **卷积性质**

在时域上进行卷积运算对应于频域上就是相乘运算。假设$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=F_1(s)$和$\mathscr{L}\{f_2(t)\}=F_2(s)$。那么

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{+\infty}f_1(t)*f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

我们看到 t 从零到无穷，τ 从零到 t。借助图 A.1，我们可以交换积分顺序，变换积分上下限使得 τ 从零到无穷并且$\infty\geqslant t\geqslant\tau$ 可得

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{+\infty}\int_\tau^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

上式乘以 $\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{e}^{s\tau}$ 得

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}[\int_\tau^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-s(t-\tau)}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\tau$$

如果坐标变换为 $t'\overset{\text{def}}{=\!=}t-\tau$，则

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^{+\infty}f_2(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t'$$

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=F_1(s)F_2(s)$$

这意味着

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)F_2(s)\}=f_1(t)*f_2(t) \qquad (A.15)$$

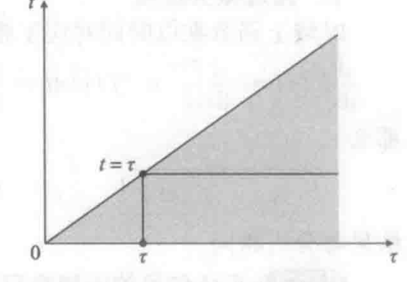


图 A.1 积分逆的阶数图

例 A.7 一阶系统的斜坡响应

求极点为$+a$ 的一阶系统的斜坡响应。

解答。令 $f_1(t)=t$ 为斜坡输入信号，$f_2(t)=\mathrm{e}^{at}$ 为一阶系统的脉冲响应。则由式(A.15)得到

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{1}{s-a}\right\}=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\tau\mathrm{e}^{a(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a^2}(\mathrm{e}^{at}-at-1)$$

在 Matlab 中使用如下命令也可以得到相同的结果，

```
syms s t a
ilaplace(1/(s^3-a*s^2)).
```

◀

8. 频域卷积性质

在时域中进行乘积运算相当于在频域中进行卷积运算：

$$\mathscr{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi)\mathrm{d}\xi$$

分析如下关系式

$$\mathscr{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^{+\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

用式(3.33)代替 $f_1(t)$ 得

$$\mathscr{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)\mathrm{e}^{\xi t}\mathrm{d}\xi\right]f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

变换积分顺序

$$\mathscr{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c+j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)\int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-(s-\xi)t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi$$

用式(A.9)，我们得到

$$\mathscr{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c-j\infty}^{\sigma_c+j\infty} F_1(\xi)F_2(s-\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi j}F_1(s) * F_2(s) \tag{A.16}$$

9. 巴塞伐尔定理

巴塞伐尔的著名定理，用来计算一个信号的能量或两个信号之间的能量的关系。它告诉我们在时域或频域中都可以计算能量的大小。如果

$$\int_0^{+\infty} |y(t)|^2\mathrm{d}t < 1 \quad \text{and} \quad \int_0^{+\infty} |u(t)|^2\mathrm{d}t < 1 \tag{A.17}$$

(即 $y(t)$ 和 $u(t)$ 是平方可积的)，那么

$$\int_0^{+\infty} y(t)u(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(-j\omega)U(j\omega)\mathrm{d}\omega \tag{A.18}$$

巴塞伐尔定理的结果仅仅包含时间函数和一个积分改变量的变换：

$$\int_0^{+\infty} y(t)u(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} y(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t \tag{A.19}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)\left[\int_0^{+\infty} y(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega \tag{A.20}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega)Y(-j\omega)\mathrm{d}\omega \tag{A.21}$$

10. 频域微分性质

时域上函数乘以时间对应于频域上函数的微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}[tf(t)]\mathrm{d}t = -\mathscr{L}\{tf(t)\}$$

那么

$$\mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s) \tag{A.22}$$

结果与分析相同。

例 A.8 正弦信号的时域乘积

求 $f(t)=t\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换。

解答。$\sin(\omega t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega_2}$$

所以，用式(A.22)，得到

$$F(s) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

在 Matlab 中使用如下命令也可以得到相同的结果，

```
syms s t w
laplace(t*sin(w*t)).
```

◀

A.1.2 用部分分式展开法求拉普拉斯反变换

就像我们在第3章看到的，如果 $F(s)$ 是有理分式，那么求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换最简单的方法就是利用部分分式展开法将 $F(s)$ 展开成在拉普拉斯变换表中能找到的简单项的和的形式。我们已经在3.1.5小节中讨论了单根的情况。在本节，将分析如何使用部分分式展开法来处理复根和重根的情况。

复极点 分母中二次因式有复数根时，分子中二次因式就成为一阶形式。如例A.9所示。每当函数存在一对共轭复极点，例如，

$$F(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_1^*}$$

时，我们可以证明

$$C_2=C_1^*$$

(见问题3.1)并且有

$$f(t)=C_1\mathrm{e}^{p_1t}+C_1^*\mathrm{e}^{p_1^*t}=2\mathrm{Re}(C_1\mathrm{e}^{p_1t})$$

假设 $p_1=\alpha+\mathrm{j}\beta$，我们可以重写 $f(t)$ 为简单的形式：

$$f(t)=2\mathrm{Re}\{C_1\mathrm{e}^{p_1t}\}=2\mathrm{Re}\{|C_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg(C_1)}\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}\}=2|C_1|\mathrm{e}^{\alpha t}\cos[\beta t+\arg(C_1)] \tag{A.23}$$

例A.9 部分分式展开法：复根各不相同

求函数 $f(t)$，其拉普拉斯变换为

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

解答。将 $F(s)$ 写为

$$F(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2s+C_3}{s^2+s+1}$$

用消去法我们求得

$$C_1=sF(s)|_{s=0}=1$$

令 $C_1=1$ 并且将分子通过部分分式展开得

$$(s^2+s+1)+(C_2s+C_3)s=1$$

求解 C_2 和 C_3 后，我们得到 $C_2=-1$ 和 $C_3=-1$ 为了使它更适合使用拉普拉斯变换表，我们重写上式如下：

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

从表中我们得到

$$f(t)=\left(1-\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t/2}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)\right)1(t)=\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\pi}{6}\right)\right)1(t)$$

或者，可将 $F(s)$ 写成

$$F(s)=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s-p_1}+\frac{C_2^*}{s-p_1^*} \tag{A.24}$$

其中：$p_1=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$；$C_1=1$。此时

$$C_2=(s-p_1)F(s)|_{s=p_1}=-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$C_3^* = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

和

$$f(t) = (1 + 2|C_2|\mathrm{e}^{\alpha t}\cos[\beta t + \arg(C_2)]1(t) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\pi}{6}\right]\right)1(t)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-t/2}\cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{5\pi}{6}\right]\right)1(t)$$

以下部分分式展开式可用 Matlab 计算：

```
num = 1;                          % form numerator
den = conv([1 0],[1 1 1]);        % form denominator
[r,p,k] = residue(num,den)        % compute residues
```

经过计算得

$$\boldsymbol{r} = [-0.5000 + 0.2887\mathrm{j}\ \ -0.5000 - 0.2887\mathrm{j}\ \ 1.0000]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{p} = [-0.5000 + 0.8660\mathrm{j}\ \ -0.5000 - 0.8660\mathrm{j}\ \ 0]^{\mathrm{T}}; k = [\,]$$

此结果与手算结果一致。应该注意的是，若使用拉普拉斯变换表，则第一种方法更好，第二种方法更适合检测 Matlab 结果。

在 Matlab 中使用如下命令也可以得到相同的结果：

```
syms s t
ilaplace(1/(s*(s^2+s+1))).
```

◀

重极点　对于 $F(s)$ 有重极点的情况，部分分式展开的计算过程需要调整。如果 p_1 是三重极点，可将部分分式写成：

$$F(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{(s-p_1)^2} + \frac{C_3}{(s-p_1)^3} + \frac{C_4}{s-p_4} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

由前面讨论的方法，我们可以确定常数 C_4 到 C_n。如果我们在上式两边同时乘以 $(s-p_1)^3$，得到

$$(s-p_1)^3F(s) = C_1(s-p_1)^2 + C_2(s-p_1) + C_3 + \cdots + \frac{C_n(s-p_1)^3}{s-p_n} \tag{A.25}$$

如果令 $s=p_1$，除了 C_3，式(A.25)右边的所有因子都将是零，所以，有

$$C_3 = (s-p_1)^3F(s)|_{s=p_1}$$

为了确定其他因子，将式(A.25)两边分别对拉普拉斯变量 s 求微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)^3F(s)] = 2C_1(s-p_1) + C_2 + \cdots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{C_n(s-p_1)^3}{s-p_n}\right] \tag{A.26}$$

再令 $s=p_1$，我们有

$$C_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)^3F(s)]_{s=p_1}$$

类似的，如果对式(A.26)再次微分，且令 $s=p_1$，得

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[(s-p_1)^3F(s)]_{s=p_1}$$

总之，可以求出 k 重极点因子的系数 C_i

$$C_{k-i} = \frac{1}{i!}\left[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}s^i}[(s-p_1)^kF(s)]\right]_{s=p_1}, i = 0,\cdots,k-1$$

例 A.10　部分分式展开法：重实根

求拉普拉斯逆变换为

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

时间函数 $f(t)$。

解答。部分分式展开形式为

$$F(s)=\frac{C_1}{s+1}+\frac{C_2}{s+2}+\frac{C_3}{(s+2)^2}$$

那么

$$C_1=(s+1)F(s)|_{s=-1}=\frac{s+3}{(s+2)^2}|_{s=-1}=2$$

$$C_2=\frac{d}{ds}[(s+2)^2F(s)]|_{s=-2}=-2$$

$$C_3=(s+2)^2F(s)|_{s=-2}=\frac{s+3}{s+1}|_{s=-2}=-1$$

函数 $f(t)$是

$$f(t)=(2e^{-t}-2e^{-2t}-te^{-2t})1(t)$$

用 Matlab 中的 residue 函数计算部分分式展开为

```
num[13];                    %formnumerator
den = conv([11],[144]),     %formdenominator
[r,p,k] = residue(num,den)%computeresidues
```

得出结果

$$\boldsymbol{r}=[-2\ -1\ \ 2]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{p}=[-2\ -2\ -1]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{k}=[\,]$$

与手算结果相同。

对于拉普拉斯反变换，在 Matlab 中使用如下命令也可以得到相同的结果：

```
syms s t
ilaplace((s+3)/((s+1)*(s+2)^2)).
```

A.1.3 初值定理

在第3章中我们讨论过终值定理。第二个有用的关于拉普拉斯变换的定理是初值定理，即通过拉普拉斯变换，总可以确定时间函数 $f(t)$的初始值。这一定理表述如下。

初值定理

对任意的拉普拉斯变换对

$$\lim_{s\to+\infty}sF(s)=f(0^+) \tag{A.27}$$

我们可证明如下。利用式(A.11)，我们得到

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\}=sF(s)-f(0^-)=\int_{0^-}^{+\infty}e^{-st}\frac{df}{dt}dt \tag{A.28}$$

当 $s\to+\infty$时，积分重写为

$$\int_{0^-}^{+\infty}e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt=\int_{0^+}^{+\infty}e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt+\int_{0^-}^{0^+}e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt$$

当 $s\to+\infty$时，求式(A.28)的极限得

$$\lim_{s\to+\infty}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to+\infty}\left[\int_{0^-}^{0^+}e^{0}\frac{df(t)}{dt}dt+\int_{0^+}^{+\infty}e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt\right]$$

因为当 $s\to+\infty$时，有 $e^{-st}\to0$，所以上式右边第二项是趋于零的。所以

$$\lim_{s\to+\infty}[sF(s)-f(0^-)]=\lim_{s\to+\infty}[f(0^+)-f(0^-)]=f(0^+)-f(0^-)$$

或

$$\lim_{s\to+\infty}sF(s)=f(0^+)$$

与终值定理相比，初值定理可用于任意函数 $F(s)$。

例 A.11 初值定理

求例3.13中信号的初值。

解答。由初值定理得

$$y(0^+)=\lim_{s\to+\infty}sY(s)=\lim_{s\to+\infty}s\frac{3}{s(s-2)}=0$$

由此可检验例 3.13 中 $y(t)$ 是否正确。◀

A.1.4 终值定理

终值定理

如果 $sY(s)$ 的所有极点都位于 s 平面的左半部分，那么

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{s\to+\infty}sY(s) \tag{A.29}$$

终值定理的证明

下面我们可以证明这个结果。对式(3.41)求导得

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]=sY(s)-y(0^-)=\int_{0^-}^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

假设我们感兴趣的是 $s\to0$ 时。那么

$$\lim_{s\to0}[sY(s)-y(0)]=\lim_{s\to0}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)=\lim_{t\to+\infty}[y(t)-y(0)]$$

并且我们有

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=\lim_{s\to0}sY(s)$$

另一种方法是，对 $Y(s)$[式(3.51)]进行部分分式展开，得

$$Y(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-p_n}$$

让 $p_1=0$，以及所有其他的 p_i 位于左半平面内，以使 C_1 是 $y(t)$ 的稳态值。用式(3.53)，我们得

$$C_1=\lim_{t\to+\infty}y(t)=sY(s)|_{s=0}$$

与之前结果一致。

对拉普拉斯变换更深入更广泛的分析，请参考 Churchill(1972)和 Campbell 和 Foster(1948)；双边拉普拉斯变换详见 Van der Pol 和 Bremmer(1955)。

附录B

复习题参考答案

第2章

2.1 为了列写组合系统的运动方程，依次标出每一个物体受到的所有作用力和作用于物体的转矩。这种独立物体的受力图集称为“受力图”。

2.2 描述平移运动的形式：$F=ma$。

描述旋转运动的形式：$M=I\alpha$。

2.3 当执行机构和传感器作用于同一个刚体上时，该控制为“合体控制”；当执行机构和传感器作用于由弹簧连接的不同的物体上时，该控制为“分体控制”。

2.4 在任意时刻，流入流出节点或电路的支路电流的代数和恒等于零。

2.5 在任何一个闭合电路中，各段电阻上的电压降的代数和恒等于零。

2.6 在1947年的一篇论文中，Ragazzini、Randall和Russel将高增益、宽频带的用于反馈控制来实现微积分运算的放大器命名为“运算放大器”。

2.7 当加入零输入电流时，放大器不必加载输入电路，因此，该设备的传递函数与放大器的特性无关，在这种情况下，简化了对电路的分析。

2.8 当电枢电流通过时，电枢电阻会引起功率损耗，从而降低了电动机的效率。

2.9 电机旋转时在电枢上会产生正比于旋转角速度的电压(称为反电动势)。电势常数K_e是该反电动势与旋转角速度的比值，所以$e=K_e\dot{\theta}$，单位为$v-s/r$。

2.10 当电动机电枢中有电流i_a通过时，会产生正比于该电流的转矩τ转矩常数K_t就是这一比值，即$\tau=K_t i_a$，单位为N·m/oz。

2.11 对线性模型进行分析和设计比分析非线性模型简单得多。因此，如前所述李雅普诺夫，如果近似的线性模型稳定，那么非线性模型至少能实现局部稳定。

△2.12 (a) 热流量正比于穿过物质前后的温度差，即

$$q=\frac{1}{R}(T_1-T_2)$$

(b) 热能存储量的微分方程为：

$$\dot{T}=\frac{1}{C}q$$

其中，C为该物质的热容。

△2.13

$$\text{连续性：}\quad \dot{m}=w_{\text{in}}-w_{\text{out}}$$
$$\text{力平衡性：}\quad f=pA$$
$$\text{流阻：}\quad w=\frac{1}{R}(p_1-p_2)^{1/\alpha}$$

第3章

3.1 一个线性时不变系统输出的拉普拉斯变换$Y(s)$与其输入信号的拉普拉斯变换$U(s)$成比例，这个比例函数就是传递函数$F(s)$，结果是$Y(s)=F(s)U(s)$。假设所有的初始条件为零。

3.2 系统必须都是线性的(满足叠加原理)并且是时不变的(参数不随时间变化而变化)。

3.3

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\}=\mathrm{e}^{-s\lambda}F(s)$$

3.4 如果$sF(s)$的所有极点都位于左半平面，那么$f(t)$的终值可通过$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$得出。

3.5 一个控制系统的标准测试是阶跃响应，而FVT用来确定这一输入的稳态误差。

3.6 通过$t_r\approx 1.8/\omega_n$得出，M_p通过阻尼比设定(见图3.24的曲线)，$t_s\approx 4.6/\sigma$。

3.7 这样的零点会产生额外的超调，零点越靠近虚轴超调越大。如果这个零点比复极点的实部大6倍以上，它的影响就可以忽略。

3.8 这样的零点会在初值处引起负脉冲信号响应。

3.9 这样的极点减慢响应速度并且使上升时间变长。极点离虚轴越近，这个影响越明显。如果极点的实部比复极点的实部大 6 倍以上，这个影响就可以忽略。

3.10 几乎任何一个有实用意义的动力系统都必须稳定地表现其函数性能。对一个正常状态下已经稳定的系统加入反馈会引入不稳定因素，因此，控制系统设计者一定要确信他们的设计是足够稳定的。

3.11 用这种方法，我们可以求出(用符号表示)使系统稳定的环路增益参数的变化范围。

3.12 在很多情况下，运动方程要么很复杂要么完全不知道。造纸机中的化学变化经常是这样的。在这些情况下，如果想设计好的控制系统，就需要根据暂态数据、稳态频率响应数据去估计传递函数。

第4章

4.1 (a) 反馈可以减小系统在干扰信号下的稳态误差。

(b) 反馈可以减小输入信号下的稳态误差。

(c) 反馈可以降低传递函数对参数变化的敏感度。

(d) 反馈可以使系统的不稳定过程稳定。

4.2 (a) 反馈需要引入传感器，而传感器价格比较贵，并且还会引入额外的噪声。

(b) 反馈控制系统在设计和计算上要比开环系统复杂。

4.3 系统为 1 型系统，K_v 是误差输入速率比或 $K_v=40/0.5=80℃/s$。

4.4 K_p 无单位，K_v 的单位是s^{-1}，K_a 的单位是s^{-2}。

4.5 对于只有一个关于 k 的多项式的参考输入，系统的类型可认为是当衰减为常量时 k 的最大值。

4.6 对于只有一个关于 k 的多项式的干扰输入，系统的类型可认为是当误差为常数时 k 的最大值。

4.7 因为不同的输入位置，误差会有所不同，所以类型也会有差异。

4.8 积分控制可以将常输入信号的误差减为零，还可以消除控制过程中噪声偏差的影响。但是不能消除传感器带来的偏差影响。

4.9 微分控制的典型作用是提高系统的稳定性，改善系统的动态性能。

4.10 因为参考输入可能有突变，而此时若将参考输入包含在微分作用中，就可能产生不必要的大控制量。

4.11 PID 控制器往往被封装成一个前端开关按钮为增益常量的元件。这些设备被广泛地安装于工厂并由了解控制理论的技术人员操作。整定准则允许技术人员测量过程实验参数，并使用这些数据设置参数以得到更好的响应。

4.12 (a) 数字控制器的控制规律容易改变。

(b) 数字控制器在进行逻辑运算和其他非线性运算时比模拟控制器简单。

(c) 在各控制的实际控制设计完成之前，便可确定数字控制器的硬件。

4.13 (a) 数字控制器带宽可能受采样频率限制。

(b) 由于数字控制过程是量子化的，从而会引入噪声。

4.14 $s=\dfrac{z-1}{T_s}$。

第5章

5.1 (a) 根轨迹是 s 平面上方程 $a(s)+Kb(s)=0$ 解的轨迹。

(b) 根轨迹是 s 平面上 $G(s)=b(s)/a(s)$ 的角度是 $180°$ 点的轨迹。

5.2 负根轨迹是指方程 $a(s)-Kb(b)=0$ 解的轨迹或 $G(s)=b(s)/a(s)$ 角度是 $0°$ 点的轨迹。

5.3 实轴上的根轨迹位于零、极点之和为奇数的左侧区域。

5.4 根轨迹以 $\pm 90°$ 分离。

5.5 根轨迹以 $\pm 60°$ 和 $180°$ 分离。

5.6 超前补偿通常导致根轨迹弯向左半平面，主导根向高阻尼比区域移动。

5.7 滞后补偿通常用在离原点很近的地方，对主导闭环极点附近的根轨迹影响很小。

5.8 滞后补偿通常提高了点 $s=0$ 处的增益，减小了误差。

5.9 如果根轨迹朝向右半平面，则反馈将使系统更不稳定。相反，如果轨迹朝向左半平面，反馈将使系统更加稳定。

5.10 系统随着增益的降低而变得不稳定，这样的系统称为条件稳定系统。也就是说，系统的稳定要求补偿器的增益不能小于某个值。

5.11 三个极点在原点处，圆点处极点的出射角为180°，±60°，或者，如果右半平面的实轴上有极点，它们的出射角可能是0°，±120°，也就是说至少有一个极点的轨迹会进入右半平面。足够低的增益下，则至少有一个根位于右半平面。因此，系统一定是条件稳定的。

第6章

6.1 在lg-lg坐标中，有理传递函数的伯德图可以在线性渐近线的指导下绘制，这使得绘图简便且绘制出的图可直接观察。

6.2 如果功率比为P_1/P_2，那么以分贝为单位的度量为$10\lg(P_1/P_2)$。由于功率与电压的平方成正比，且传递函数给出了一个电压比，则以分贝为单位的传递函数$G(j\omega)$的增益为$G_{dB}=20|G(j\omega)|$。

6.3 $14=20\lg M$，因此$M=5.01$。

6.4 增益穿越频率ω_c是幅值增益为1(或0dB)时的频率值。

6.5 相位穿越频率ω_{cp}是相位穿越−180°时的频率值。

6.6 相位裕度PM是对于奈奎斯特图在相位上距离不稳定点的远近程度的度量。在典型情况中，如果系统的相位在增益穿越处为ϕ，那么相位裕度为$180°+\phi$。例如，若$\phi=-150°$，则相位裕度为30°。

6.7 增益裕度GM是仅根据增益的改变来度量系统距离不稳定的远近程度的量。若在相位穿越处，即系统相位为180°处，增益为$|G(j\omega_{cp})|$，那么增益裕度为$GM*|G(j\omega_{cp})|=1.0$或$PM=1/|G(j\omega_{cp})|$。

6.8 相位裕度与近似的等价闭环阻尼比$\zeta_{eq}=PM/100$相关。正如我们在第3章中所述，阶跃响应的超调与阻尼比单调相关。

6.9 上升时间可由闭环自然频率度量，而闭环自然频率可以由增益穿越轮流地充分近似。因此上升时间的最好的表征量是ω_c。

6.10 超前补偿通常用于增大期望增益穿越频率处的相位裕度。

6.11 滞后补偿通常用于增大低频增益，进而减小稳态误差的多项式值或低频增益正弦曲线输入。滞后补偿也可用于降低穿越频率ω_c，得到良好的相位。

6.12 K_v是由低频渐近线确定的，其在1型系统中的斜率为−1，并且是由K_v/ω表示的。渐近线在1.0(或0dB)处的频率为常数，或者在频率处渐近线的值为常数。

6.13 在奈奎斯特图中，包围零点的圈数和包围$1+KD_cG$右半平面的极点圈数是不同的。想知道该函数零点的数量，我们必须先知道图中开环不稳定极点的数量。

6.14 如果只绘制D_cG，稳定性与包围$-1/K$的圈数有关。设计者因此可以很容易地看到实数K的整个范围，不需要再绘制任何图就可确定设计中增益的最优值。

6.15 当增益减小时，条件稳定系统会变得不稳定。如果低频相位降低到−180°以下，那么该系统基本上可以确定是不稳定的。从奈奎斯特图可以看出，从根轨迹曲线也可以很容易的得出该结果；增益值较低时，轨迹曲线在右半平面是分段的。

6.16 函数的幅值由比例$|R|/e_b=5/0.01=500$可知。当频率上升到450rad/s时，性能函数的值为500。伯德幅值图应位于控制系统曲线的上方。

第7章

下面这些问题都是基于一个以状态变量形式描述的系统，系统矩阵为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，D，输入为u，输出为y，状态为$\boldsymbol{x}$。

7.1 它提供了一个标准的方法来描述任意动态系统的微分方程，因此可以更方便地进行计算机辅助分析。它也更方便于分析以标准矩阵描述的线性系统。

7.2 $G(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+D$

7.3 (a) $p=\mathrm{eig}(\boldsymbol{A})$；

(b) $p=\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]$的根$=a(s)=0$。

7.4 $z=\det\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & D \end{bmatrix}$

的根$b(s)=0$。

7.5 (a) 如果矩阵对($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$)是可控的，即如果矩阵

$$\mathcal{C}=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$$

是满秩的。

(b) 如果系统可以写成能控标准形。

7.6 (a) 如果矩阵对($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$)是可观测的，即如果矩阵

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

是满秩的。

(b) 如果系统可以写成能观标准形。

7.7 (a) $p_c=\mathrm{eig}(A-B*K)$。

(b) $p_c=\det(sI-A+BK)$的根$=\alpha_c(s)=0$。

7.8 如果系统是可控的。

7.9 使用 LQR，闭环系统对参数改变将有更强的鲁棒性，并且设计者可以获得一些比闭环系统控制效果更好的控制。

7.10 当状态不可得到时(通常由于这样做花费很大或用传感器得到每一个状态变量是不切实际的)，那么一个仅用输出 y 的估计器可以给出用于代替实际状态的估计。

7.11 (a) $p_e=\mathrm{eig}(A-L*C)$。

(b) $p_e=\det(sI-A+LC)$的根 $\alpha_e(s)=0$。

7.12 如果系统是可观测的。

7.13 $T(s)=K_s\dfrac{b(s)}{\alpha_c(s)}$

7.14 $T(s)=K_s\dfrac{\gamma(s)b(s)}{\alpha_e(s)\alpha_c(s)}$

通常 $\gamma(s)=\alpha_e(s)$。

7.15 (a) 通过增广过程状态来包括状态变量的积分器。

(b) 通过内模方法。

(c) 通过使用扩展估计器方法。

第8章

8.1 奈奎斯特速率为采样速率的一半，即$\omega_s/2$。大于奈奎斯特速率时，采样信号就会失真。

8.2 可基于模拟信号设计系统控制器，而最终的控制器则可通过数字化等效近似得到。

8.3 使用离散等效设计法。该方法对于高采样速率下能够得到令人满意的效果。但在使用离散等效设计后需通过仿真检查采样效果或进行准确的离散线性分析。仿真系统最好能包含所有已知的采样影响和系统延迟。

8.4 绝对最小采样速率为 2rad/s(或 0.32Hz，$T=3$s)，从 2rad/s 到 10rad/s 或 20rad/s 之间，控制信号将会有阶跃性的变化，设计时需要很仔细。在 20rad/s 到 30rad/s 之间，控制信号幅值变化程度明显减小，此时采用离散等效法设计可以工作得很好。当大于 30rad/s 时，控制信号几乎不变化，此时采用离散等效法是非常可靠的。

8.5 (a) 数字控制器的物理输出可以在最终设计完成前给出，这可使硬件执行器件在很短的时间里设计完成，不需要像模拟控制器那样特殊化和结构化。

(b) 数字控制器可以灵活地应对设计中的各种改变，因为它可以轻松地通过对软件的重新编程来实现这些变化，而不需要在电路板上重新接线或加入元件。

(c) 在整体设计中，数字控制器可以很容易地包含非线性环节和逻辑判定环节，例如，自适应控制系统或增益调度系统。

(d) 许多模型都是基于同一个基本控制器，因此可以通过简单地对同一硬件加各种不同的可编程只读存储器(PROM)来实现。例如，一个自动化生产线可能只设计了一个针对整条生产线的发动机控制硬件，但是它对每个发动机或仪器都有不同的可编程只读存储器(PROM)。

(e) 数字控制器对温度的变化不敏感，而模拟存储器对温度变化相对敏感。

8.6 (a) A/D 转换器与 D/A 转换器的采样频率和处理器的计算速度的限定使得数字控制器的带宽受到限制，大约只有采样频率的 1/10。

(b) 如果使用低频控制器，精度和位数的限制都会给闭环控制引入额外的噪声干扰与偏差。

(c) 费用。对于一个简单的控制器，数字执行器会比模拟控执行器昂贵很多。

8.7 首先使用离散等效法，但在进行模拟设计时，需要包含对状态模型延迟效应的近似。其次，将状态变量模型离散化并与离散控制器组合，通过离散分析对结果进行检验。如果其性能与期望值相比有

所下降，可用离散化设计方法改进离散控制器。最后在考虑所有采样影响和系统延迟的情况下进行仿真模拟。

第9章

9.1 分析和设计线性模型远比非线性模型更简单。此外，已经证明(通过李雅普诺夫函数)，如果线性近似模型是稳定的，则非线性模型至少在某些区域是稳定的。

9.2
$$\dot{T}=T^4+T+u$$
$$\delta\dot{T}=(4T_0^3+1)\delta T+\delta u$$

其中：T_0 是额定工作温度(参见第10章研究的RTP问题)。

9.3 我们在灯的前面加上一个逆非线性——也就是 $P=V^{0.625}$——以便线性化这个级联系统(参见第10章研究的RTP问题)。

9.4 如果系统执行器的输出信号饱和，则由初始扰动引起的误差回归到0可能需要花费一段很长的时间，而在这段时间的积分器输出可能会比在系统是线性的情况下增长更多或更早饱和。设计特殊的抗饱和电路就是为了防止饱和。

9.5 当一个控制信号包括积分作用，并达到饱和时，若无抗饱和回路，大输入将会导致很大的超调和很慢的恢复，除非抗饱和电路被包括在内。

9.6 如果执行器的输出为 u_{out}，输入为 u_{in}，那么控制信号为
$$u_{out}=20\mathrm{sat}\left(\frac{7u_{in}}{20}\right)$$

9.7 描述函数方法的目标是为非线性元件找到类似于“传递函数”的函数。人们可以把描述函数看作对非线性频率响应的延伸。

9.8 基本的假设是，系统运行与一个低通滤波器相似。另一假设是，该非线性项是时不变的，并且在该系统中仅有一个非线性元件。

9.9 在某些非线性系统中，随着时间的增大，误差的累积而使系统响应接近固定幅度的周期解，就形成了极限环。

9.10 我们可以将正弦信号引入到系统中，并在该系统的输出点放置一个具有快速截止功能的低通滤波器来测量输出的基波分量。然后描述函数计算为非线性系统的输出的基波分量的幅值与正弦输入信号的幅度之比。

9.11 Bang-bang 控制

9.12 间接法或第一法是在运动方程的近似系统基础上，通过考虑线性近似系统的稳定性，得出该非线性系统的稳定性的结论。而直接法或第二法，直接考虑非线性方程。

第10章

10.1 如果将执行器和传感器放在一起，则在轻微阻尼极点附近自然会出现零极点，从而可以保证根轨迹在 s 左半平面内。

10.2 在许多情况下，执行器和传感器的特性和位置对控制器设计的复杂性和难易程度都有很重要的影响。如果在设计过程中考虑了控制的要求，那么系统(尤其是闭环控制系统)最终会有更高的效率和更低的成本。

10.3 (a) 地球同步通信卫星的姿态控制。

执行器：冷气式喷气发动机推进器、惯性轮、磁转矩仪(线圈、磁棒)和离子发生器。

传感器：接地传感器(横摇，纵摇)、数字积分速率(DIRA)陀螺仪(测速)、星体跟踪器。

(b) 波音747飞机的纵摇控制。

执行器：升降舵。

传感器：测量纵摇速率或纵摇角的陀螺仪或环形激光陀螺仪。

(c) CD播放机的磁道跟踪控制。

执行器：带动机械手(双阶锤)的直流电动机、用于磁道调焦的两个线圈。

传感器：一组光电二极管。

(d) 点火式汽车发动机的空燃比控制。

执行器：燃油注入

传感器：氧化锆传感器

(e) 给汽车喷漆的机械手臂的位置控制。

执行器：水压调节器或电子发动机。

传感器：测量手臂转动的译码器、压力传感器、力传感器。

(f) 轮船的导航控制。

执行器：方向舵。

传感器：回转罗盘。

(g) 直升机的姿态控制。

执行器：使螺旋桨旋转的移动旋转斜盘(也可通过直接连接或伺服系统)。

传感器：与飞机相同(空速管、加速器、速度陀螺仪)。

附录 C

Matlab 命令

Matlab 函数(.m 文件)或变量	描述
\	反斜线或矩阵左除
A(:)	矢量矩阵 A
allmargin	所有的稳定裕度和交叉频率
abs	绝对值
acker	用于极点配置的阿克曼公式
angle	相位角
ans	最近的答案
atan	反正切
atan2	四象限反正切
axis	控制轴坐标
bilin	双线性变换
bode	伯德频率响应
bodemag	伯德幅值频率响应
break	终止执行 WHILE 或 FOR 循环
c2d	连续到离散的转换
canon	状态空间正则形式
clear	清空变量和函数
clf	清除图像
close	关闭图像
close all	关闭所有图像
colon(:)	创建索引向量或重塑矩阵
conj	复共轭
conv	多项式乘法
cos	余弦
cross	向量的叉乘
ctrb	可控性矩阵
ctrbf	阶梯可约形，可控性
damp	阻尼和固有频率
dcgain	计算直流增益和线性时不变系统
deconv	多项式除法
delete	删除文件或图形对象
det	矩阵的行列式
diag	矩阵对元素提取、创建对角阵
diary	Matlab 指令窗文本内容记录
disp	显示数组
dlyap	离散时间的李雅普诺夫方程的求解

（续）

Matlab 函数(.m 文件)或变量	描述
dot	向量点积
dstep	离散系统的阶跃响应
d2c	离散到连续时间的模型
eig	特征值和特征向量
eigs	求解指定的特征值和特征向量
eps	精度参数
exp	指数函数
expm	常用矩阵的指数函数
eye	单位矩阵
ezplot	画二维曲线的简捷指令
feedback	两个系统的反馈连接
figure	创建图形窗
figure(i)	创建第 i 个图形窗
find	求非零元素下标
format	设置输出格式
freqresp	线性时不变系统的频率响应
function	增加新函数
gensig	生成信号
gram	可控性/可观性格拉姆矩阵
grid	网格线
gtext	通过鼠标放置注释文字
help	在命令窗口中显示帮助文本
hold	保持当前图
i	单位参数
ilaplace	逆拉普拉斯变换
imag	复数虚部
impulse	线性时不变系统的脉冲响应
impulseplot	绘制脉冲响应且返回句柄
inf	无穷大
input	提示用户输入
initial	状态空间系统的初始条件响应
inv	求逆矩阵
j	单位虚数
kron	克罗内克积
laplace	拉普拉斯变换
length	求矢量长度
linmod	线性化
linmod2	线性化(高级的)
line	创建线对象
linspace	线性等分向量
load	从 MAT 文件读取变量
log	自然对数

(续)

Matlab 函数(.m 文件)或变量	描述
log10	底为 10 的对数
loglog	双对数刻度图形
logspace	对数分度向量
lqe	线性二次估计器设计
lqr	线性二次调节器设计
lqry	输出加权的调节器设计
lsim	任意输入下的连续时间仿真
ltiview	响应分析的图形用户界面
ltru	回路传递恢复
ltry	回路传递恢复
lyap	连续李雅普诺夫方程求解
margin	增益和相位裕度
max	求向量中最大元素
mean	求向量元素的平均值
median	求中位数
min	求向量中最小元素
minreal	系统的最小实现
nan	非数(预定义)变量
ngrid	画尼科尔斯图的网格线
nichols	尼科尔斯图
norm	矩阵或向量范数
nyquist	奈奎斯特图
obsv	可观性矩阵
obsvf	可观阶梯形
ones	全 1 数组
ord2	产生二阶系统的 A，B，C，D
ode23	非 stiff 微分方程解算器
ode45	非 stiff 微分方程解算器
pade	时延的 pade 近似
parallel	并行系统连接
pause	暂停
place	极点配置
pi	圆周率
pid	创建一个并联形式的 PID 控制器
pidstd	创建一个标准形式的 PID 控制器
plot	绘图函数
pole	线性时不变系统的极点
poly	由多项式的根得到该多项式
polyfit	数据的多项式拟合
polyval	计算多项式的值
prescale	状态空间模型的最佳度量
print	输出图形或模型

（续）

Matlab 函数(.m 文件)或变量	描述
printsys	以习惯方式显示系统
pzmap	零极点图
rand	均匀分布随机数
randn	正态分布随机数
rank	矩阵的秩
real	复数的实部
reshape	改变数组大小
residue	部分分式展开形式下的留数
return	返回调用的函数
rlocfind	求根轨迹增益
rlocus	根轨迹
rlocusplot	画根轨迹并返回句柄
rltool	交互式根轨迹工具
roots	求多项式的根
save	保存工作区变量
semilogx	X 轴对数刻度坐标图
semilogy	Y 轴对数刻度坐标图
series	两个线性时不变系统的串联
sgrid	s 平面的网格线
shg	显示图形窗口
sign	符号函数
sin	正弦
sim	运行 Simulink 模型
sisotool	单输入单输出设计工具
size	数组的大小
sort	按升序或降序排列
sprintf	把格式数据写成串
sqrt	平方根
std	标准差
squeeze	删除单一维度
ss2tf	状态空间形式转化为传递函数形式
ss2zp	状态空间形式转化为零极点形式
ss	转化为状态空间形式
ssdata	创建一个状态空间模型
std	标准差
step	阶跃响应
subplot	在同一个窗口多图
sum	元素的和
svd	奇异值分解
syms	创建多个符号对象
tan	正切
text	文本注释

（续）

Matlab函数(.m文件)或变量	描述
tf2ss	变传递函数表示为状态空间表示
tf2zp	变传递函数表示为零极点表示
tf	创建或者转换为传递函数
tfdata	传递函数数据
title	图标题
tzero	对于单输入单输出系统的传递零点和增益
var	方差
what	列出目录中Matlab具体文件
who	列出当前变量
why	回答任何你可能有的问题
whos	列出当前变量，长格式
xlabel	x轴标记
xlim	x轴极限
xlsread	从一个Excel电子表格中获得数据
ylabel	y轴标记
ylim	y轴极限
zero	传输零点
zeros	零矩阵
zgrid	z平面网格线
zlabel	z轴标记
zlim	z轴极限
zpk	零极点
zp2ss	变零极点表示为状态空间表示
zp2tf	变零极点表示为传递函数表示

索　引

注：书中页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致。

A

B

C

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

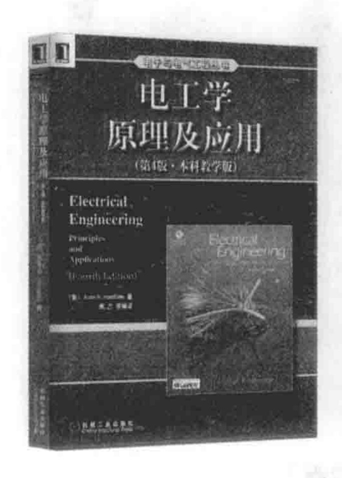
V

W

Y

Z

推荐阅读







电工学原理及应用（第4版）

作者：Allan R. Hambley ISBN：978-7-111-29336-1 中文版出版时间：2010年 定价：59.00元

本书注重基本概念，本书以易读的写作风格、精心的问题设计、简明的练习和例题而见长。与前3版相比，第4版的内容改动较大，满足了目前相关课程的高校教师和学生的需要。我国也有许多所大学采用本书作为本科生“电工学”课程的教材和主要教学参考书，收到了良好的效果。本书基于该书第4版进行改编，保留其中的基本内容，压缩或删除了一些高级内容。第4版还为教师和学生提供了功能强大的网络信息资源套装，详情请登录培生教育的工程实验室网站http://www.myengineeringlab.com。本书适用于化工、生物、土木工程等非电专业学生的“电工学”课程，也可以作为电气工程、计算机、自动化等专业学生的专业导论课程的参考教材。

电机、拖动及电力系统（原书第6版）

作者：Sergio Franco ISBN：978-7-111-47471-5 出版时间：2015年1月 定价：99.00元

这本畅销书理论联系实际，从多学科的视角，深入剖析现代电子系统的概念、原理等内容。

本书新增内容：双馈感应电机的原理与特性；PWM的大量相关内容；感应电动机的DTC方法；风能、风力发电方法；电子传输的HVDC Light方法。每章末尾的习题分为初级、中级、高级和实际应用四类。习题答案附在本书最后。

电力传动与自动控制系统

作者：周元钧 等 ISBN：978-7-111-47608-5 出版时间：2014年 定价：49.00元

本书结合电力传动系统的实际应用及发展，侧重于电力传动的基本概念、基本理论及其控制原理的阐述，采用工程观点和工程设计方法进行分析，并加入了电力传动系统在航空航天领域中的应用内容，以反映航空航天领域电动机调速系统和数字控制等新技术。全书取材注重基础性和实用性，有助于培养电气工程及其自动化专业学生的综合设计能力。

本书系统阐述了反馈控制的基本理论、设计方法及在工程技术领域中的一些实际问题。本书主要利用根轨迹、频率响应和状态变量方程这三种方法将控制系统的分析与设计结合起来，并结合大量实例和Matlab代码进行控制系统的分析与设计，来阐述相关内容。第7版更加注重反馈控制在整个控制理论体系中的地位，因而对部分章节进行了调整，对书中的实际例子进行了更新，而且对各章的习题进行了修正和补充。

本书特色

- 本书融合了作者多年的教学经验，结合工程实际应用，循序渐进地对基本理论和设计方法进行介绍，尤其对控制系统的分析与设计具有非常高的参考价值。
- 每章开篇增加了展望和综述，从科学的角度展开论述该章的内容，便于读者对知识的理解和掌握。
- 每章末尾的小结归纳了该章的关键概念和结论，有助于读者抓住重点。
- 每章末尾都有复习题，便于学生自学。

作者简介

吉恩 F. 富兰克林（Gene F. Franklin，1927–2012）曾任美国斯坦福大学电气工程系教授，国际著名控制学家，IEEE终身会士。曾任斯坦福大学电气工程系主任、IEEE控制系统学会理事、副主席，其研究领域覆盖了控制的各个方面。2005年，因其对多个控制领域的基础性贡献曾荣获美国自动控制学会的最高奖——Bellman奖。

J. 大卫 · 鲍威尔（J. David Powell）美国斯坦福大学教授，1970年获得斯坦福大学航空航天专业博士，目前从事的专业是导航与控制，主要研究内容为航天飞船及地面车辆的GPS导航控制系统。







上架指导：控制理论与应用

ISBN 978-7-111-53875-2



www.pearson.com

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88378991 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn



定价：119.00元

封面设计 · 锡 彬